Corrigé Test 4 - Algèbre linéaire II 6 mars 2024

Exercice 1. *(1 + 3 + 4 + 2 + 3 = 13 points)*

a) Déterminer un espace vectoriel isomorphe à $M_{2\times 5}(\mathbb{C})$
Par une proposition du cours, on sait que $M_{2\times 5}(\mathbb{C})$ est isomorphe à $\mathbb{C}^{10}$.
Par un autre proposition, $M_{2\times 5}(\mathbb{C})$ est isomorphe à $\mathcal{L}(\mathbb{C}^5, \mathbb{C}^2)$.
$M_{2\times 5}(\mathbb{C})$ est aussi isomorphe à $M_{5\times 2}(\mathbb{C})$ et donc à $\mathcal{L}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^5)$

b) Donner la définition de deux matrices semblables.

Deux matrices $A, B \in M_n(K)$ sont semblables s'il existe une matrice inversible $S \in GL_n(K)$ telle que $A = SBS^{-1}$.

c) Soit $\alpha : V \to W$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels.
Montrer que l'image de α est un sous-espace vectoriel de W.
Soit $w, w' \in Im(\alpha)$. Alors on sait qu'il existe $v, v' \in V$ tels que $w = \alpha(v)$ et $w' = \alpha(v')$. Comme α est une application linéaire, on a $w + w' = \alpha(v) + \alpha(v') = \alpha(v + v') \in Im(\alpha)$.
De même, si $w \in Im(\alpha)$ et $\lambda \in K$, alors $\lambda w = \lambda \cdot \alpha(v) = \alpha(\lambda v) \in Im(\alpha)$. Ainsi, $\ker(\alpha)$ est un sous-espace vectoriel.

d) Enoncer le théorème du rang.
Soit $\alpha : V \to W$ une application linéaire telle que V soit de dimension finie. Alors

$$\dim V = \dim \ker \alpha + \operatorname{rang} \alpha.$$

e) Montrer que si $A \in M_n(\mathbb{R})$ et I_n sont semblables, alors $A = I_n$.

Comme A et I_n sont semblables, il exsite une matrice S inversible telle que $A = SI_nS^{-1}$. On a donc $A = SI_nS^{-1} = SS^{-1} = I_n$.

Exercice 2. *(3 + 3 + 3 + 3 = 12 points)*

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ une application donnée par

$$f(x; y; z) = (x - 2y; 6y - 3z)$$

a) Montrer que f est une application linéaire. Soit $v = (x; y; z)$, $v' = (x'; y'; z') \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(v + v') &= f(x + x'; y + y'; z + z') \\ &= ((x + x') - 2(y + y'); 6(y + y') - 3(z + z')) \\ &= (x - 2y + x' - 2y'; 6y - 3z + 6y' - 3z') \\ &= (x - 2y; 6y - 3z) + (x' - 2y'; 6y' - 3z') = f(v) + f(v') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\lambda v) &= f(\lambda x; \lambda y; \lambda z) = (\lambda x - 2\lambda y; 6\lambda y - 3\lambda z) \\ &= (\lambda(x - 2y); \lambda(6y - 3z)) = \lambda(x - 2y; 6y - 3z) = \lambda f(v) \end{aligned}$$

b) Déterminer une base du noyau et sa dimension.
On doit résoudre le système

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 6y - 3z = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ z = 2y \end{cases}$$

Un exemple de base du noyau est $(2; 1; 2)$. Sa dimension est égale à 1.

c) Déterminer le rang de f.
Par le théorème du rang, $\operatorname{rang}(f) + \dim(\ker(f)) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$. Ainsi, $\operatorname{rang}(f) = 2$

d) Est-ce que l'application est injective, surjective, bijective ? Justifier.
L'application n'est pas injective car $\ker(f) \neq \{0\}$.
L'application est surjective car $\operatorname{rang}(f) = \dim(\mathbb{R}^2) = 2$.
L'application n'est pas bijective car elle n'est pas injective.

