Analyse avancée II

Section : PH

EPFL , printemps 2021

Manuscrit : Peter Wittwer

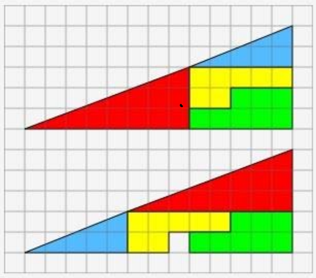
Prerequis

Analyse avancée I (note suffisante)

Algèbre linéaire avancée I (note suffisante)

+ esprit critique

+ logique sans faille.



Curry's paradox.

Mix et Remix

1. Equations différentielles, méthodes de résolution

Prérequis :
- méthodes d'intégration
- fonctions de classe C^1
- restriction d'une fonction

Motivation : physique, économie, biologie

1.1. Introduction, motivation, exemples

Une équation différentielle (ordinaire) est une expression de la forme

n-ème dérivée de la fonction y

$$E(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0 \qquad (*)$$

La donnée du problème est une fonction

$$E : \mathbb{R}^{n+2} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(\xi_1, \dots, \xi_{n+2}) \longmapsto E(\xi_1, \dots, \xi_{n+2})$$

pour un $n \in \mathbb{N}^*$. On cherche un intervalle $I =]a, b[$, $a < b$ et une fonction $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^n(I)$, de sorte que l'équation $(*)$ soit satisfaite pour tout $x \in I$.

Notation : pour simplifier la notation on écrit souvent

$$E(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \qquad (**)$$

au lieu de $(*)$ et, par abus de notation, on écrit de même $E(x, y, y', \dots, y^{(n)})$ pour la valeur de la fonction E en un point $(x, y, y', \dots, y^{(n)}) \equiv (\xi_1, \dots, \xi_{n+2})$ donné de $\mathbb{R}^{n+2}$.

Remarque: la notion "ordinaire" veut dire que la fonction recherchée est une fonction d'une seule variable réelle. Les équations différentielles aux dérivées partielles font intervenir des fonction inconnues de plusieurs variables.

Acronymes: ED ou EDO (ODE en anglais)
EDP (PDE en anglais)

Définition: si la donnée E est une fonction non-constante de ξ_{n+2} ("E dépend de $y^{(n)}$") on dit que *l'équation est d'ordre n*

Définition: si la donnée E est une fonction constante de ξ_1 ("E ne dépend pas de x") l'équation est dite *autonome* sinon *non autonome*

Exemples

i) $E(\xi_1, \xi_2) = \xi_2$

$y(x) = 0$ — $n=0$, pas une ED

ii) $E(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \xi_3$

$y'(x) = 0$ — $n=1$ (premier ordre) autonome.

iii) $E(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sin(\xi_1)\,\xi_3 - \sin(\xi_2)$

$\sin(x)\, y'(x) - \sin(y(x)) = 0$ — $n=1$ non autonome

Exemples avec notation simplifiée

iv) $y''' + y'' + y' + y + \sin(x) = 0$ — $n=3$ non autonome

v) $y'' = F(y)$, $\overset{\text{(continue)}}{F} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — équation de Newton (d'un point de masse dans $\mathbb{R}$)

Exemples de solutions (avec la notation simplifiée)

$y'=0$ solutions $\forall C \in \mathbb{R}$, $y(x) = C$, $x \in \mathbb{R}$.

$y'-1=0$ solutions $\forall C \in \mathbb{R}$, $y(x) = x + C$, $x \in \mathbb{R}$

$y'-e^x=0$ solutions $\forall C \in \mathbb{R}$, $y(x) = e^x + C$, $x \in \mathbb{R}$

$y'-f(x)=0$ solutions $y(x) = \underset{\uparrow}{F}(x)$, $x \in]a,b[$

$\Leftrightarrow$

$y' = f(x)$

une primitive de f
avec f continue sur $]a,b[$.

Voir aussi la série 1A, échauffement.

<u>A propos la série 1A</u> "typologie" des équations; les solutions sont données Vérifier que les fonctions données satisfont l'équation

<u>Remarque:</u> soit y une solution d'une ED sur $]a,b[$, et $]c,d[\subset]a,b[$, $c<d$. Alors la restriction de y à $]c,d[$ est aussi une solution.

<u>Définition:</u> on dit qu'une solution est maximale si elle n'est pas la restriction d'une solution définie sur un intervalle plus grand

<u>Définition:</u> la <u>solution générale</u> d'une ED est l'ensemble des solutions maximales de l'équation. Résoudre une ED revient à trouver la solution générale

Plus d'exemples

$A: y' = y$ $\qquad B: y' = -y$

$C: y'' = y$ $\qquad D: y'' = -y$

$F: y' = y + 1$

$G: y' = -xy$ $\qquad H: y' + \frac{1}{x} y = 0, \ x \in \mathbb{R}^*$

Solutions (dans ce qui suit $I = \mathbb{R}$ sauf si indiqué autrement et $C, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.)

$A: y(x) = C \cdot e^{x}$

$B: y(x) = C \cdot e^{-x}$

$C: y(x) = C_1 \cdot e^{x} + C_2 \cdot e^{-x}$ ou $y(x) = C_1 \operatorname{sh}(x) + C_2 \operatorname{ch}(x)$

$D: y(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)$

$F: y(x) = -1 + C \cdot e^{x}$

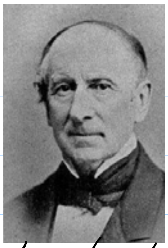
$G: y(x) = C e^{-\frac{1}{2}x^2}$.

notations équivalentes

$H: y(x) = \frac{C}{x}, \ x \in \left]-\infty, 0\right[\ \equiv (-\infty, 0)$

$y(x) = \frac{C}{x}, \ x \in \left]0, \infty\right[\ \equiv (0, \infty)$

Constat: la solution d'une ED d'ordre n n'est typiquement pas unique Elle dépend typiquement de n paramètres.


Augustin-Louis Cauchy
1789 — 1857

Le problème de Cauchy

Exemple 1

$$\underbrace{\underbrace{y'=y}_{\text{ED}} \qquad \underbrace{y(0)=1}_{\text{CI}} \quad \text{(condition initiale)}}_{\text{problème de Cauchy}}$$

Solution générale de l'ED: $\forall C \in \mathbb{R}, \; y(x) = C \cdot e^{x}, \; x \in \mathbb{R}$

La solution du problème de Cauchy, c'est-à-dire la solution qui satisfait $y(0)=1$ est celle avec $C=1$

$$y(0) = C \cdot e^{0} = C \overset{!}{=} 1 \quad \Rightarrow \quad C = 1$$

Exemple 2:

$$\underbrace{\underbrace{y''=-y}_{\text{ED}} \qquad \underbrace{y(0)=1, \; y'(0)=0}_{\text{CI}}}_{\text{problème de Cauchy}}$$

le même point x !

Solution générale: $\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \; y(x) = C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x), \; x \in \mathbb{R}$

$$y(0) = C_2 \overset{!}{=} 1 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 1$$

$$y'(0) = C_1 \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0$$

La solution du problème de Cauchy donné est: $y(x) = \cos(x)$

7

1.2. Equations différentielles du premier ordre

$$E(x, y, y') = 0$$

1.2.1. Séparation des variables

Une ED est dite à variables séparées, si on peut l'écrire sous la forme

$$\boxed{E(x,y,y') = g(x) - f(y)\cdot y' = 0 \quad (*)}$$

pour certaines fonctions f et g.

Notations dans DZ: au lieu de $(*)$ ils écrivent

$$f(u(t))\, u'(t) = g(t)$$

Résolution de l'équation (on suppose f, g continues sur $\mathbb{R}$)

Soit F une primitive de f et G une primitive de g.
Alors toute fonction $y:]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 qui satisfait pour une constante $C \in \mathbb{R}$ l'équation

$$\boxed{G(x) - F(y(x)) = C \quad , \; x \in]a,b[\qquad (**)}$$

est une solution de $(*)$.

Remarque: donné une solution sous forme implicite (on a une equation pour $y(x)$) il faut encore (si possible) résoudre pour $y(x)$ (isoler $y(x)$ dans l'équation $(**)$) pour obtenir la (les) solution(s) sous forme explicite (sur $]a,b[$).

Vérification de (**) : $\frac{d}{dx}$ (**) $\Rightarrow$

$$G'(x) - F'(y(x))\, y'(x) = 0$$

et donc $g(x) - f(y(x))\, y'(x) = 0$, puisque par définition de F et G on a $F' = f$ et $G' = g$.

Procédée de résolution pratique (recette de cuisine)

on écrit $y' = \frac{dy}{dx}$ que l'on manipule comme une fraction de "dy" sur "dx". Si

$$g(x) - f(y)\frac{dy}{dx} = 0 \quad , \qquad \cdot dx$$

$$g(x) \cdot dx = f(y)\, dy \quad , \qquad \int$$

$$\int g(x)\, dx = \int f(y)\, dy + C \quad , \quad C \in \mathbb{R}$$

ici on traite y comme variable d'intégration

$$G(x) = F(y) + C \quad \Rightarrow (**)$$

ici y est une fonction de x

Exemple 1:

$\boxed{y' = y} \quad \underset{y \neq 0}{\Longleftrightarrow} \quad 1 - \frac{1}{y} y' = 0$ donc $g(x) = 1$, $f(y) = \frac{1}{y}$.

Remarque: on verra plus loin que puisque $y(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$ est une solution de l'équation aucune autre solution peut s'annuler, c'est-à-dire ou bien $\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = 0$ ou $\forall x \in \mathbb{R}, y(x) \neq 0$

$$\boxed{y' = y} \underset{\text{recelle}}{\Longrightarrow} \frac{dy}{dx} = y \overset{y \neq 0}{\Longleftrightarrow} \frac{dy}{y} = dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int 1 \cdot dx + C \quad , \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \ln(|y|) = x + C \quad , \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow |y(x)| = e^{x+C} = e^{C} \cdot e^{x} \quad , \; x \in \mathbb{R} \; , \; C \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow |y(x)| = C \cdot e^{x} \quad , \; x \in \mathbb{R} \; , \; C > 0$$

$$\Rightarrow y(x) = \pm C e^{x} \quad , \; x \in \mathbb{R} \; , \; C > 0$$

$$\Rightarrow y(x) = C \cdot e^{x} \quad , \; x \in \mathbb{R} \; , \quad C \in \mathbb{R}^{*}$$

Il manque la solution $y(x) = 0 = C \cdot e^{x}$ pour $C = 0$

La <u>solution générale</u> est donc bien

$$\{ \forall C \in \mathbb{R} , \; y(x) = C \cdot e^{x} , \; x \in \mathbb{R} \} .$$

<u>Exemple 2</u>

Soit l'ED $\boxed{y' = y^2}$. Déterminer.

a) la solution générale

b) la solution maximale qui satisfait la CI
$y(0) = y_0 \in \mathbb{R}$, avec y_0 donné.

a) $y(x) = 0 \; , \; x \in \mathbb{R}$ est une solution

<u>voir Analyse I</u>. ceci veut dire $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto y(x) = 0$

l'équation est à variables séparées:

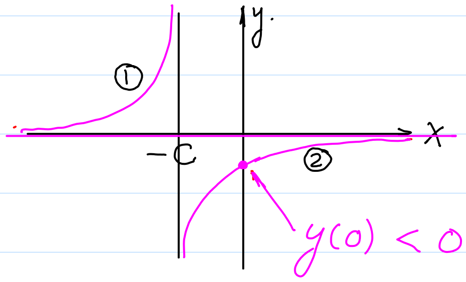
$$\frac{dy}{dx} = y^2 \overset{y\neq 0}{\Longleftrightarrow} \frac{dy}{y^2} = dx \Rightarrow -\frac{1}{y} = x + C, \quad C\in\mathbb{R}$$

$$y(x) = -\frac{1}{x+C}$$

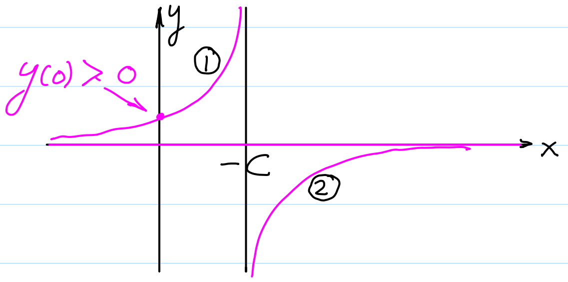
La solution générale est donc:

$$\left\{ \begin{array}{l} y(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}; \\ \text{①} \quad \forall C\in\mathbb{R},\ y(x) = \frac{-1}{x+C}, \quad x\in\,]-\infty, -C[; \\ \text{②} \quad \forall C\in\mathbb{R},\ y(x) = \frac{-1}{x+C}, \quad x\in\,]-C, \infty[\end{array} \right\}$$

pour $C>0$



pour $C<0$



b) CI $y(0) = y_0$, avec $y_0 \in \mathbb{R}$ donné

Pour $\boxed{y_0 = 0}$ on obtient la solution $\boxed{y(x) = 0, \quad x\in\mathbb{R}}$

Pour $\boxed{y_0 < 0}$ on obtient une solution du type ② (voir le dessin), avec

$$y(0) = -\frac{1}{C} \overset{!}{=} y_0 \Rightarrow C = -\frac{1}{y_0}.$$

Ceci donne: $\boxed{y(x) = \frac{-1}{x-\frac{1}{y_0}} = \frac{y_0}{1-xy_0}, \quad x\in\,]\frac{1}{y_0}, \infty[}$

Pour $\boxed{y_0 > 0}$ on obtient une solution du type ① (voir le dessin), avec $y(0) = -\frac{1}{C} \overset{!}{=} y_0 \Rightarrow C = -\frac{1}{y_0}$

Ceci donne: $\boxed{y(x) = \frac{-1}{x-\frac{1}{y_0}} = \frac{y_0}{1-xy_0} \, , \quad x \in \left]-\infty, \frac{1}{y_0}\right[}$

La solution maximale avec CI $y(0)=y_0$ est donc:

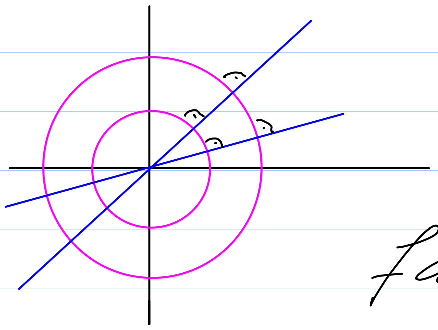
$$\begin{cases} y(x) = 0 \, , & x \in \mathbb{R} \, , \quad \text{si } y_0 = 0 \\ y(x) = \dfrac{y_0}{1-xy_0} \, , & x \in \left]-\infty, \frac{1}{y_0}\right[\, , \quad \text{si } y_0 > 0, \\ y(x) = \dfrac{y_0}{1-x\cdot y_0} \, , & x \in \left]\frac{1}{y_0}, \infty\right[\, , \quad \text{si } y_0 < 0 \end{cases}$$

Exemple 3 voir la série 2B, Ex. 1

1.2.2. Familles de courbes orthogonales

But: donné une famille de courbes, trouver la famille des courbes orthogonales. (voir série B2, Ex. 2)

Exemple: famille donnée, cercles cocentriques, $x^2+y^2 = C > 0$



à lire $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y = C\}$

famille recherchée, droites par l'origine

Lien avec les équations différentielles: localement on a (à des exceptions près, voir théorème des fonctions implicites plus loin dans le cours) pour un membre de la famille des cercles:

$$x^2 + y(x)^2 = C \quad , \quad C > 0$$

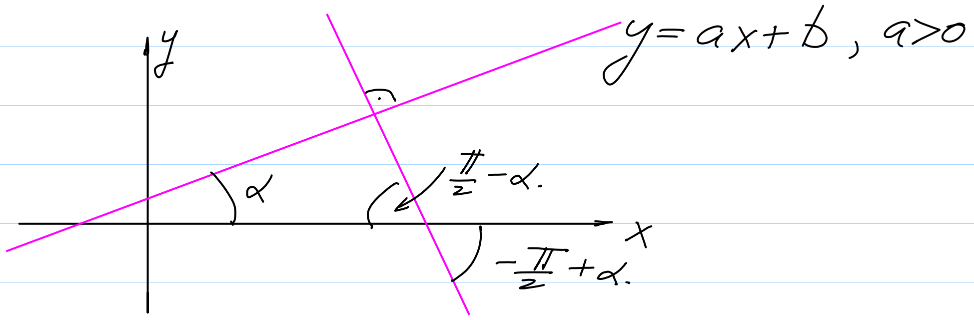
et donc, en dérivant par rapport à x :

$$\boxed{2x + 2\cdot y(x)\cdot y'(x) = 0} \qquad (*)$$

C'est une équation différentielle qui a des familles de demi-cercles comme solution générale (résoudre l'équation !)

