Exercice 1. Comme au cours, définissons la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = ax_n$ (et on a $x_n = a^n$). *Si* cette suite converge, alors sa limite x satisfait $x = ax$, c'est-à-dire $x(1-a) = 0$. Si $a \neq 1$, la seule limite possible est $x = 0$. Considérons maintenant les différentes valeurs de a possibles.

- Si $a = 1$, alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite constante 1, et sa limite est $x = 1$.
- Si $-1 < a < 1$, on peut définir les suites $u_n := -|a|^n$ et $v_n := |a|^n$. Comme $0 \leq v_n < 1$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$ par un exemple du cours. Donc $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} (-1)\cdot v_n = -\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leq x_n \leq v_n$, on conclut par le théorème des deux gendarmes que la suite des a^n converge vers 0.
- Si $a = -1$, alors la limite n'existe pas (exemple du cours).
- Pour $a > 1$, montrons que la suite des a^n tend vers $+\infty$. Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$, et définissons $b := \frac{1}{a}$ qui satisfait $0 \leq b < 1$. Par le cours, on a $\lim\limits_{n\to\infty} b^n = 0$, donc pour $\varepsilon := \frac{1}{A}$, il existe N tel que
$$\frac{1}{a^n} = b^n = |b^n - 0| < \varepsilon = \frac{1}{A} \qquad \text{pour tout } n \geq N.$$
Ceci est équivalent à dire qu'il existe N tel que $a^n > A$ pour tout $n \geq N$, c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = +\infty$.
- Si $a < -1$, on définit $b = |a| > 1$, et on considère les sous-suites (a^{2n}) et (a^{2n+1}) de (a^n). La sous-suite (a^{2n}) est une sous-suite de (b^n) et qui tend donc vers $+\infty$ par le point précédent ; la sous-suite (a^{2n+1}) est une sous-suite de $(-b^n)$ qui tend vers $-\infty$ car
$$\lim_{n\to\infty} -b_n = \lim_{n\to\infty} (-1)\cdot b_n = -\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty.$$
Puisque (a^n) a deux-sous-suites qui tendent vers des limites différentes, la suite (a^n) diverge (et ne tend ni vers $+\infty$, ni vers $-\infty$).

Exercice 2. Dans cet exercice, afin de ne pas trop alourdir le raisonnement, nous nous permettrons d'être un peu moins formel dans les démonstrations par récurrence.

a) $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 7$, $x_4 = 15$. La seule possibilité pour la limite est la solution de l'équation $x = 2x + 1$ qui est -1. Or la suite est minorée par 0 (car $x_0 = 0 \geq 0$ et par récurrence, pour $n \geq 1$, on a $x_n = 2x_{n-1} + 1 \geq 1 > 0$) donc elle ne peut pas converger. De plus, elle et strictement croissante : en effet, $x_1 - x_0 = 1 > 0$, et par récurrence, $x_n - x_{n-1} = 2x_{n-1} + 1 - x_{n-1} = x_{n-1} + 1 \geq 1$ car la suite est minorée par 0. Comme elle ne converge pas, elle ne peut pas être majorée, et sa croissance implique alors qu'elle tend vers $+\infty$.

b) $x_0 = \frac{1}{2}$, $x_1 = \frac{5}{4}$, $x_2 = \frac{41}{16}$, $x_3 = \frac{1937}{256}$. Comme l'équation $x^2 - x + 1 = 0$ n'a pas de solution, il n'y a pas de candidat à la limite ; celle-ci n'existe donc pas.