Exercice 3. *(10 points)*

Discuter en fonction de m et résoudre le système :

$$\begin{cases} x+y+mz=1 \\ x+my+z=1 \\ mx+y+mz=1 \end{cases}$$

On utilise la matrice augmentée pour résoudre le système

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ m & 1 & m & 1 \end{pmatrix} \overset{E_{31}(-m)E_{21}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & m & 1 \\ 0 & m-1 & 1-m & 0 \\ 0 & 1-m & m-m^2 & 1-m \end{pmatrix}$$

Si $m=1$, le système initial équivaut à $x+y+z=1$. Ainsi, $S=\{(x;y;z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y+z=1\}$.

On suppose que $m\neq 1$. On peut alors diviser la ligne 2 par $m-1$ et la ligne 3 par $1-m$:

$$\overset{D_2\left(\frac{1}{m-1}\right)D_3\left(\frac{1}{1-m}\right)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & m & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & m & 1 \end{pmatrix} \overset{E_{32}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & m & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & m+1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si $m=-1$, la dernière ligne signifie que $0=1$. Ainsi, $S=\emptyset$.

On suppose que $m\neq -1$. On peut alors diviser la ligne 3 par $1-m^2$:

$$\overset{D_3\left(\frac{1}{1-m^2}\right)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & m & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{1+m} \end{pmatrix} \overset{E_{12}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & m+1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{1+m} \end{pmatrix} \overset{E_{23}(1)E_{13}(-m-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{1+m} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{1+m} \end{pmatrix}$$

Ainsi, si $m\neq\pm 1$, on obtient $S=\left\{\left(0;\dfrac{1}{m+1};\dfrac{1}{m+1}\right)\right\}$.

Résumé :

Si $m=1$, on obtient $S=\{(x;y;z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y+z=1\}$.

Si $m=-1$, on obtient $S=\emptyset$.

Si $m\in\mathbb{R}-\{\pm 1\}$, $S=\left\{\left(0;\dfrac{1}{m+1};\dfrac{1}{m+1}\right)\right\}$

Exercice 4. *(3 + 3 + 2 + 3 = 11 points)*

On considère une application linéaire $\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice A associée à la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer les valeurs propres de A.
Pour trouver les valeurs propres, on calcule le déterminant de $A - \lambda I$:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -1 \\ -1 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-1-\lambda)(1-\lambda) + 2(1-\lambda)$$
$$= (1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda) = \lambda(1-\lambda)(\lambda-1) = -\lambda(\lambda-1)^2$$

Les valeurs propres sont donc $\lambda = 0$ (simple) et $\lambda = 1$ (double).

b) Déterminer les espaces propres associés à chaque valeur propre.
- $\lambda = 0$: On cherche $E_0 = \ker(A)$.
  On résout $Ax = 0$ et on obtient $x + y = 0$ et $z = 0$.
  On a donc que $E_0 =< (1; -1; 0) >$.
- $\lambda = 1$: On cherche $E_1 = \ker(A - I)$.
  On résout $(A - I)x = 0$ et on obtient $x + 2y - z = 0$.
  On a donc que $E_1 =< (1; 0; 1); (0; 1; 2) >$.

c) Montrer que la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ satisfait $P^{-1}AP = D$ où D est diagonale.

Déterminer la matrice diagonale D correspondante.
Les colonnes de la matrice P se compose des vecteurs propres obtenu sous b).
Dans ce cas, la matrice diagonale est

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On peut aussi calculer avec sa méthode préférée que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,

puis calculer $D = P^{-1}AP$ pour obtenir le même résultat.

d) Caractériser géométriquement l'application α.
Il s'agit d'une projection sur le plan $x + 2y - z = 0$ parallèlement à la droite engendrée par $(1; -1; 0)$.