Quelle est l'équation différentielle qui correspond à la famille des courbes orthogonales ?

Rappel: condition d'orthogonalité pour deux droites :



$$\tan\left(-\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \frac{\sin\left(-\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{2}+\alpha\right)} = \frac{-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = -\frac{1}{\tan(\alpha)}$$

(produit des pentes $= -1$).

$$(*) \Rightarrow \boxed{x - \frac{y}{y'} = 0}$$ (ED de la famille orthogonale).

séparation des variables:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \qquad (y \neq 0, x = 0)$$

$$\ln(|y|) = \ln(|x|) + \ln(C), \quad C > 0$$

et on trouve la solution générale

$$\{\forall C \in \mathbb{R},\ y(x) = C \cdot x\ ,\ x \in \mathbb{R}\}.$$

Comme équation pour la famille des courbes orthogonales on a donc finalement

$$y = Cx \quad , \quad C \in \mathbb{R}.$$

(il manque la droite $x = 0$, voir plus loin dans le cours).

1.2.3. Applications

- modélisation de populations
- modélisation de certaines situations économiques
- modélisation du climat.

Modélisation

$y(t) \in \mathbb{R}$: - la taille d'une population
- la quantité d'argent
- la quantité de CO_2 dans l'atmosphère

choix de la modélisation

$t \geqslant 0$ le temps , $y_0 \in \mathbb{R}$, la quantité initiale

modèle: $y' = k \cdot y$, $y(0) = y_0$ (problème de Cauchy)

motivation pour ce modèle: soit $\delta > 0$, petit.

$$y(t+\delta) = y(t) + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{correction} \\ \text{proportionnelle à } y(t)}}{y(t)\cdot k\cdot \delta} + \underbrace{\text{"petit"}}_{= \delta\,\varepsilon(\delta),\ \lim\limits_{\delta\to 0}\varepsilon(\delta)=0}$$

donc

$$\boxed{y'(t) =} \lim_{\delta\to 0} \frac{y(t+\delta)-y(t)}{\delta} = \boxed{y(t)\cdot k}$$

Interprétation de k :

$k>0$ accroissement proportionnel à $y(t)$

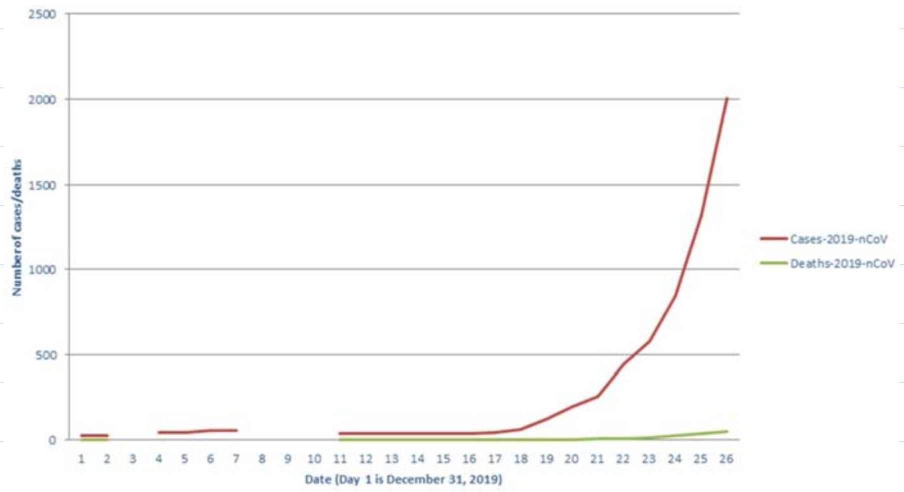
$k<0$ "taux négatif" décroissement proportionnel à $y(t)$.

$$\boxed{\text{covid-19 : } \quad R := e^{k} > 1 \quad \text{si } k>0}$$

Solution du problème de Cauchy

$$\boxed{y(t) = y_0 \cdot e^{kt}\ ,\ t \geq 0 \qquad \text{croissance exponentielle (si } k>0\text{).}}$$

Exemple: croissance exponentielle du nombre de malades (ou morts) du coronavirus



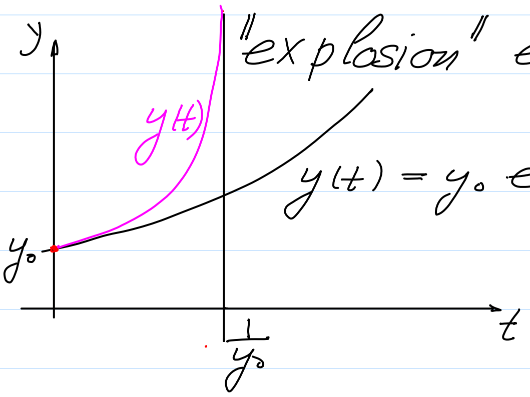
A comparer avec: $y' = y^2$, $y(0) = y_0 > 0$

accroissement plus important que proportionnel (pour $y > 1$)

choix de la modélisation

Solution: $y(t) = \dfrac{y_0}{1 - y_0 t}$, $t \in [0, \frac{1}{y_0}[\subset]-\infty, \frac{1}{y_0}[$

solution maximale

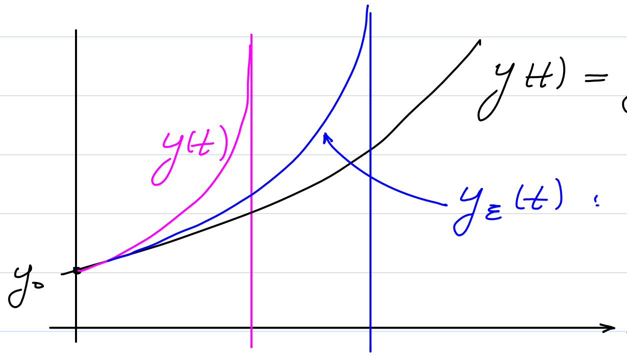


"explosion" en temps fini

$y(t) = y_0 e^{kt}$, $t \geq 0$, $k > 0$

Remarque: (voir la série 2, exercice 3)

A comparer avec la solution de $y' = k \cdot y^{1+\varepsilon}$, $k > 0$, $y(0) = y_0 > 0$, $\varepsilon > 0$:

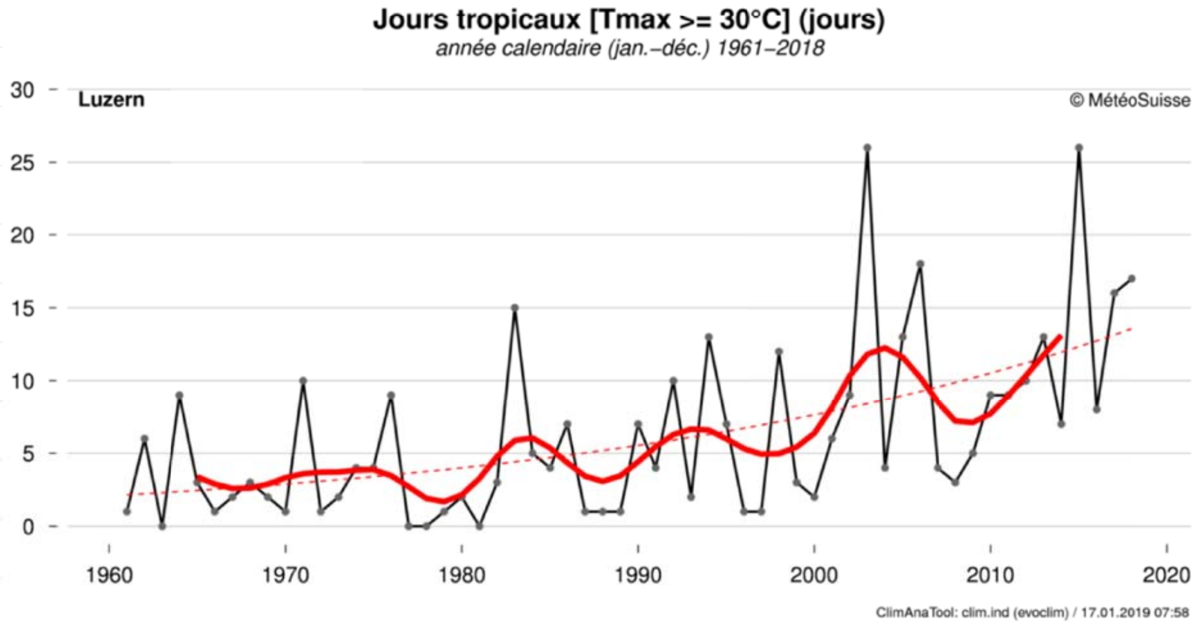


$y(t) = y_0 \cdot e^{kt}$

$y_\varepsilon(t)$: solution de $y' = k \cdot y^{1+\varepsilon}$, $k > 0$, $\varepsilon > 0$. Explosion en temps fini.

On a $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} y_\varepsilon(t) = y_0 e^{kt}$ pour tout $t \geq 0$

Exemple: nombre de jours tropicaux qui est considéré comme un indicateur des effets du réchauffement climatique



1.3. ED linéaires du premier ordre

Prérequis : algèbre linéaire, structure de l'ensemble des solutions de $\boxed{Av=b}$, A une matrice $n\times n$ v et b des vecteurs dans $\mathbb{R}^n$.

1.3. ED linéaires du premier ordre

Prérequis : algèbre linéaire, structure de l'ensemble des solutions de $\boxed{Av=b}$, A une matrice $n\times n$ v et b des vecteurs dans $\mathbb{R}^n$.

1.3.1. Définitions

Une ED linéaire du premier ordre est de la forme

$$\boxed{y' + p(x)\,y = q(x) \qquad (*)}$$

avec p et q des fonctions données continues sur un intervalle ouvert I.

Remarque : $(*) \Leftrightarrow E(x,y,y') = y' + p(x)y - q(x) = 0$

Terminologie homogène/inhomogène

- si $q = 0$ l'équation $(*)$ est dite homogène ($=$ sans second membre, Dt)
- si $q \neq 0$ l'équations $(*)$ est dite inhomogène et $y' + p(x)y = 0$ est appelée l'équation homogène associée à $(*)$.

On définit l'application

$$L : C^1(I) \to C^0(I)$$
$$\eta \mapsto L(\eta)$$

par :

$$(L(\eta))(x) := \eta'(x) + p(x)\,\eta(x) \,,$$

et l'é uation $(*)$ devient (on écrira souvent $L\eta$ au lieu de $L(\eta)$) :

$$\boxed{Ly = q} \qquad (\text{analogue à } Av = b)$$

$C^1(I)$ et $C^0(I)$ sont des espaces vectoriels (de dimension ∞) et L est linéaire, c'est-à-dire $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\eta_1, \eta_2 \in C^1(I)$

$$L(\alpha \eta_1 + \beta \eta_2) = \alpha \cdot L(\eta_1) + \beta L(\eta_2)$$

$$\ulcorner \quad (\alpha \eta_1(x) + \beta \eta_2(x))' + p(x)(\alpha \cdot \eta_1(x) + \beta \eta_2(x))$$

$$= \alpha \cdot (\eta_1'(x) + p(x)\eta_1(x)) + \beta(\eta_2'(x) + p(x)\eta_2(x)) \quad \lrcorner$$

Le noyau de L est de dimension 1 (voir plus loin) et puisque l'équation est linéaire la solution générale de (*) est de la forme

$$\boxed{\{\forall C \in \mathbb{R},\ y(x) = y_p(x) + C\, y_h(x),\ x \in I\} \ (**)}$$

où y_p est une solution quelconque du problème inhomogène, appelée solution particulière, et y_h une fonction quelconque non nulle dans le noyau de L : $Ly_h = y_h' + p(x) y_h = 0$. Nous verrons plus loin (théorème d'unicité) que vu que $y(x) = 0$, $x \in I$ est une solution du problème homogène, aucune autre solution du problème homogène ne peut prendre la valeur zéro sur I.

1.3.2. Méthode de résolution générale

i) L'équation homogène peut être résolue par séparation des variables (en vue de (**) il suffit de trouver une solution non nulle.
On a :

$$y' + p(x)\,y = 0 \;\Big\lceil \Longleftrightarrow \frac{dy}{y} = -p(x)\,dx$$

$$\ln(|y|) = -P(x)$$

avec P une primitive quelconque de p. $\rfloor$

Donc

$$\boxed{y_h(x) = e^{-P(x)}, \quad x \in I}$$ ①

ii) Recherche d'une solution particulière

a) Méthode (dite) de la variation de la constante

On pose $y_p(x) = C(x)\,y_h(x)$, avec $C(x)$ une fonction inconnue et l'on substitue dans l'équation inhomogène :

$$\big(C(x)\,y_h(x)\big)' + p(x)\,\big(C(x)\,y_h(x)\big) = q(x)$$

$$C'(x)\cdot y_h(x) + \underbrace{C(x)\,y_h'(x) + p(x)\,C(x)\,y_h(x)}_{} = q(x)$$

$$= C(x)\cdot\underbrace{\big(y_h'(x) + p(x)\,y_h(x)\big)}_{}$$

$= 0$ par définition de y_h.

un TEST !

on obtient donc

$$\boxed{C'(x)\,y_h(x) = q(x)}$$ ②

et donc

$$C'(x) = \frac{1}{y_h(x)}\, q(x) = \underbrace{e^{P(x)}\, q(x)}_{\text{continue sur } I}$$

et on obtient

$$C(x) = \int e^{P(x)}\, q(x)\, dx$$

et

$$\boxed{y_p(x) = \left(\int e^{P(x)} \cdot q(x)\, dx\right) \cdot e^{-P(x)}, \quad x \in I \qquad (***)}$$

De i) et ii) on obtient la solution générale (**)

<u>Attention:</u> y_h et y_p ne sont pas uniques, ils dépendent du choix des primitives.

b) Méthode des coëfficients indéterminés

attention : nécessite $p(x) = \text{const.} = p$

Cette méthode s'applique si $p(x) = p$ et si $q(x)$ est une combinaison linéaire de polynômes, fonctions exponentielles, sin et cos et produids de ces fonctions c'est-à-dire si

$$q(x) \in \text{vect}\{q_1(x), \dots, q_m(x)\} = \text{vect}\{q_i(x)\}$$

(voir le tableau pour les fonctions q_i admises).
Dans ce cas on a

$$y_p(x) \in \text{vect}\{q_1(x), q_1'(x), \dots\}$$

(voir le tableau pour les précisions).

Soit $r \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$:

fonction $q_1(x)$	$\longrightarrow$	fonctions dans $y_p(x)$
x^r		$\{x^r, x^{r-1}, \dots, x, 1\}$
$x^r e^{\lambda x}$, $\lambda \neq -p$		$\{x^r e^{\lambda x}, \dots, x e^{\lambda x}, e^{\lambda x}\}$
cas dit résonant $\}$ $x^r e^{-px}$		$\{x^{r+1} e^{-px}, \dots, x^1 e^{-px}\}$
$x^r \sin(\alpha x) e^{\lambda x}$ ou $x^r \cos(\alpha x) e^{\lambda x}$		$\{x^r \sin(\alpha x) e^{\lambda x}, \dots, \sin(\alpha x) e^{\lambda x},$ $x^r \cos(\alpha x) e^{\lambda x}, \dots, \cos(\alpha x) e^{\lambda x}\}$.