c) $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{5}{4}$, $x_3 = \frac{41}{40}$, $x_4 = \frac{3281}{3280}$. Les solution de l'équation $x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$ sont 1 et -1. Donc la limite, si elle existe, est soit 1, soit -1. On montre par récurrence que la suite est minorée par 1 : on a $x_1 = 2 \geq 1$, et quel que soit $n \geq 2$,
$$\begin{aligned} x_n \geq 1 &\iff \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}}\right) - 1 \geq 0 \\ &\iff x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}} - 2 \geq 0 \\ &\overset{x_{n-1}>0}{\iff} x_{n-1}^2 - 2x_{n-1} + 1 \geq 0 \\ &\iff (x_{n-1} - 1)^2 \geq 0 \qquad \text{qui est toujours vrai.} \end{aligned}$$
De plus la suite est décroissante car $x_2 - x_1 = -\frac{3}{4} < 0$, et quel que soit $n \geq 2$,
$$\begin{aligned} x_n - x_{n-1} \leq 0 &\iff \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}}\right) - x_{n-1} \leq 0 \\ &\iff \frac{1}{2}\left(-x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}}\right) \leq 0 \\ &\iff \frac{1}{x_{n-1}} \leq x_{n-1} \qquad \text{toujours vrai car } x_{n-1} \geq 1, \end{aligned}$$
et ainsi la suite est décroissante. La décroissance et la minoration implique la convergence de la suite ; comme les deux seules possibilités pour la limite sont 1 ou -1, on en déduit que la limite est 1.

d) $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, cette suite est la suite constante 1, de limite 1.

Exercice 3.

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2+\frac{3}{n}}{1-\frac{1}{n}} = 2$ par le résultat du cours sur les limites de suites rationnelles.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\frac{5}{n}-n}{\frac{10}{n}-\frac{1}{n^2}} = -\infty$ par le résultat du cours sur les limites de suites rationnelles.

c) On a $\lim\limits_{2n+1\to+\infty} -\dfrac{2n+1}{(2n+1)+1} = -1$ et $\lim\limits_{2n\to+\infty} \dfrac{2n}{2n+1} = 1$ par le résultat du cours sur les limites de suites rationnelles.

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède donc une sous-suite $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers -1, et une sous-suite $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$qui converge vers 1, des limites différentes : donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas.

d) On a $-\frac{1}{\sqrt{n}} \leq x_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. De plus,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{1}{n}} = \sqrt{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}} = \sqrt{0} = 0$$

par l'exercice sur les limites de racines de suite et sur le résultat du cours sur la limite de $\frac{1}{n}$. De même, $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

Par le théorème des deux gendarmes, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

e) Comme $-1 \leq \cos(x) \leq 1$, on a $-\frac{1}{n} \leq x_n \leq \frac{1}{n}$. Sachant que $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{n} = 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ par le théorème des deux gendarmes.

f) Utilisons que $n > 0$ pour écrire (astuce classique !)

$$\begin{aligned}
\sqrt{n^2+6n} - n &= \left(\sqrt{n^2+6n} - n\right) \cdot \frac{\sqrt{n^2+6n}+n}{\sqrt{n^2+6n}+n} \\
&= \frac{6n}{\sqrt{n^2(1+\frac{6}{n})}+n} = \frac{n}{n} \cdot \frac{6}{\sqrt{1+\frac{6}{n}}+1} = \frac{6}{\sqrt{\frac{6}{n}+1}+1}
\end{aligned}$$

Comme — pour des suites qui convergent — la limite d'un quotient est le quotient des limites, la limite d'une constante est une constante, la limite d'une somme est la somme des limites, la limite d'une racine est la racine de la limite, et la limite d'une somme est la somme des limites (une deuxième fois), on peut écrire

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{6}{\sqrt{\frac{6}{n}+1}+1} = \frac{6}{\sqrt{1}+1} = 3.$$

Exercice 4.

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+2} = \left(\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}\right) \cdot \left(\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2}\right) = \mathrm{e} \cdot 1 = \mathrm{e}.$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{n} = \lim\limits_{m\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{m}\right)^{m/2} = \left(\lim\limits_{m\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{m}\right)^{m}\right)^{1/2} = \sqrt{\mathrm{e}}.$

c) Cette fois, faisons le changement de variable $m = \frac{n}{3}$, si n tend vers $+\infty$, m aussi (et inversément).

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{3}{n}\right)^{n} = \lim_{m\to+\infty} \left(1+\frac{1}{m}\right)^{3m} = \left(\lim_{m\to+\infty} \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right)^{3} = \mathrm{e}^3.$$