Exercice 5. *(3 + 3 + 3 = 9 points)*

Soit $\alpha : \mathbb{R}[x]^{\leq 2} \to \mathbb{R}[x]^{\leq 3}$ l'application définie par

$$\alpha(P) = (1-x)\cdot P$$

a) Déterminer la matrice de α relativement aux bases canoniques $(x^2; x; 1)$ et $(x^3; x^2; x; 1)$ de $\mathbb{R}[x]^{\leq 2}$ et $\mathbb{R}[x]^{\leq 3}$.
On calcule les images par α des vecteurs de base et on obtient

$$\alpha(x^2) = -x^3 + x^2,\ \alpha(x) = -x^2 + x,\ \alpha(1) = -x + 1.$$

On obtient donc la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Montrer que la famille $\mathcal{B} = (1-x; x^2 - 3x; 2 + x^2)$ forme une base de $\mathbb{R}[x]^{\leq 2}$.
Comme $\dim \mathbb{R}[x]^{\leq 2}$ est de dimension 3, il suffit de vérifier que la famille $\mathcal{B}$ est linéairement indépendante. Supposons donc que $\alpha(1-x) + \beta(x^2 - 3x) + \gamma(2 + x^2) = 0$ et montrons que $\alpha = \beta = \gamma = 0$. On obtient un système

$$\begin{cases} \alpha + 2\gamma = 0 \\ -\alpha - 3\beta = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -2\gamma \\ 2\gamma + 3\gamma = 0 \\ \beta = -\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = 0 \\ \gamma = 0. \end{cases}$$

La famille est bien linéairement indépendante et forme donc une base.

c) Soit $\mathcal{C} = (1; x^3; x; x^2)$ une base de $\mathbb{R}[x]^{\leq 3}$.
Donner la matrice de α par rapport aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.
On calcule les images par α des vecteurs de base et on obtient

$$\alpha(1-x) = x^2 - 2x + 1,\ \alpha(x^2 - 3x) = -x^3 + 4x^2 - 3x,\ \alpha(2 + x^2) = -x^3 + x^2 - 2x + 2.$$

La base canonique de $\mathbb{R}[x]^{\leq 3}$ étant $(1, x, x^2, x^3)$, on obtient la matrice

$$A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ -2 & -3 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut aussi déterminer $(Id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}an} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $(Id)_{\mathcal{C}an}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

puis calculer $A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = (Id)_{\mathcal{C}an}^{\mathcal{C}} A (Id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}an}$ pour obtenir le même résultat.

Exercice 6. *(8 points)*

On considère l'application $s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ qui associe à tout vecteur $\overrightarrow{v}$ son symétrique $s(\overrightarrow{v})$ relativement à la droite $2x - y = 0$ et parallèlement à la droite $x + y = 0$.
Déterminer la matrice de s relativement à la base canonique.
La droite $2x - y = 0$ est engendrée par le vecteur $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, donc $E_1 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \right\rangle$

La droite $x + y = 0$ est engendrée par $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, donc $E_{-1} = \left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle$

On pose donc $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ et on choisit la base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{a}; \overrightarrow{b})$.

Comme $s(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{a}$ et $s(\overrightarrow{b}) = -\overrightarrow{b}$, la matrice associée à cette base est $D = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$.

La matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$ est $P = \begin{pmatrix}1 & 1\\2 & -1\end{pmatrix}$.

On calcule la matrice inverse de P et on obtient $P^{-1} = \begin{pmatrix}1/3 & 1/3\\2/3 & -1/3\end{pmatrix}$.

Finalement, la matrice cherchée est $F = P \cdot D \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix}-1/3 & 2/3\\4/3 & 1/3\end{pmatrix}$.

Exercice 7. *(3 points)*

Expliquer en détails pourquoi une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^4$ ne peut pas être surjective.

Par le théorème du rang, on a $\quad 3 = \dim \mathbb{R}^3 = \dim \ker(f) + \operatorname{rang}(f)$.
Ainsi, $\operatorname{rang}(f) \leq 3$.
Or, pour que la fonction soit surjective, il faudrait que $\operatorname{rang}(f) = \dim \mathbb{R}^4 = 4$.
Donc f ne peut pas être surjective.