Explication: on écrit l'ED sous la forme

$$p \cdot y(x) = q(x) - y'(x)$$

et compare les fonctions des deux côtés de l'équation

1.3.3. Exemples

1) $\underbrace{y' + x^2 y}_{Ly} = \underbrace{x^2}_{q}$, $p(x) = x^2$, $q(x) = x^2$, $I = \mathbb{R}$.
($\Rightarrow$ y définie sur $\mathbb{R}$).

i) problème homogène : $y' + x^2 y = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -x^2 dx, \quad \ln(|y|) = -\frac{1}{3}x^3$$

$$y_h(x) = e^{-\frac{1}{3}x^3}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

ii) solution particulière (variation de la constante)

$$y_p(x) = C(x)\, e^{-\frac{1}{3}x^3}$$ à substituer dans l'équation

$$C'(x)\cdot e^{-\frac{1}{3}x^3} + \underbrace{C(x)\, e^{-\frac{1}{3}x^3}(-x^2) + x^2\, C(x) e^{-\frac{1}{3}x^3}}_{\substack{\text{TEST} \\ =0}} = x^2$$

$$C'(x)\, e^{-\frac{1}{3}x^3} = x^2 \Rightarrow C'(x) = e^{\frac{1}{3}x^3}\cdot x^2$$

deviner ! si possible

$$\Rightarrow C(x) = e^{\frac{1}{3}x^3} \Rightarrow y_p(x) = e^{\frac{1}{3}x^3}\cdot e^{-\frac{1}{3}x^3} = 1$$

iii) solution générale

$$\boxed{\left\{ \forall C \in \mathbb{R},\ y(x) = 1 + C\, e^{-\frac{1}{3}x^3},\ x \in \mathbb{R} \right\}}$$

2) Methode b), voir la série B2, Ex. 3 i)

3) Voir série B2, Ex 3ii) attention à mettre sous la forme
$$y' + p(x)\, y = q(x)$$

1.4. Exemples d'ED du premier ordre qui ne sont pas linéaires et ne sont pas à variables séparées

1.4.1. Equation de Bernoulli (série 2B, Ex. 4)

C'est une équation de la forme

$$\boxed{y' + p(x)\, y = q(x)\, y^m \ ,\quad m \in \{2, 3, \ldots\} \subset \mathbb{N}^* \quad (*)}$$

où $p(x)$ et $q(x)$ sont supposées continues sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$.

i) $y(x) = 0$, $x \in I$ est une solution.

ii) nous posons $\boxed{u(x) = y(x)^{1-m}}$ (voir la discussion sous le point iii)).

On a $u' = (1-m)\, y^{-m} y'$, et si on multiplie l'équation (*) avec $(1-m)\, y^{-m}$ on obtient l'équation

$$\boxed{u' + (1-m)\, p(x)\, u = (1-m)\, q(x)}$$

C'est une équation differentielle linéaire du premier ordre pour la fonction u (sur I) que l'on soit résoudre.

iii) pour remonter à $y(x)$ à partir de $u(x)$ il faut distinguer deux cas:

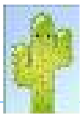
- <u>si m est impair</u>, il faut restraindre $u(x)$ à des intervalles ouverts où $u(x) > 0$. Chacun de ces intervalles donne une solution $y(x) = u(x)^{\frac{1}{1-m}}$.

- <u>si m est pair</u>, il faut décomposer I en des intervalles où $u(x) > 0$ et $u(x) < 0$. On a.

$y(x) = u(x)^{\frac{1}{1-m}}$ sur un intervalle où $u(x) > 0$

$y(x) = -\,(-u(x))^{\frac{1}{1-m}}$ sur un intervalle ou $u(x) < 0$.

1.4.2. Equations homogènes (série 3B, échauff. + Ex. 2)



$$\boxed{\text{À ne pas confondre avec les équations linéaires homogènes } (\equiv \text{sans second membre})}$$

Une équation homogène est de la forme

$$\boxed{y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \qquad (*)}$$

Méthode de résolution : on pose

$$\boxed{y(x) = x \cdot v(x)}$$

et on cherche la fonction $v(x)$: on a

$$y'(x) = v(x) + x \cdot v'(x)$$

et on obtient à partir de $(*)$ l'équation suivante pour v :

$$v + x v' = f(v)$$

que l'on peut résoudre par séparation des variables

1.4.3. Equation de Riccati (série B3, Ex. 3).

C'est une équation de la forme ($y_R \leftarrow$ Riccati)

$$\boxed{y_R' = a(x)\, y_R^2 + b(x)\, y_R + c(x)} \qquad (*)$$

avec $a(x), b(x), c(x)$ des fonctions continues sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$. Si c est identiquement zéro c'est une équation de Bernoulli ($m=2$).

On ne sait pas résoudre, sauf si on connait déjà une solution $y_1(x)$. Dans ce cas on pose

$$y_R(X) = y_1(X) + \frac{1}{u(X)}$$

et on substitue dans $(*)$.

1.4.4. Equation de Clairaut (série B3, Ex. 4)

Soit l'ED

$$y = xy' + f(y')$$

avec $f \in C^1(\mathbb{R})$. Alors on pose $y' = p$ et donc

$$y = x \cdot p + f(p) \qquad (*).$$

La dérivée de $(*)$ par rapport à x donne l'équation

$$p = p + xp' + f'(p)\,p'$$

ou encore

$$(x + f'(p))\,p' = 0$$

i) $p' = 0$: $\Rightarrow p(x) = C \underset{(*)}{\Longrightarrow} y = C \cdot x + f(C)$

(une famille de droites)

ii) $x + f'(p) = 0$: donc, et en utilisant (*),

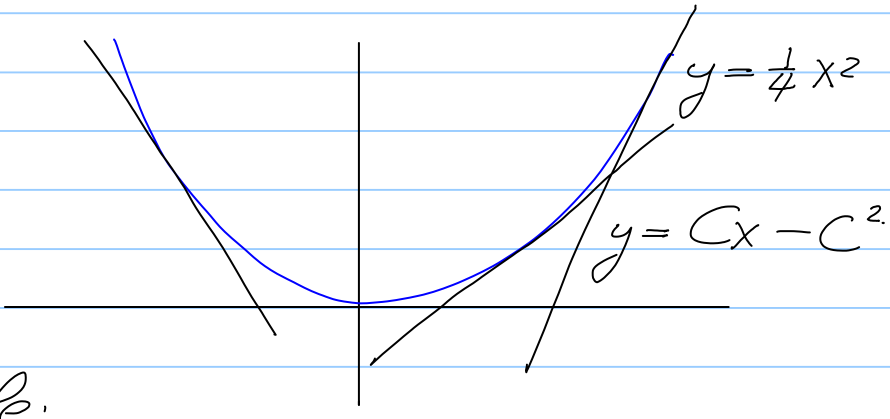
$$x = -f'(p)$$

$$y = -p \cdot f'(p) + f(p)$$

Ces deux équations définissent une courbe (voir plus loin) dans le plan, paramétrisée par $p \in \mathbb{R}$.

Exemple

$$y'^2 - xy' + y = 0$$



solution générale:

$$\left\{ y(x) = \frac{1}{4}x^2 ,\ x \in \mathbb{R} ; \right.$$
$$\left. \forall C \in \mathbb{R} ,\ y(x) = Cx - C^2 ,\ x \in \mathbb{R} \right\}.$$

La solution $\frac{1}{4}x^2$ est appelée "l'enveloppe". Pour les points de l'enveloppe il y a violation du théorème d'unicité (deux solutions passent par le même point).

1.5 ED linéaires du deuxième ordre à coëfficients constants

1.5.1. Définitions

Une ED linéaire du deuxième ordre à coëfficients constants est de la forme

$$\boxed{a\,y'' + b\,y' + c\,y = q(x) \qquad (*)}$$

où $a \in \mathbb{R}^*$, $b, c \in \mathbb{R}$ et q une fonction continue sur un intervalle ouvert I. Cette équation est de la forme

$$\boxed{L y = q}$$

avec $L : C^2(I) \longrightarrow C^0(I)$ définie par

$$(L\eta)(x) \equiv (L(\eta))(x) := a \cdot \eta''(x) + b\,\eta'(x) + c\,\eta(x)$$

et L est une application linéaire.

Remarque: donc de nouveau, par linéarité, si

$$q(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i\, q_i(x) \quad , \; a_i \in \mathbb{R}, \text{ c.-à-d., si}$$

$$q(x) \in \text{vect}\{q_1(x), \ldots, q_m(x)\} \text{ et si}$$

$$L y_i = q_i \,,\; i = 1, \ldots, m, \text{ alors } y(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i\, y_i(x)$$

satisfait $L y = q$.

Remarque: voir aussi la série 4B, échauffement

1.5.2. Méthode de résolution

La procédure est analogue au cas des équations linéaires du premier ordre:

i) Méthode de résolution de l'équation homogène $Ly=0$

La solution est de la forme

$$\boxed{\{\forall C_1,C_2\in\mathbb{R},\ y_h(x) = C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x) \quad,\ x\in\mathbb{R}\}}$$

Pour trouver y_1 et y_2 on essaye $y(x)=e^{\lambda x}$ (ça marche car l'équation est à coefficients constants) que l'on substitue dans $Ly=ay''+by'+cy=0$ et on trouve

$$\boxed{e^{\lambda x}\underbrace{(a\cdot\lambda^2+b\lambda+c)}_{\overset{!}{=}0}\overset{!}{=}0 \quad \leftarrow \text{ équation charactéristique}}$$

<u>1</u>

1^{er} cas: $b^2-4ac>0$. Deux solutions réelles pour λ, $\lambda_1\neq\lambda_2$. La solution générale de l'équation homogène est

$$\boxed{\{\forall C_1,C_2\in\mathbb{R},\ y_h(x) = C_1\cdot\underbrace{e^{\lambda_1 x}}_{=y_1(x)} + C_2\underbrace{e^{\lambda_2 x}}_{=y_2(x)} \quad,\ x\in\mathbb{R}\}}$$

$2^{ème}$ cas: $b^2-4ac=0$. Seulement une solution réelle $\lambda\in\mathbb{R}$. La solution générale de l'équation homogène est (voir série 4B, Ex. 2 i) pour $y_2(x)$)

$$\boxed{\{\forall C_1,C_2\in\mathbb{R},\ y_h(x) = C_1\cdot\underbrace{e^{\lambda x}}_{=y_1(x)} + C_2\cdot\underbrace{x e^{\lambda x}}_{=y_2(x)},\ x\in\mathbb{R}\}}$$

$3^{ème}$ cas: $b^2-4ac<0$. Deux solutions complexes conjugés pour λ, $\lambda=\alpha+i\beta$ et $\bar{\lambda}=\alpha-i\beta$. La solution (rélle) générale de l'équation homogène est (voir série 4B, Ex 2 ii))

$$\boxed{\left\{\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R},\ y_h(x) = C_1 \underbrace{e^{\alpha x}\cos(\beta x)}_{=y_1(x)} + C_2 \underbrace{e^{\alpha x}\sin(\beta x)}_{=y_2(x)},\quad x \in \mathbb{R}\right\}}$$

ii) Recherche d'une solution particulière de l'équation inhomogène $Ly = q$.

a) Méthode de la variation des constantes

Soient $y_1(x)$ et $y_2(x)$ les deux solutions construites sous i). Alors on pose

$$y(x) = \boxed{C_1(x)\cdot y_1(x) + C_2(x)\, y_2(x)}_{(0)} \quad \Rightarrow$$

$$y'(x) = \boxed{C_1'(x)\, y_1(x) + C_2'(x)\cdot y_2(x)}_{(1)}$$

on impose $\overset{!}{\underset{}{\overset{\shortparallel}{0}}} + \boxed{C_1(x)\cdot y_1'(x) + C_2(x)\, y_2'(x)}_{(1)}$

$$y''(x) = \boxed{C_1'(x)\, y_1'(x) + C_2'(x)\, y_2'(x)}_{(2)}$$

$$+ \boxed{C_1(x)\, y_1''(x) + C_2(x)\, y_2''(x)}_{(2)}$$

On obtient

$$a\,\boxed{}_{(2)} + b\cdot\boxed{}_{(1)} + c\cdot\boxed{}_{(0)}$$

$$+ a\,\boxed{}_{(2)} = q(x).$$

$\Leftrightarrow$

$$\boxed{C_1(x)\underbrace{(a y_1'' + b y_1' + c y_1)}_{=0} + C_2(x)\underbrace{(a y_2'' + b y_2' + c y_2)}_{=0}}_{(2),(1),(0)}$$

car $Ly_1 = 0$ $\quad + a\,\boxed{}_{(2)} = q(x)$ $\quad$ car $Ly_2 = 0$

Donc on obtient :

$$\boxed{\begin{aligned} &○_{(1)} \rightarrow\ C_1'(x)\, y_1(x) + C_2'(x)\, y_2(x) = 0 \\ &○_{(2)} \rightarrow\ C_1'(x)\, y_1'(x) + C_2'(x)\, y_2'(x) = \frac{1}{a}\, q(x) \end{aligned}}$$

← le choix imposé

ou encore (écriture matricielle)

$$\boxed{\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{a}\, q(x) \end{pmatrix}}$$

apprendre par cœur

et on obtient (voir la remarque en bas)

$$\begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{a}\, q(x) \end{pmatrix}$$

↙ continue sur I

puis on intègre pour obtenir $C_1(x)$ et $C_2(x)$ et donc la solution particulière

$$\boxed{y_p(x) = C_1(x)\, y_1(x) + C_2(x)\, y_2(x) \quad , \quad x \in I}$$

iii) Solution générale du problème

Par la linéarité du problème la solution générale de l'équation (∗) est

$$\boxed{\left\{ \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R},\ y(x) = y_p(x) + C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x) \quad \text{avec } x \in I \right\}}$$

Remarque: la fonction

$$w(x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}$$

$$= y_1(x)\, y_2'(x) - y_1'(x)\, y_2(x)$$

est appelée le Wronskien des solutions y_1 et y_2. Il est non nul (pour tout x) puisque les solutions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ ne sont pas des multiples l'une de l'autre, c'est-à-dire puisque $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont linéairement indépendantes

⌜Démonstration: voir la série 4B, Ex. 3 ⌟

De retour à ii)

b) Méthode des coefficients indéterminés

Soit $q(x) \in \text{vect}\{q_i(x),\ i = 1 \dots m\}$

Cas résonants: (soit $r \in \mathbb{N}$)

1^er cas: $y_h(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Si $q_i(x) = x^r e^{\lambda x}$, $\lambda = \lambda_1$ ou $\lambda = \lambda_2$

Alors $y_{Pi}(x) \in \text{vect}\{x^{r+1} e^{\lambda x}, x^r e^{\lambda x}, \dots, x^1 e^{\lambda x}\}$.

2^ème cas: $y_h(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 \cdot x \cdot e^{\lambda x}$.

Si $q_i(x) = x^r e^{\lambda x}$

Alors $y_{P,i}(x) \in \text{vect}\{x^{r+2} e^{\lambda x}, \dots, x^2 e^{\lambda x}\}$.

3ème cas: $y_h(x) = C_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x}\sin(\beta x)$

Si $q_i(x) = x^r e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ ou $x^r e^{\alpha x}\sin(\beta x)$

Alors $y_{p,i}(x) \in \text{vect}\{x^{r+1}e^{\alpha x}\cos(\beta x), \dots, x^1 e^{\alpha x}\cos(\beta x),$

$x^{r+1}e^{\alpha x}\cos(\beta x), \dots, x^1 e^{\alpha x}\sin(\beta x)\}$

Cas non-résonant: (tous les autres cas, voir le tableau)

"$y_{p,i}(x) \in \text{vect}\{q_i(x), q_i'(x), \dots \}$"

Soit $r \in \mathbb{N}$, $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}^*$ (cas non-résonants):

fonction $q_i(x)$ $\longrightarrow$	fonctions dans $y_{p,i}(x)$
x^r	$\{x^r, x^{r-1}, \dots, x, 1\}$
$x^r e^{\lambda x}$	$\{x^r e^{\lambda x}, \dots, x e^{\lambda x}, e^{\lambda x}\}$
$x^r \sin(\beta x) e^{\alpha x}$ ou $x^r \cos(\beta x) e^{\alpha x}$	$\{x^r \sin(\beta x) e^{\alpha x}, \dots, \sin(\beta x) e^{\alpha x},$ $x^r \cos(\beta x) e^{\alpha x}, \dots, \cos(\beta x) e^{\alpha x}\}$

1.5.3. Exemples

Voir les séries 3A, 4A

1.6. ED linéaires du deuxième ordre (à coefficients variables)

1.6.1. Equations homogènes

C'est une équation de la forme

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0 \qquad (*)$$

avec p et q des fonctions continues sur un intervalle I.

Il n'existe aucune méthode de résolution générale !

<u>Réduction de l'ordre</u>: si on connaît une solution non nulle $y_1(x)$ de $(*)$ sur I on pose:

$$y(x) = U(x)\cdot y_1(x) \qquad (**)$$

où $U(x)$ est une primitive d'une nouvelle fonction inconnue $u(x)$.

En substituant $(**)$ dans l'équation $(*)$ on trouve: (voir série 4B, Ex. 1)

$$y_1(x)\,u'(x) + \left(2y_1'(x) + p(x)\,y_1(x)\right)u(x) = 0 \quad \text{sur } I$$

ce qui est une ED linéaire homogène du premier ordre que l'on sait résoudre (par séparation des variables) pour trouver $u(x)$ $(\neq 0)$, puis on détermine une primitive $U(x)$ de $u(x)$. pour obtenir une deuxième solution $y_2(x) = U(x)\cdot y_1(x)$ linéairement indépendante de $y_1(x)$.

1.6.2. Equations inhomogènes

C'est une équation de la forme

$$\boxed{y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = f(x) \qquad (*)}$$

avec p, q et f continues sur un intervalle I.

i) soient y_1 et y_2 (les) deux solutions linéairement indépendantes du problème homogène associé à $(*)$.

ii) la méthode de la variation des constantes marche exactement comme pour le cas des coëfficients constants (voir 1.5.2.). On pose

$$y_p(x) = C_1(x)\, y_1(x) + C_2(x)\, y_2(x)$$

avec $C_1(x)$ et $C_2(x)$ solution de

$$\boxed{\begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}}$$

Voir le chapitre 1.4.2 pour les détails

iii) la solution générale est de la forme

$$\boxed{\left\{ \forall C_1, C_2 \,,\quad y(x) = y_p(x) + \underbrace{C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x)}_{\equiv y_h(x)} \,,\quad x \in I \right\}}$$

1.7. Autres équations du deuxième ordre

1.7.1. Équations indépendantes de y (série 5B, Ex 2)

Soit l'équation

$$E(x, y', y'') = 0 \qquad (*)$$

On pose $u = y'$ et on obtient l'équation du premier ordre

$$E(x, u, u') = 0 \qquad (**)$$

et toute primitive d'une solution de $(**)$ est une solution de $(*)$

1.7.2. Equations indépendantes de x (série B4, Ex 3)

Soit l'équation

$$E(y, y', y'') = 0. \qquad (*)$$

On pose

$$y'(x) = u(y(x))$$

avec u une nouvelle fonction inconnue.
On a

$$y''(x) = u'(y(x))y'(x)$$
$$= u'(y(x))\, u(y(x))$$

En substituand dans (*) on obtient

$$E(y, u(y), u'(y)\,u(y)) = 0,$$

ou encore, en considérand y comme variable idépendante

$$E(y, u, u'u) = 0 \qquad (**)$$

Donné une solution $u(y)$ de (**), on revient à (mais la fonction u est maintenant connue)

$$y' = u(y)$$

que l'on peut résoudre par séparation des variables.

1.7.3. Equations indépendantes de x et y (série 4B Ex 4)

Soit l'équation.

$$y'' = f(y') \qquad (*)$$

On peut traiter (*) avec les méthodes vues dans les paragraphes 1.7.1 et 1.7.2. ou par la méthode suivante. Soit

$$y' = u \qquad (**_1)$$

alors on a de (*)

$$u' = f(u). \qquad (**_2)$$

séparation des variables:

$(**_2)$ donne $dx = \frac{du}{f(u)}$. et.

$(**_1)$ donne $dy = u\,dx = \frac{u\,du}{f(u)}$ $\lrcorner$

La solution générale est donnée sous forme paramétrique par.

$\{ \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R},$

$$x = \int \frac{du}{f(u)} + C_1$$

$$y = \int \frac{u\,du}{f(u)} + C_2.$$

avec $u \in I$ (à trouver) $\}$.

1.8. ED linéaires à coëfficients constants d'ordre supérieur

Soit l'ED

$$\boxed{a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = q(x) \qquad (*)}$$

$a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$, $a_n \in \mathbb{R}^*$, $q(x)$ une fonction continue sur un intervalle I.

i) résolution de l'équation homogène (associée à $(*)$)

On essaye $y(x) = e^{\lambda x}$ et on trouve que nécessairement

$$\boxed{a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0}$$

$$\Leftrightarrow \quad a_n (\lambda - \lambda_1)^{p_1} (\lambda - \lambda_2)^{p_2} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_m)^{p_m} = 0$$

avec $1 \leqslant m \leqslant n$, $p_i \geqslant 1$, $i = 1 \dots m$, $p_1 + \dots + p_m = n$ et $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$ (voir la série 4B Ex. 2ii) pour le cas $\lambda \in \mathbb{C}$)

La solution générale du problème homogène est

$$\boxed{y_h(x) = P_1(x) \cdot e^{\lambda_1 x} + \dots + P_m(x) e^{\lambda_m x}, \quad x \in \mathbb{R}}$$

avec P_i, $i = 1, \dots, m$ des polynômes de degré $p_i - 1$:

$$P_1(x) e^{\lambda_1 x} = C_1 \underbrace{e^{\lambda_1 x}}_{= y_1(x)} + C_2 \underbrace{x e^{\lambda_1 x}}_{= y_2(x)} + \dots + C_{p_1} \underbrace{x^{p_1 - 1} e^{\lambda_1 x}}_{= y_{p_1}(x)}$$

$$\vdots$$

$$P_m(x) e^{\lambda_m (x)} = C_{n - p_m + 1} \underbrace{e^{\lambda_m x}}_{= y_{n - p_m + 1}(x)} + \dots + C_n \underbrace{x^{p_m - 1} e^{\lambda_m x}}_{= y_n(x)}$$

Dans le cas où $m = n$ on a $P_i(x) = C_i$, $i = 1 .. n$, avec $C_i \in \mathbb{R}$ (voir la série 4B, Ex 2ii) pour le cas $\lambda \in \mathbb{C}$)

$$\boxed{y_h(x) = C_1 \cdot \underbrace{e^{\lambda_1 x}}_{=y_1(x)} + \dots + C_n \underbrace{e^{\lambda_n x}}_{=y_n(x)} \;, \; x \in \mathbb{R}}$$

ii) – la méthode de la variation des constantes se généralise. On a que $y_p(x) = C_1(x) y_1(x) + \dots + C_n(x) y_n(x)$ avec $C_1(x), \dots, C_n(x)$ solutions de:

$$\begin{pmatrix} C_1'(x) \\ \vdots \\ \vdots \\ C_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & & y_n'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{a_n} \cdot q(x) \end{pmatrix}$$

– la méthode des coefficients indéterminés se généralise (voir la série 4 pour des exemples)

iii) la solution générale est de la forme

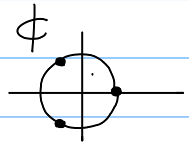
$$\boxed{\{\forall C_1, .., C_n \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}) \; y(x) = y_p(x) + y_h(x) \;, \; x \in I\}}$$

trouvé sous ii)   trouvé sous i)

Exemple (voir aussi 1.5.2 et la série 4B)

$$y''' - y = 2x^3 = q(x) \;, \quad I = \mathbb{R}$$

i) $\lambda^3 - 1 = 0$



$\lambda_1 = 1$

$\lambda_2 = \overline{\lambda_3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \alpha + i\beta$

$$\boxed{y_h(x) = C_1 \cdot e^{x} + C_2 \, e^{-\frac{1}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_3 \, e^{-\frac{1}{2}x} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)}$$

ii) $q(x)$ n'est pas résonnant (pas de la forme $x^r q_0(x)$, avec $r \in \mathbb{N}$ et $q_0(x)$ solution de l'équation homogène. Par conséquence $y_p(x) \in \text{vect}\{q(x), q'(x), \dots\}$:

$$y_p(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D \quad , \quad A, B, C, D \in \mathbb{R}$$

$$y_p'''(x) = 6A$$

$$\begin{array}{llcl}
x^3 : & \overset{\text{zéro}}{0} - A = 2 & \Rightarrow & A = -2 \\
x^2 : & 0 - B = 0 & \Rightarrow & B = 0 \\
x : & 0 - C = 0 & \Rightarrow & C = 0 \\
1 : & 6A - D = 0 & \Rightarrow & D = 6A = -12
\end{array}$$

Donc $\boxed{y_p(x) = -2x^3 - 12}$

iii) la solution générale du problème est

$$\boxed{\{\forall C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R} \; , \; y(x) = y_p(x) + y_h(x) \quad , \; x \in \mathbb{R}\}.}$$

1.9. Solutions qualitatives, méthode des isoclines

Soit une ED du premier ordre. On suppose que l'on puisse l'écrire sous la forme (isoler y'):

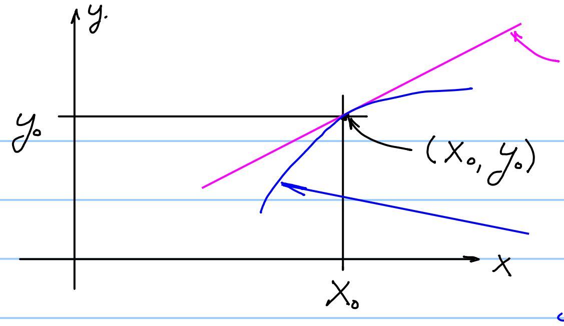
$$\boxed{y' = f(x,y) \qquad \text{pour une fonction } f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}}$$

Exemples: $f(x,y) = y \, , \; y^2 , \ldots$ (revoir tous les exemples)

Interprétation géométrique de $y' = f(x,y)$

En chaque point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ on connait $f(x_0, y_0)$ et donc la dérivée $y'(x_0)$ de toute solution $y(x)$ qui satisfait la condition initiale $y(x_0) = y_0$, car on a

$$y'(x_0) = f(x_0, y(x_0)) = f(x_0, y_0)$$

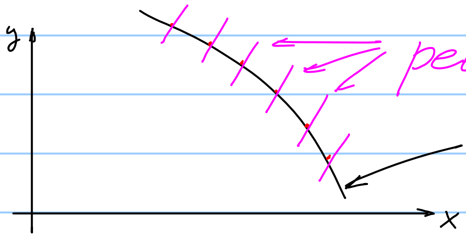


droite de pente $f(x_0, y_0)$ qui passe par le point (x_0, y_0).

exemple du graphe d'une solution $y(x)$ de l'équation qui passe par (x_0, y_0). La droite rouge est tangente au graphe de $y(x)$ en (x_0, y_0).

Méthode des isoclines

On considère les points $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x,y) = c$, pour c donné. Nous verrons dans la suite que ceci correspond souvent, pour chaque valeur de c, à un ensemble de courbes :

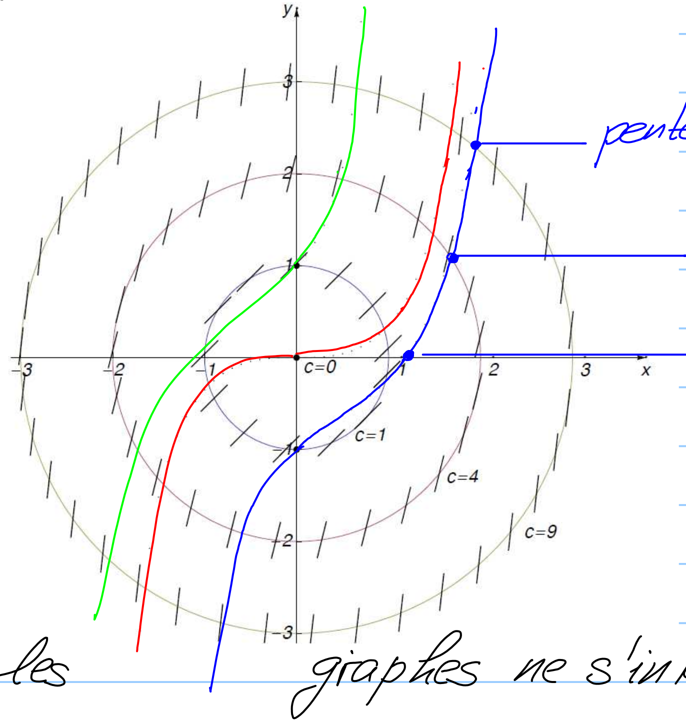


petits segments de pente c

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = c\}$ = isocline de f pour c.

Une solution de l'ED qui coupe une isocline de f pour c doit avoir une tangente de pente c en ce point.

Exemple: $y' = x^2 + y^2 = f(x,y)$ (eq. de Riccati)



pente = 9 en ce point

pente = 4 en ce point

pente = 1 en ce point.

Remarque: les graphes ne s'intersectent pas !

1.10 Théorème d'existence et d'unicité

Théorème: Soit le problème de Cauchy

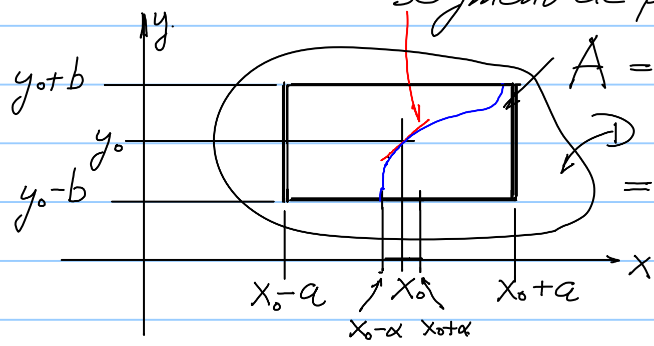
$$(*) \begin{cases} y' = f(x,y) \,, \quad f: D \to \mathbb{R}, \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ ouvert, $(x_0, y_0) \in D$.

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ continue sur } D \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \text{ continue sur } D \end{array}\right\} \text{voir les chapitres à suivre}$$

fonction dérivée partielle de f par rapport à y : à définir dans les chapitres à suivre

ségment de pente $f(x_0,y_0)$



$$A = \{(x,y) \in D \,,\ |x - x_0| \leq a \,,\ |y - y_0| \leq b\}$$
$= $ rectangle fermé.

$$M = \max_{(x,y) \in A} |f(x,y)|$$

Alors il existe exactement une fonction $y(x)$ continue sur $[x_0-\alpha, x_0+\alpha]$ et continûment dérivable sur $I =]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$ solution de $(*)$ sur I. où $\alpha = \min\{a, \frac{b}{M}\}$

Remarque: puisque A est fermé, la condition que f et $\frac{\partial f}{\partial y}$ soient des fonctions continues implique que f et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont bornées sur A. (voir les chapitres à suivre).

Remarque: le théorème s'applique à $(x_0', y_0') \in D$ arbitraire

Démonstration (idée de base):

(*) est équivalent à :

$$\boxed{y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))\, d\xi}$$

On pose $y_0(x) \equiv y_0$ et puis, pour $n = 1, 2, \dots$

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y_{n-1}(\xi))\, d\xi$$

puis on montre que la suite des fonctions y_n converge sur l'intervalle $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ dans l'espace vectoriel des fonctions $C^0([x_0-\alpha, x_0+\alpha])$ équipé de la norme $\| \ \|_\infty$ (voir plus loin dans le cours, c'est un espace de Banach) par le théorème de l'application contractante (théorème de point fixe de Banach).

Exemple $(m=1)$

$$\left.\begin{array}{l} y' = y \quad (= f(x,y)) \\ x_0 = 0 \ , \ y(0) = y_0 = 1 \end{array}\right\} \text{ solution: } y(x) = e^x.$$

Avec le théorème:

$$y_0(x) = 1$$

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x f(\xi, y_0(\xi))\, d\xi = 1 + \int_0^x 1\, d\xi = 1 + x$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x f(\xi, y_1(\xi))\, d\xi = 1 + \int_0^x (1+\xi)\, d\xi$$

$$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2$$

$$y_3(x) = 1 + \int_0^x f(\xi, y_2(\xi))\, d\xi = 1 + \int_0^x \left(1 + \xi + \tfrac{1}{2}\xi^2\right) d\xi.$$

$$= 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3!}x^3$$

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k \xrightarrow[n\to\infty]{} e^x = y(x).$$

convergence uniforme sur $[-\alpha, \alpha]$ avec $\alpha > 0$ arbitraire.

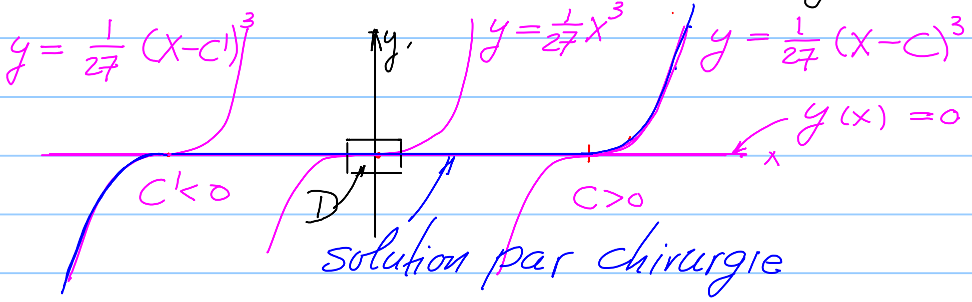
Contre-exemple: (seulement f continue ne suffit pas).

$$y' = |y|^{\frac{2}{3}} = f(x,y) \qquad (\text{continue sur } D = \mathbb{R}^2)$$

$y(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$ est une solution

$y(x) = \frac{1}{27}(x-c)^3$, $x \in \mathbb{R}$, est une solution pour tout $c \in \mathbb{R}$.

La condition initiale $y(0) = 0$ ne sélectionne donc pas une solution unique, car $y(x) = 0$ et $y(x) = \frac{1}{27}x^3$ sont les deux des solutions qui satisfont $y(0) = 0$. Pire encore : il existe une infinité de solutions telles que $y(0) = 0$ qui peuvent être construite par "chirurgie" :



<u>Solutions par chirurgie:</u> $y(x) = \begin{cases} \frac{1}{27}(x-c)^3, & x > c > 0 \\ \frac{1}{27}(x-c')^3, & x < c' < 0 \\ 0 & , c' \leq x \leq c \end{cases}$

où les choix de $c' < 0$ et $c > 0$ sont arbitraires.

<u>Explication:</u>
Le théorème d'existence et d'unicité ne s'applique pas en $(0,0)$ car la fonction $f(x,y) = |y|^{\frac{2}{3}}$ (vue comme fonction de y) n'est pas différentiable en $(0,0)$.

<u>Remarque:</u> f continue suffit pour démontrer l'existence d'une solution (Théorème de Peano)

2. L'espace $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, rappels, définitions, notations

prérequis

Analyse I :
- produit cartésien d'ensembles
- intervalles ouverts, fermés, etc.
- suites numériques, sous-suites, B W
- suites de Cauchy
- définition de la limite
- définition de la continuité
- définition de la dérivabilité

Algèbre linéaire :
- espace vectoriel
- produit scalaire
- définition d'une norme

2.0. $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ comme ensemble (voir analyse I)

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R} \quad , \ n \text{ facteurs} \quad , \ \times = \text{produit cartésien}$$
$$= \{(x_1, \ldots, x_n) \ : \ x_i \in \mathbb{R} \ , \ i = 1, \ldots, n\}$$

n-tuples

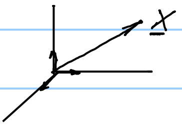
Notations: $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ un point de $\mathbb{R}^n$

pour $n = 2$: $\underline{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$
pour $n = 3$: $\underline{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Si aucune confusion n'est possible on écrira aussi simplement $x \in \mathbb{R}^n$ au lieu de $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$.

2.1. $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ comme espace vectoriel (voir algèbre linéaire)

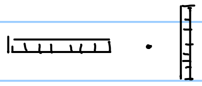
Notation: $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\underline{x}$ un vecteur
$x_i \in \mathbb{R}$ ses coordonnées



souvent on écrira juste x au lieu de $\underline{x}$.

$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$, $\langle \, , \, \rangle$ un produit scalaire (voir la série 6B pour le cas général)

$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \underline{x}^T \cdot \underline{y}$



(produit des "matrices")

2.2. $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) est un espace vectoriel normé

La fonction $\| \_ \| : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\|\underline{x}\| := \sqrt{\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

est une norme sur $\mathbb{R}^n$ (= longeur du vecteur $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$)

Remarque: pour $n=1$ c'est simplement la fonction valeur absolue.

Propriétés (définition d'une norme)

i) $\|\underline{x}\| \geq 0$, $\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\|\underline{x}\| = 0 \Leftrightarrow \underline{x} = \overset{\text{vecteur zéro}}{\underline{0}}$

ii) $\|\lambda \underline{x}\| = |\lambda| \cdot \|\underline{x}\|$, $\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$

iii) inégalité triangulaire: $\|\underline{x} + \underline{y}\| \leq \|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|$, $\forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$

[iv) inégalité triangulaire inverse: $\|\underline{x} - \underline{y}\| \geq \big| \|\underline{x}\| - \|\underline{y}\| \big|$, $\forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$]

car iii) $\Rightarrow$ iv)

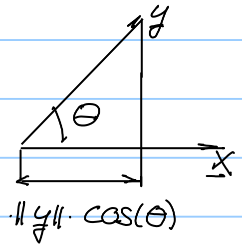
Inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle| \leq \|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\|$$

Démonstration: voir la série 6B

Interprétation géometrique

$$\boxed{\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\| \cdot \cos(\theta)}$$



Distance entre deux points de $\mathbb{R}^n$

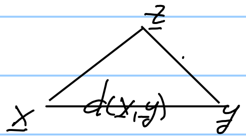
$$d(\underline{x}, \underline{y}) := \|\underline{x} - \underline{y}\|$$

Propriétés (définition d'une distance, $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$)

i) $d(\underline{x}, \underline{y}) \geq 0$, $\forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$ et $d(\underline{x}, \underline{y}) = 0 \Leftrightarrow \underline{x} = \underline{y}$

ii) $d(\underline{x}, \underline{y}) = d(\underline{y}, \underline{x})$, $\forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$

iii) inégalité triangulaire



$$d(\underline{x}, \underline{y}) \leq d(\underline{x}, \underline{z}) + d(\underline{z}, \underline{y}) \quad , \forall \underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in \mathbb{R}^n$$

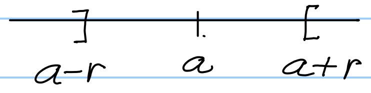
2.3. Sousensembles de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$

Définition: soit $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$. L'ensemble

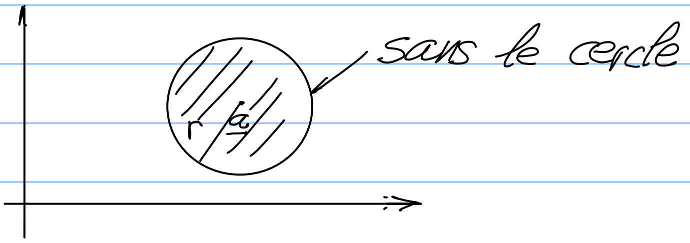
$$B(\underline{a}, r) := \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n : d(\underline{x}, \underline{a}) < r \}$$

est appelée "boule ouverte de centre $\underline{a}$ et rayon r."

$n = 1$:

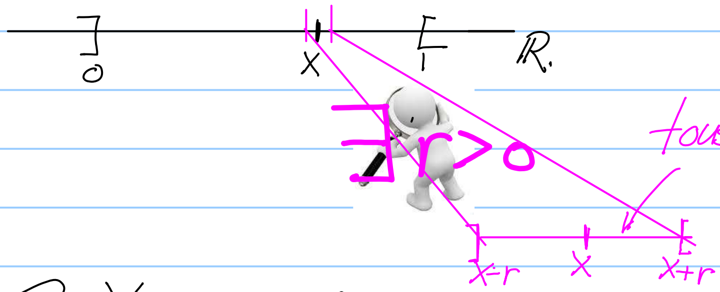


$n = 2$:



Définition: un sousensemble $X \subset \mathbb{R}^n$ est dit ouvert, si $\forall \underline{x} \in X$, $\exists\, r > 0$, tel que $B(\underline{x}, r) \subset X$.

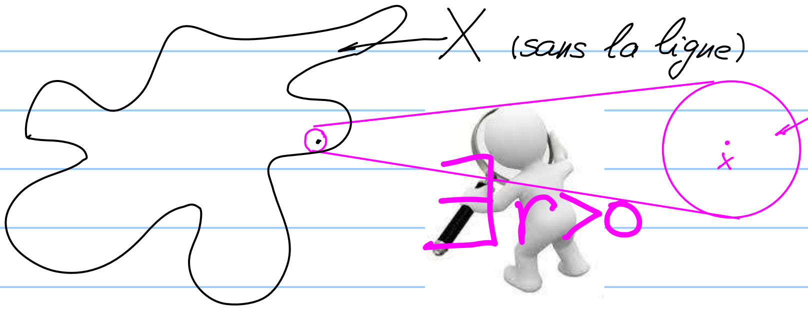
$n=1$: $X =]0,1[\subset \mathbb{R}$ est un sousensemble ouvert de $\mathbb{R}$



tous ces points $\in X$

$$\begin{cases} r = \frac{1-x}{2}, & x \geq \frac{1}{2}. \\ r = \frac{x}{2}, & x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$n=2$:



X (sans la ligne)

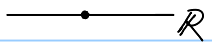
$B(x,r) \subset X$ pour un $r>0$ suffisamment petit

Remarque: $B(\underline{a}, r)$ est un sousensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$.

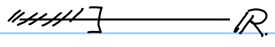
Remarque: $X = \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^n$ est un sousensemble ouvert.

Définition: un ensemble $X \subset \mathbb{R}^n$ est dit fermé si l'ensemble $X^c \equiv \mathbb{R}^n \setminus X$ est ouvert.

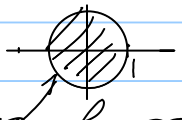
Exemples: $X = [0,0] = \{0\} \subset \mathbb{R}$



$X =]-\infty, 0] \equiv \mathbb{R} \setminus]0, \infty[$



$X = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 : d(\underline{x}, 0) \leq 1\}$



avec le cercle

Définition: l'intérieur $\mathring{X} \subset X \subset \mathbb{R}^n$ est le plus grand sousensemble ouvert contenu dans X, c.-à-d. si $Y \subset X$, Y ouvert, alors $Y \subset \mathring{X}$.

Exemple: $X = [0,1[$, $\mathring{X} =]0,1[$

Définition: l'adhérence $\overline{X} \supset X$, $X \subset \mathbb{R}^n$ est le plus petit sousensemble fermé qui contient X, c.-à-d. si $Y \supset X$, Y fermé, alors $Y \supset \overline{X}$

Exemple: $X = [0,1[$, $\overline{X} = [0,1]$

Identités: $\overline{X} = \left(\left(X^c\right)^{\circ}\right)^c$, tout $X \subset \mathbb{R}^n$.

$X = \mathring{X} \iff X$ ouvert

$X = \overline{X} \iff X$ fermé

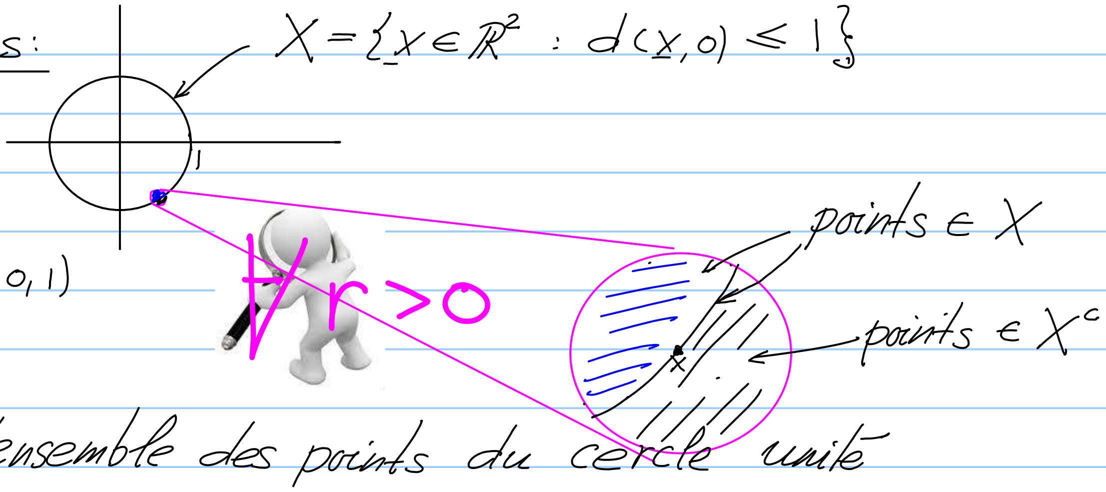
Remarque: pour éviter des contradictions, $\mathbb{R}^n$ ainsi que ϕ (l'ensemble vide) sont des sous-ensembles à la fois ouverts <u>et</u> fermés de $\mathbb{R}^n$.

Définition: $\partial X := \overline{X} \setminus \mathring{X}$ est appelé le bord de l'ensemble X.

Remarque:

$$\partial X \equiv \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : \forall r>0,\ B(\underline{x},r) \cap X \neq \phi,\ B(\underline{x},r) \cap X^c \neq \phi\}$$

Exemples: $X = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 : d(\underline{x},0) \leq 1\}$



$\mathring{X} = B(0,1)$

$\overline{X} = X$

∂X = l'ensemble des points du cercle unité

$X = \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\mathring{\mathbb{Q}} = \phi$, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} = \partial \mathbb{Q}$

$X = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\mathring{X} = \phi$, $\overline{X} = \mathbb{R} = \partial X$

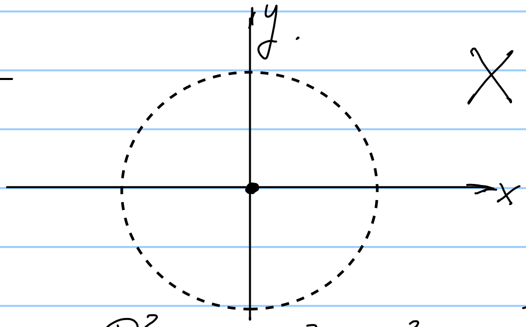
Definition $x \in X$ est appelé un point isolé s'il existe $r>0$ tel que $B(x,r) \cap X = \{x\}$.

Remarque: les points isolés de $X \subset \mathbb{R}^n$ sont un sousensemble (au plus dénombrable) de ∂X.

Attention: les points isolés sont par définition des éléments de X, par contre les autres éléments de ∂X ne le sont pas forcément !

Definition $x \in \overline{X} \setminus \{$les points isolés de $X\}$ est appelé un point d'accumulation de X

Exemple



(voir aussi la série 6B)

$$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2>1\} \cup \{(0,0)\}$$

$$\mathring{X} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2>1\}$$

$$\overline{X} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \geq 1\} \cup \{(0,0)\}$$

$$\partial X = \overline{X} \setminus \mathring{X} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\} \cup \{(0,0)\}$$

$(0,0) \in \partial X \cap X$ est un point isolé

l'ensemble des points d'accumulation de X est

$$\overline{X} \setminus \{(0,0)\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \geq 1\}.$$

Remarque (ensembles ouverts)

- une réunion quelconque de sousensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$ est un sousensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$
- une intersection finie de sous-ensembles ouvert de $\mathbb{R}^n$ est un sousensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$

voir la série 7B pour les détails

D'une manière analogue on a (utiliser la série 1B)

- une intersection quelconque de sous-ensembles fermés de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$
- une union finie de sous-ensembles fermés de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$

2.4. Suites dans $\mathbb{R}^n$

Définition: on appelle suite de points de $\mathbb{R}^n$ (ou suite dans $\mathbb{R}^n$) toute application $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^n$

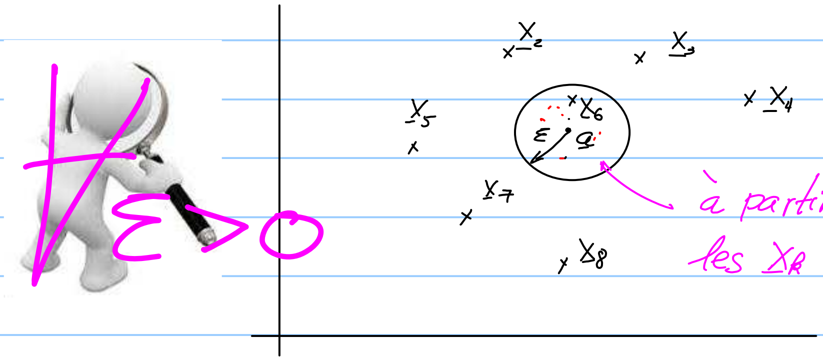
Notation (pour les suites): on pose $\underline{x}_k = f(k)$ et on écrit $(\underline{x}_k)_{k \geq 0}$ ou encore $\underline{x}_0, \underline{x}_1, \ldots$ pour les suites

Définition: une suite $(\underline{x}_k)_{k \geq 0}$ dans $\mathbb{R}^n$ est convergente et admet pour limite (ou converge vers) $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$, et l'on écrit

$$\lim_{k \to \infty} \underline{x}_k = \underline{a},$$

si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq k_0$ on a que $\underline{x}_k \in B(\underline{a}, \varepsilon)$ c.-à-d. $d(\underline{x}_k, \underline{a}) = \| \underline{x}_k - \underline{a} \| < \varepsilon$.

Illustration



à partir d'un certain k_0 tous les x_k sont dans $B(\underline{a}, \varepsilon)$.

Définition: une suite $(\underline{x}_k)_{k \geq 0}$ dans $\mathbb{R}^n$ est bornée, s'il existe $C > 0$, tel que pour tout $k \geq 0$ $\underline{x}_k \in B(0, C)$ ($\Leftrightarrow d(0, \underline{x}_k) < C \Leftrightarrow \|\underline{x}_k\| < C$)

Autres notions identiques à Analyse I

- définition d'une suite divergente
- définition d'une suite de Cauchy
- sous-suites, Théorème de B.W. (Bolzano-Weierstrass)
- le fait que $\mathbb{R}^n$ est complet (toute suite de Cauchy d'éléments de $\mathbb{R}^n$ converge vers un élément de $\mathbb{R}^n$) ($\mathbb{Q}^n$ n'est pas complet)
- $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel normé complet
  = espace de Banach

Théorème: une suite $(\underline{x}_k)$, $\underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.

⌈ Démonstration : voir la série 7B ⌋

Théorème: (Bolzano-Weierstrass pour $\mathbb{R}^n$)

Soit $(\underline{x}_k)_{k\geq 0}$ une suite bornée dans $\mathbb{R}^n$. Alors il existe une sous-suite $(\underline{x}_{k_j})_{j\geq 0}$ qui est convergente.

⌈ Démonstration: voir la série 7B ⌋

2.5. Continuité des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$

Définition (limite = limite épointée) Soit $f: D \to \mathbb{R}^m$ et $\underline{x}^*$ un point d'accumulation de $D \subset \mathbb{R}^n$. On dit que f admet pour limite (épointée) $\underline{\ell} \in \mathbb{R}^m$ lorsque $\underline{x}$ tend vers $\underline{x}^* \in \mathbb{R}^n$, si pour toute suite $(\underline{x}_k)_{k\geq 0}$, $\underline{x}_k \in D \setminus \{\underline{x}^*\}$ telle que $\lim\limits_{k\to\infty} \underline{x}_k = \underline{x}^*$ la suite $(\underline{y}_k)_{k\geq 0}$, $\underline{y}_k = f(\underline{x}_k)$ converge et $\lim\limits_{k\to\infty} \underline{y}_k = \underline{\ell}$ (le même ℓ pour toutes les suites!)

Notation $\lim_{\underline{x}\to\underline{x}^*} f(\underline{x}) = \ell$

$(\underline{x} \neq \underline{x}^*) \longleftarrow$ si on veut souligner que c'est la limite épointée

Définition: (continuité) une fonction $f : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$ est continue en $\underline{x}_0 \in D$, si $\underline{x}_0$ est est un point isolé de D, ou si

$$\lim_{\underline{x}\to\underline{x}_0} f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0)$$

(existence de la limite et égalité avec la valeur $f(\underline{x}_0)$)

2.6. Autres normes sur $\mathbb{R}^n$

Proposition: les fonctions $\|\_\|_p : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, définies pour $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $p \in [1, \infty[$ par

$$\|\underline{x}\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$$

et pour $p = \infty$ par

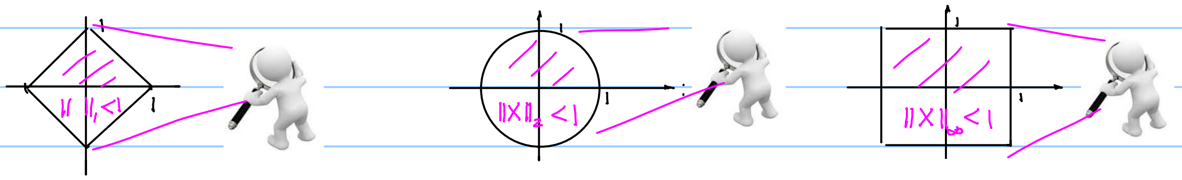
$$\|\underline{x}\|_\infty := \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$$

définissent des normes sur $\mathbb{R}^n$.

Démonstration: voir série 8B.

Notation: $\|\underline{x}\|_2 \equiv \|\underline{x}\|$ (la norme Euclidienne)

Illustration:



Boule ouverte centrée en zéro de rayon $r=1$, dans les normes $\| \|_1$, $\| \|_2$ et $\| \|_\infty$

Estimation d'une norme par une autre

$n=1$: $\|\underline{X}\|_2 = \|\underline{X}\|_\infty = \|\underline{X}\|_1$ même chose à chaque fois

$n=2$: soit $\underline{X} = (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

① $\|\underline{X}\|_1 = |x|+|y| = \sqrt{x^2+y^2+2|x||y|} \geqslant \sqrt{x^2+y^2} = \|\underline{X}\|_2$

② $\sqrt{2}\,\|\underline{X}\|_2 = \sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{2x^2+2y^2} = \sqrt{(|x|+|y|)^2+\underbrace{(|x|-|y|)^2}_{\geqslant 0}} \geqslant |x|+|y| = \|\underline{X}\|_1$

Donc : $\frac{1}{\sqrt{2}}\|\underline{X}\|_1 \overset{②}{\leqslant} \|\underline{X}\|_2 \overset{①}{\leqslant} \|\underline{X}\|_1$

$\left(\Longleftrightarrow \|\underline{X}\|_2 \overset{①}{\leqslant} \|\underline{X}\|_1 \overset{②}{\leqslant} \sqrt{2}\,\|\underline{X}\|_2 \right)$

Définition: deux normes $\| \|_a$ et $\| \|_b$ sur un espace vectoriel V sont dites équivalentes, s'il existe des constantes $C_1>0$ et $C_2>0$ telles que pour tout $\underline{X} \in V$
$C_1\|\underline{X}\|_a \leqslant \|\underline{X}\|_b \leqslant C_2\|\underline{X}\|_a$

Théorème: sur $\mathbb{R}^n$ toutes les normes sont équivalentes et en particulier, $\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|\underline{x}\|_1 \leq \|\underline{x}\|_2 \leq \|\underline{x}\|_1$$

$$\|\underline{x}\|_\infty \leq \|\underline{x}\|_2 \leq \sqrt{n}\, \|\underline{x}\|_\infty$$

Voir la série 8B

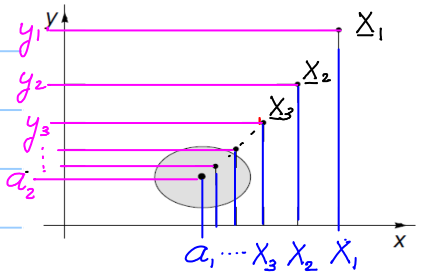
Proposition 2.6 soit $(\underline{x}_k)_{k \geq 0}$, $\underline{x}_k = (x_{k,1}, \dots, x_{k,n})$ une suite sur $\mathbb{R}^n$ et $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Alors:

$$\lim_{k \to \infty} \underline{x}_k = \underline{a} \iff \lim_{k \to \infty} x_{k,i} = a_i \quad , i = 1, \dots, n.$$

définie avec la norme Euclidienne: $\forall \varepsilon > 0, \exists k_0$, t.q. $\forall k \geq k_0$ $\|\underline{x}_k - \underline{a}\| \leq \varepsilon$.

convergence des suites des composantes

Illustration ($n = 2$, $\underline{x}_k = (x_k, y_k)$, $\underline{a} = (a_1, a_2)$).



Démonstration

"$\Rightarrow$" $$|x_{k,i} - a_i| \leq \max_i |x_{k,i} - a_i| = \|\underline{x}_k - \underline{a}\|_\infty \leq$$

$$\leq \|\underline{x}_k - \underline{a}\|_2 \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$$

"$\Leftarrow$" $$\|\underline{x}_k - \underline{a}\|_2 \leq \|\underline{x}_k - \underline{a}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{|x_{k,i} - a_i|}_{\xrightarrow[k \to \infty]{} 0,\ \forall i} \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$$

INTERMEZZO

Definition (continuité, $\varepsilon-\delta$)

Soit $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ et soit $\underline{x}^* \in \mathbb{R}^n$. Alors f est continue en $\underline{x}^* \in \mathbb{R}^n$, si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, t.q.

$$\left(\underline{x} \in \mathbb{R}^n, \|\underline{x} - \underline{x}^*\| \leq \delta\right) \Rightarrow \|f(\underline{x}) - f(\underline{x}^*)\| \leq \varepsilon$$

Remarques:

- f est continue en $\underline{x}^*$ indépendament du choix des normes dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$

- a priori on devrait écrire $0 < \|\underline{x} - \underline{x}^*\| \leq \delta$ (comme pour la limite épointée, mais ceci ne change pas la définition, car $f(\underline{x}) - f(\underline{x}^*) = 0$ si $\underline{x} = \underline{x}^*$ et l'implication donc trivialement satisfaite.

- on peut écrire $\ldots < \varepsilon$ et $\ldots < \delta$ au lieu de $\ldots \leq \varepsilon$ et $\ldots \leq \delta$, sans que ça change la définition (pourquoi ?).

Proposition Soit $\|.\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. Alors $\| \ \|$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}^n$.

Démonstration

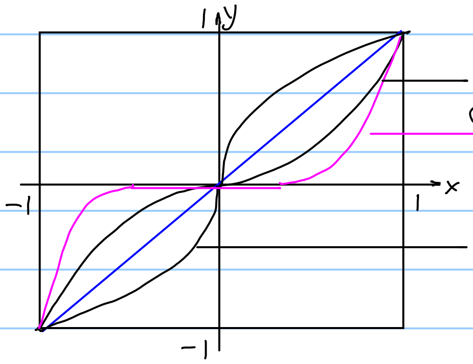
Soit $\underline{x}^* \in \mathbb{R}^n$. Alors $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta$, t.q.

$$\left(\underline{x} \in \mathbb{R}^n, \|\underline{x} - \underline{x}^*\| \leq \delta\right) \Rightarrow \left| \|\underline{x}\| - \|\underline{x}^*\| \right| \leq \varepsilon.$$

Car, avec $\delta = \varepsilon$. et la propriété iv) de la norme:

$$\big|\|\underline{x}\|-\|\underline{x}^*\|\big| \leq \|\underline{x}-\underline{x}^*\| \leq \delta=\varepsilon$$

Fonctions réciproques



$y=x^3$; fonction strictement monotone

fonction monotone.

$$y=\begin{cases} x^{\frac{1}{3}} & \text{si } x\geq 0 \\ -(-x)^{\frac{1}{3}} & \text{si } x<0 \end{cases}$$

$$f:\ [-1,1] \longrightarrow [-1,1] \equiv I$$

$$x \longmapsto f(x)=x^3$$

- continue sur I
- dérivable sur I
- continûment dérivable sur I
- monotone
- strictement monotone
- bijective
- $\exists f^{-1}$ (existence d'une fonction réciproque)
- f^{-1} continue sur I.
- f^{-1} n'est pas dérivable en $x=0$ (donc pas dérivable sur I)

Théorème (de la bijection)
Soient I_1 et I_2 deux intervalles fermés, et $f: I_1 \longrightarrow I_2$ une fonction continue, strictement monotone et surjective. Alors, f admet une fonction réciproque, $f^{-1}: I_2 \longrightarrow I_1$, et f^{-1} est une fonction continue.

$\ulcorner$ **Démonstration:** voir Analyse I $\lrcorner$

Théorème
Soient I_1, I_2 et f comme dans le théorème précédent. Si de plus f est continument dérivable sur I_1 et si $\forall x \in I_1$, $f'(x) \neq 0$, alors f^{-1} est continument dérivable sur I_2

$\ulcorner$ **Démonstration:** voir Analyse I $\lrcorner$

Remarques:

- $f: [-1,1] \longrightarrow [-1,1]$, définie par $f(x) = x^3$ satisfait les conditions du théorème de la bijection, mais pas celles du deuxième théorème car $f'(0) = 0$.

- l'exemple standard d'une fonction dérivable en tout point d'un intervalle fermé, mais qui n'est pas continument dérivable est

$$f: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

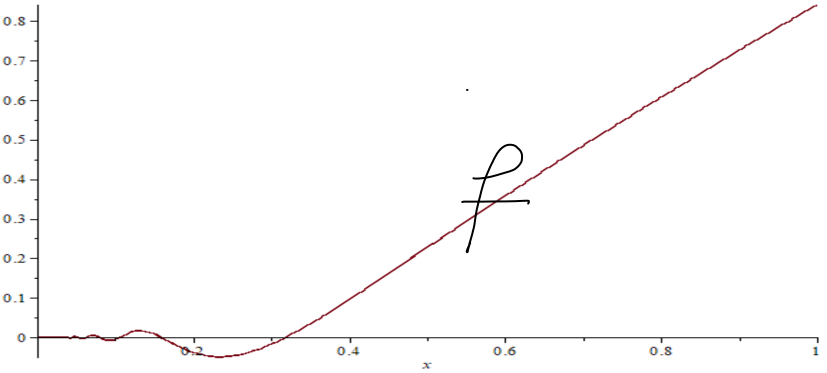
On trouve.

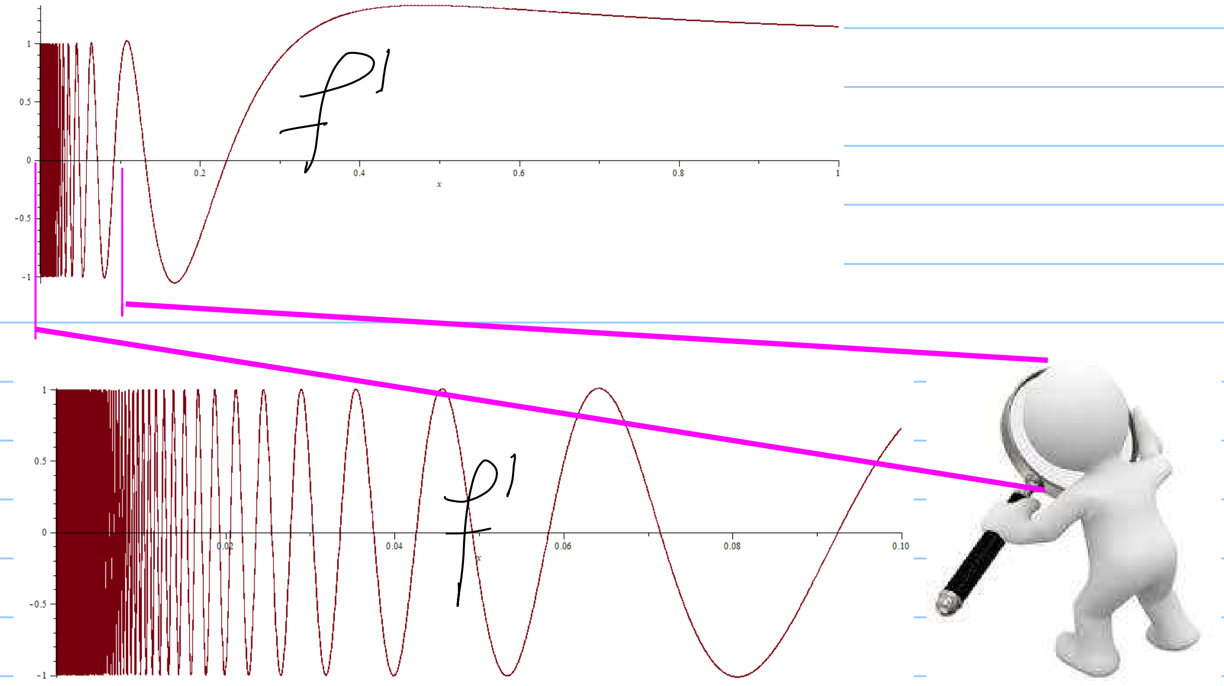
$f' : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \left(h \cdot \sin\left(\frac{1}{h}\right) \right) = 0$$

mais $\lim_{x \to 0^+} f'(x)$ n'existe pas.





INTERMEZZO

3. Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^m$

Notation: $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))^{\overset{\text{transposé}}{T}}$$

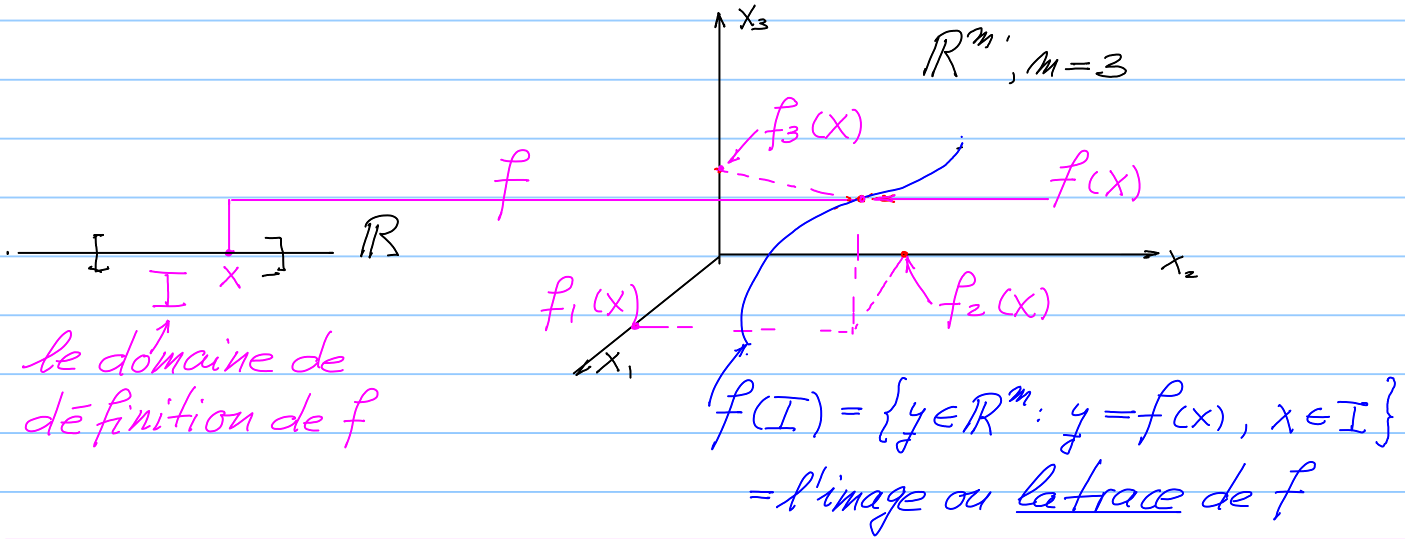
avec $f_i : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$ les composantes de f.

3.0. Fonctions continues

Définition: une fonction continue $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$, avec $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle (fermé) est appelée un chemin, ou une courbe paramétrée dans $\mathbb{R}^m$.

Remarque: la proposition 2.6 implique qu'une fonction $f = (f_1, \dots, f_m)^T$ est continue en un point $x \in I$ (ou sur I) si et seulement si les fonctions f_i, $i = 1 \dots m$, sont toutes continues en $x \in I$ (ou sur I).

Image d'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle



$f(I) = \{ y \in \mathbb{R}^m : y = f(x), x \in I \}$

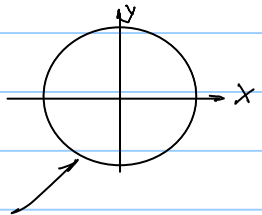
= l'image ou la trace de f

Définition: l'image de f s'appelle aussi la trace de f

Exemple 1 $f_1 : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$t \longmapsto (\cos(t), \sin(t))^T$

$f_2 : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$\longmapsto (\cos(2t), \sin(2t))^T$

$f_1 \neq f_2$ mais la trace de f_1 = la trace de f_2



trace(f_1) = trace(f_2)

Exemple 2

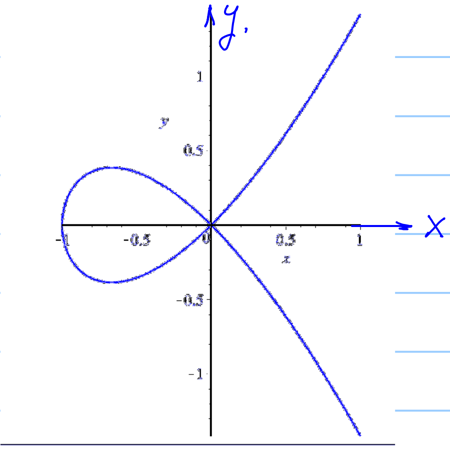
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$t \longmapsto f(t) = (t^2 - 1, t^3 - t)^T$

Trace de f ($\equiv$ image de f) $\subset \mathbb{R}^2$

$Im(f) = \{ (x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : (x,y)^T = f(t), t \in \mathbb{R} \}$

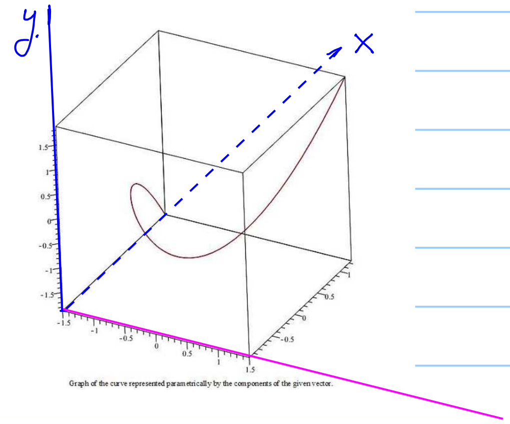
$\mathbb{R}^2$



Graphe (=graphique) de f $\subset \overbrace{\underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2}_{\substack{\ni \\ (t, (x,y)^T)}}}^{\substack{\mathbb{R}^3 \text{ isomorphe} \\ \updownarrow}}$ (noté $\Gamma(f)$)

On écrira $(t, x, y) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$.

$$T(f) = \{ (t, x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 : (x, y)^T = f(t) \}.$$



Graph of the curve represented parametrically by the components of the given vector.

voir maple00.mws.

Definition:

m est fixé

Soit $\mathcal{C} := \{$tous les chemins dans $\mathbb{R}^m\}$
Deux chemins $f_1 : I_1 \longrightarrow \mathbb{R}^m$ et $f_2 : I_2 \longrightarrow \mathbb{R}^m$ sont équivalentes, $f_1 \sim f_2$, s'il existe une fonction continue, strictement monotone et surjective $w : I_1 \longrightarrow I_2$, telle que $f_2(w(t_1)) = f_1(t_1)$

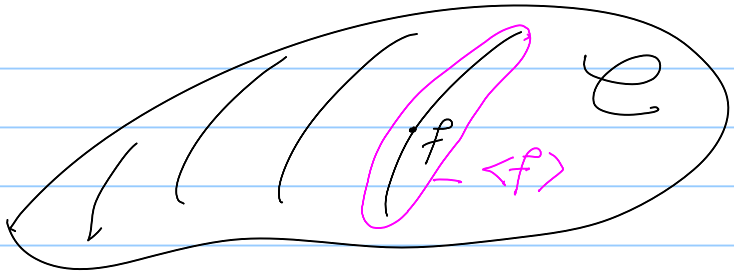
i) reflexive $f_1(t) = f_1(w(t))$ avec $w(t) = t$

ii) symetrique $f_2(w(t_1)) = f_1(t_1) \Leftrightarrow f_2(t_2) = f_1(w^{-1}(t_2))$

iii) transitive $f_2 \sim f_1$ avec w_1 et $f_3 \sim f_2$ avec w_2.

$$f_2(w_1(t_1)) = f(t_1) \quad , \quad f_3(w_2(t_2)) = f_2(t_2)$$

$\Rightarrow f_3(w_2(w_1(t_1))) = f_2(w_1(t_1)) = f(t_1)$, c-à-d $f_3 \sim f_1$



Définition : une classe d'équivalence de chemins est appelée une courbe continue, et on note $\langle f \rangle$ la classe d'équivalence qui contient f

Terminologie : soit γ une courbe continue. On appelle $f \in \gamma$ aussi une paramétrisation de la courbe continue γ

3.1. Fonctions dérivables (ou differentiables)

Définition (provisoire) :

"moins" entre deux vecteurs

$$f'(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad (*)$$

définition "usuelle" de la dérivée en un point

Proposition : soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle (fermé). Une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \dots, f_m)^T$, est dérivable en $x \in I$ (ou sur I) si et seulement si les fonctions f_i, $i = 1, \dots, m$ sont toutes dérivables en $x \in I$ (ou sur I)

Explication

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(f(x+h)-f(x))$$

par définition (*)

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f_1(x+h)-f_1(x)}{h}, \dots, \frac{f_m(x+h)-f_m(x)}{h}\right)^T$$

calcul dans l'espace vectoriel

$$= \left(\lim_{h\to 0}\frac{f_1(x+h)-f_1(x)}{h}, \dots, \lim_{h\to 0}\frac{f_m(x+h)-f_m(x)}{h}\right)^T$$

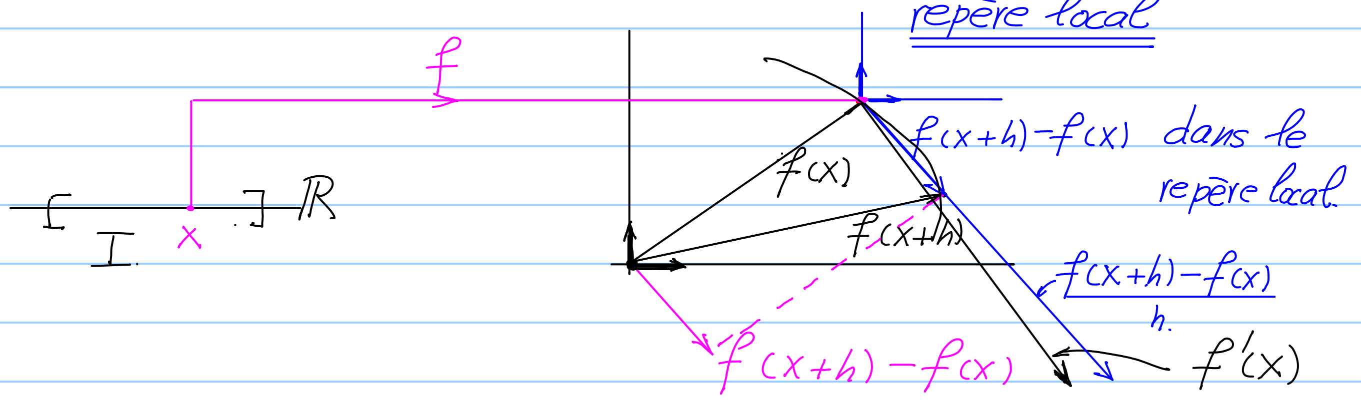
ceci est vrai par la proposition 2.6.

$$= \left(f_1'(x), \dots, f_m'(x)\right)^T$$

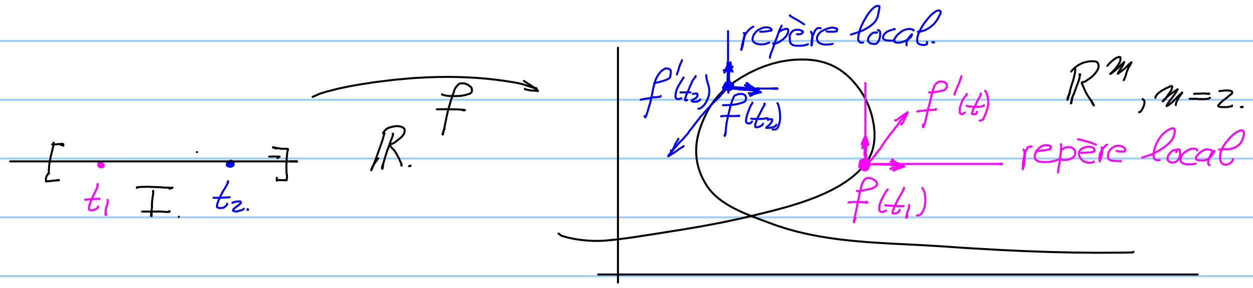
par la définition de la dérivée pour $f_1, \dots, f_m$.

Interprétation: si on interprète $t \equiv x$ comme le temps et $f(t)$ comme la position d'un objet dans $\mathbb{R}^m$ ($m=3$ par exemple), alors $f'(t)$ est le vecteur de la vitesse instantanée de l'objet au temps t

Graphiquement (calcul de la limite, $m=2$)



Remarque: graphiquement, pour illustrer $f'(t)$, on "attache" en $f(t) \in \mathbb{R}^m$ une copie (dite locale) de $\mathbb{R}^m$.



Longueur d'un chemin continûment dérivable

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $a<b$, un chemin continûment dérivable sur $[a,b]$ (c'est-à-dire $f = (f_1, \dots, f_m)^T$ avec $f_i : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continûment dérivables). Alors sa longueur $\ell \in \mathbb{R}$ est par définition:

on suppose f' continue

$$\ell := \int_a^b \| f'(t) \| \, dt$$

la norme Euclidienne

la norme est une fonction continue de $\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$

Remarque: comme sur l'ensemble des chemins continus on peut définir des classes d'équivalence sur l'ensemble des chemins continûment différentiables (demander que $\omega : I_1 \longrightarrow I_2$, qui définie l'équivalence soit de classe C^1 et tel que $\forall t_1 \in I_1$, $\omega'(t_1) \neq 0$). Les classes d'équivalence sont appelées courbes de classe C^1

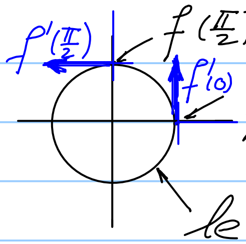
Remarque: soit γ une courbe de classe C^1. Alors

$$|\gamma| := \int_a^b \| f'(t) \| \, dt \qquad (\text{longueur de } \gamma)$$

avec $f \in \gamma$ une paramétrisation continûment différentiable quelconque. Différentes paramétrisations donnent la même longueur, car changer la paramétrisation de la courbe revient à faire un changement de variables dans l'intégrale (le vérifier !)

Exemples:

1) $I = [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}$, $r > 0$, $f(t) = (r \cdot \cos(t), r \cdot \sin(t))^T \in \mathbb{R}^2$



$f(\frac{\pi}{2}) = (0, r)^T$

$f(0) = (r \cdot \cos(0), r \cdot \sin(0))^T = (r, 0)^T$

le cercle de rayon r est la trace de f.

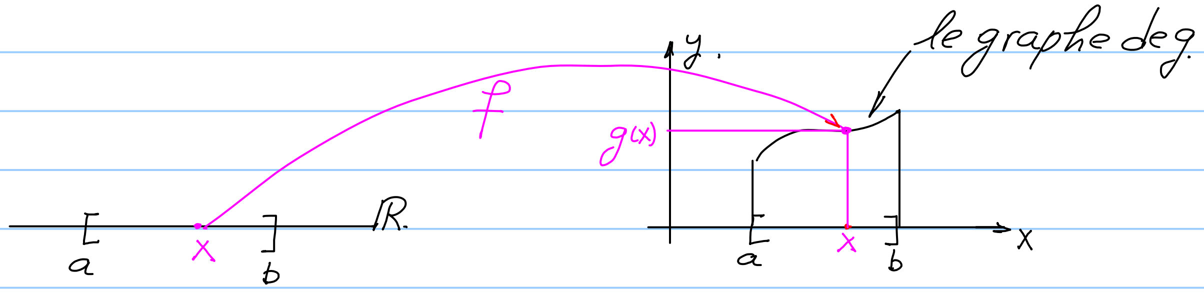
On a $f'(t) = (-r \sin(t), r \cos(t))^T$

Par exemple $f'(0) = (0, r)^T$ } voir le dessin (dans des
$f'(\frac{\pi}{2}) = (-r, 0)^T$ } repères locaux)

Puisque $\|f'(t)\| = \sqrt{(-r \sin(t))^2 + (r \cdot \cos(t))^2} = r$
on trouve pour la longueur du chemin

$$\ell = \int_0^{2\pi} \|f'(t)\| \, dt = \int_0^{2\pi} r \, dt = 2\pi r.$$

2) Soit $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $I = [a, b]$, $a < b$ une fonction continûment dérivable



Le graphe de g est aussi la trace du chemin

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$x \longmapsto (x, g(x))^T$$

On a $f'(x) = (1, g'(x))^T$ et $\|f'(x)\| = \sqrt{1 + g'(x)^2}$
La longueur du graphe de g est donc

$$\boxed{\ell = \int_a^b \sqrt{1 + g'(x)^2} \, dx}$$

longueur du graphe d'une fonction $g : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$

Paramétrisation par la longueur d'arc

Soit $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $a<b$, une paramétrisation continument dérivable d'une courbe γ de classe C^1 telle que $\forall t \in [a,b]$, $f'(t) \neq 0$, et soit la fonction $w:[a,b] \longrightarrow [0,|\gamma|]$ définie par

$$w(t) := \int_a^t \|f'(\tau)\|\, d\tau \quad (= \text{longeur parcourue au temps } t).$$

w est bijective et de classe C^1, et puisque $\forall t \in [a,b]$, $f'(t) \neq 0$ on a que $w'(t) = \|f'(t)\| \neq 0$, et la fonction réciproque $\sigma = w^{-1}$ est donc aussi de classe C^1 (voir le Intermezzo).

Définition: le chemin $c(s) = f(w^{-1}(s)) = f(\sigma(s))$, $s \in [0,|\gamma|]$ est appelé la paramétrisation canonique de la courbe γ. On a

$$c'(s) = f'(\sigma(s)) \cdot \sigma'(s) = f'(\sigma(s)) \frac{1}{w'(\sigma(s))} = \frac{1}{\|f'(\sigma(s))\|} f'(\sigma(s))$$

Définition: (intégrale curviligne)
Soit $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une paramétrisation continument differentiable d'une courbe γ de classe C^1 et soit $F:\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction continue. L'intégrale

$$W := \int_a^b \langle F(f(t)), f'(t) \rangle \, dt$$

↑ produit scalaire euclidien dans une copie locale de $\mathbb{R}^m$ en $f(t)$

est appelée intégrale curviligne de F le long de la courbe γ, et l'on écrit symboliquement

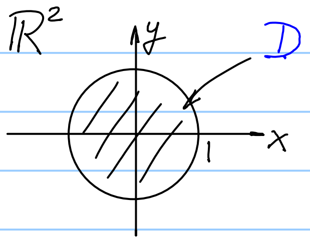
$$W = \int_\gamma F(\underline{r}) \cdot d\underline{r} \quad \text{(ou similaire).}$$

Remarque: W est indépendant de la paramétrisation

4. Fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$

4.1. Introduction, définitions, exemples $(n=2)$

Exemple 1



$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$$

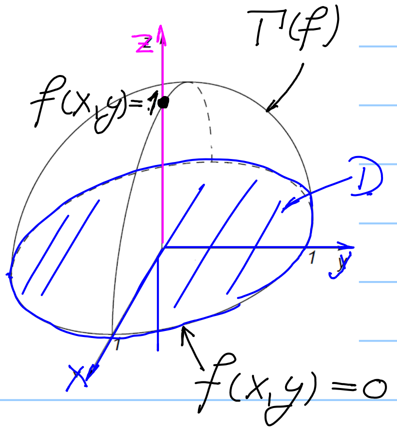
$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$$

$\mathrm{Im}(f) = [0,1]$ (voir le graphe $\Gamma(f)$)

$$\Gamma(f) = \{(x,y,z) \in D \times \mathbb{R} : z = f(x,y)\}$$

$f(x,y) = 0$, $\forall\, (x,y)$ t.q. $x^2+y^2=1$

$f(0,0) = 1$



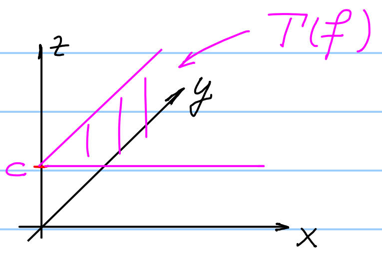
Exemple 2 (important ! voir série 5, échauffement)

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto f(x,y) = a \cdot x + b \cdot y + c$$, avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ donnés.

$$\Gamma(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} : z = f(x,y)\}$$

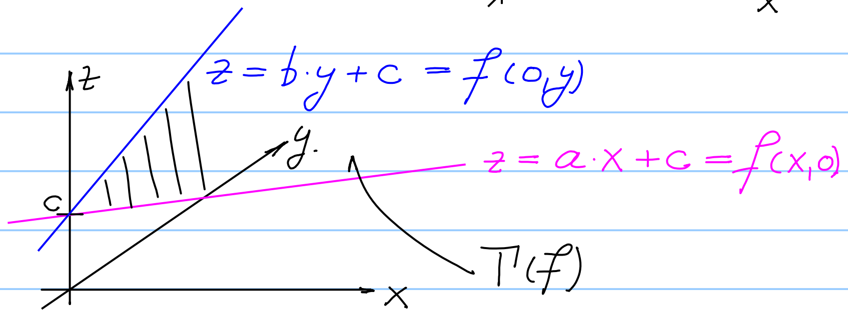
i) $a = b = 0$, $f(x,y) = c$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\mathrm{Im}(f) = \{c\} \subset \mathbb{R}$.



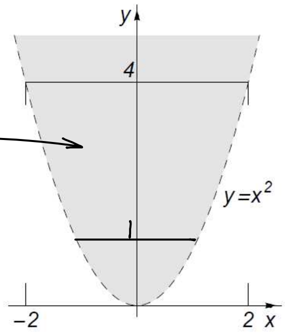
ii) $a \neq 0$ ou $b \neq 0$,

$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$



Exemple 3

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R} \ , \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 < y\}$$



$$(x,y) \mapsto f(x,y) = \frac{xy-1}{\sqrt{y-x^2}}$$

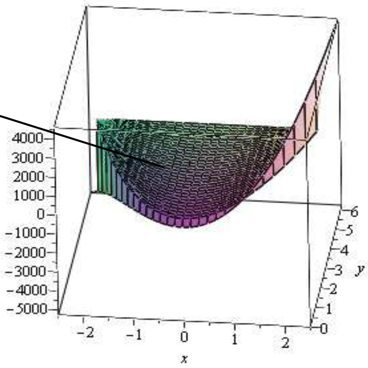
Remarque:

D = "le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ sur lequel l'expression $f(x,y)$ est bien définie"

A noter que D est un ensemble ouvert et non borné.

$$\Gamma(f) = \{(x,y,z) \in D \times \mathbb{R} : z = f(x,y)\}$$

$$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$$

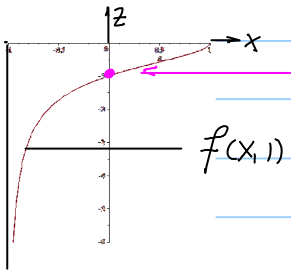


4.2. Techniques graphiques

(illustrations pour l'exemple 3)

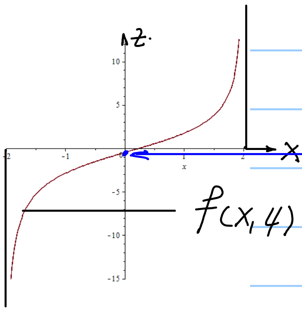
Coupe à $y=1$

$$f(x,1) = \frac{x-1}{\sqrt{1-x^2}} \ , \quad x^2<1$$



Coupe à $y=4$

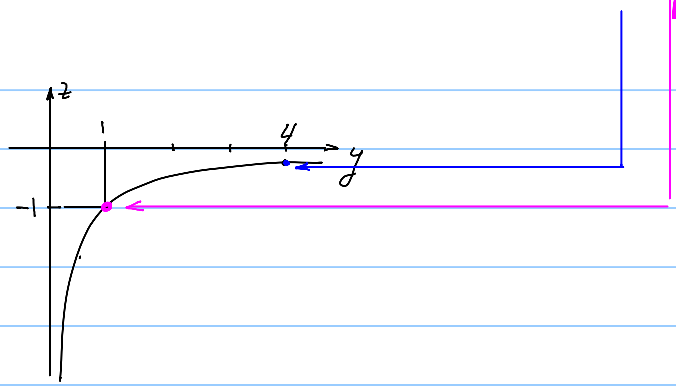
$$f(x,4) = \frac{4x-1}{\sqrt{4-x^2}} \ , \quad x^2<4$$



les mêmes points du graphe

Coupe à $x = 0$

$$f(0,y) = \frac{-1}{\sqrt{y}} \quad , y > 0$$



4.3. Ensembles de niveau

Définition: soit une fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, avec $D \subset \mathbb{R}^n$, le domaine de définition de f, et soit $c \in Im(f)$. Alors l'ensemble

$$f^{-1}(c) := \{ \underline{x} \in D : f(\underline{x}) = c \} \quad \subset D$$

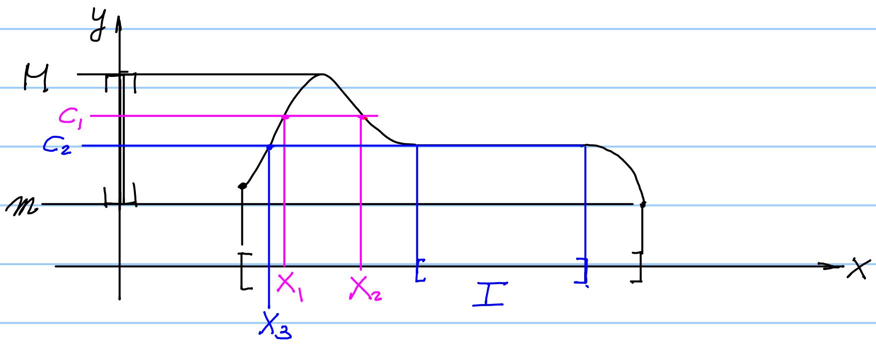
est appelé *l'ensemble de niveau de f de niveau c*

Attention (abus de notation)

- ici $f^{-1}(c)$ est un *sousensemble* de D
- si f est une fonction bijective, $f^{-1}(c)$ est comme d'habitude l'unique élément $\underline{x} \in D$ tel que $f(\underline{x}) = f(f^{-1}(c)) = c$

Exemples

$n = 1$



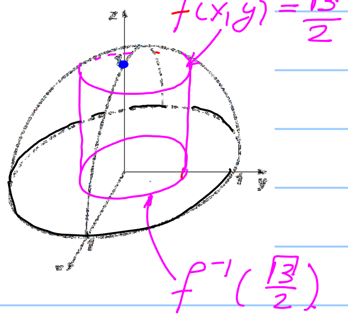
$f^{-1}(c_1) = \{x_1, x_2\}$ $\qquad$ $f^{-1}(c_2) = I \cup \{x_3\}$

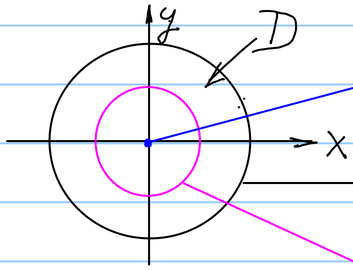
$n=2$: retour aux exemples 1-3 du chapitre 4.1

Exemple 1

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$$

$$f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}\ , \quad Im(f) = [0,1]$$





$$f^{-1}(1) = \{(0,0)\}.$$

$$f^{-1}(0) = \{(x,y) \in D : x^2+y^2=1\}$$

$$f^{-1}(\tfrac{\sqrt{3}}{2}) = \{(x,y) \in D : x^2+y^2 = \tfrac{1}{4}\}$$

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{1-x^2-y^2} \Leftrightarrow \frac{3}{4} = 1-x^2-y^2$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2 = \frac{1}{4}$$

Exemple 2

$D = \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = a \cdot x + b \cdot y + c$, $a,b,c \in \mathbb{R}$ donnés

i) $a=b=0$, $Im(f) = \{c\}$

$$f^{-1}(c) = \mathbb{R}^2$$

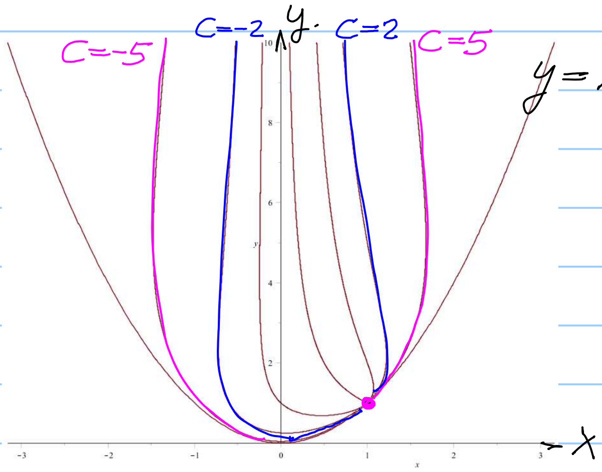
ii) $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, $Im(f) = \mathbb{R} \ni c^*$

$$f^{-1}(c^*) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : ax+by+c = c^*\}$$
$$\Updownarrow$$
$$ax+by+(c-c^*) = 0$$

ce sont des droites dans le plan (x,y).

Exemple 3

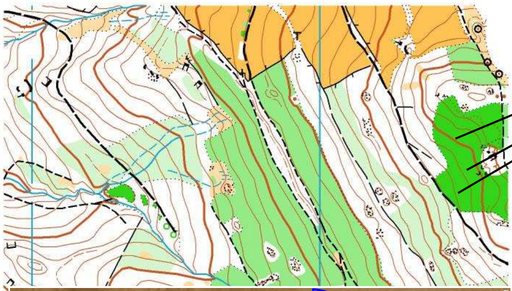
$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 < y\}$, $f(x,y) = \dfrac{xy-1}{\sqrt{y-x^2}}$, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$



lignes de niveau de f de niveau c.

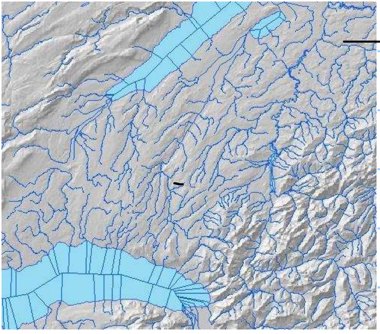
Le fait que plusieurs lignes de niveau "terminent" en le point (1,1) implique la non-existence de la limite $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y)$.

Cartes géographiques



lignes de niveau

plateau de niveau (sur mars)



carte hydrographique, à discuter plus loin.

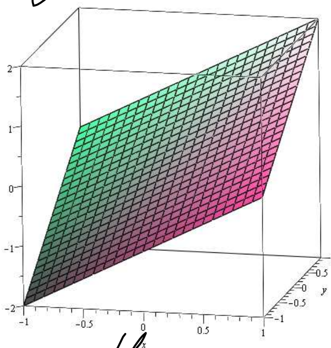
4.4. Limites et continuité (d'une fonction $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$)

Exemple 1 : (opérations algébriques)

i) Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto f(x,y) = x+y$

f est continue en chaque point $(x^*,y^*) \in \mathbb{R}^2$:

$$\lim_{(x,y)\to(x^*,y^*)} \underset{\substack{\| \\ x+y}}{f(x,y)} = \underset{\substack{\| \\ x^*+y^*}}{f(x^*,y^*)}$$



moodle002.

Démonstration

avec les suites : soit (x_n,y_n) une suite telle que $\lim_{n\to\infty}(x_n,y_n) = (x^*,y^*) \in \mathbb{R}^2$, et $(x_n,y_n) \neq (x^*,y^*)$. Alors

$$|(x_n+y_n) - (x^*+y^*)| = |(x_n-x^*) + (y_n-y^*)|$$

$$\leq \underbrace{\underset{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0}{|x_n-x^*|} + \underset{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0}{|y_n-y^*|}}_{\text{par la proposition 2.6.}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

avec $\varepsilon-\delta$: on a

$$\|f(x,y) - f(x^*,y^*)\|_2 = |(x+y) - (x^*+y^*)|$$

$$\leq |x-x^*| + |y-y^*| = \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} \right\|_1 \leq \sqrt{2} \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} \right\|_2$$

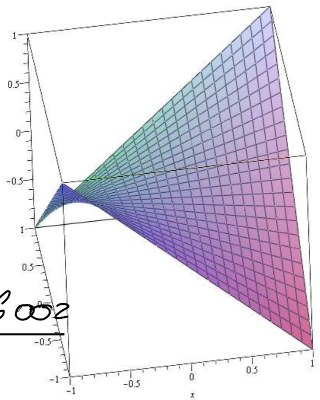
donc, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta$ ($\delta = \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon$, par exemple) tel que

$$\left((x,y) \in D = \mathbb{R}^2, \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} \right\| \leq \delta \right) \Longrightarrow \|f(x,y) - f(x^*,y^*)\| \leq \varepsilon$$

ii) soit $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto f(x,y) = x\cdot y$

f est continue en chaque point $(x^*,y^*) \in \mathbb{R}^2$

$$\lim_{(x,y)\to(x^*,y^*)} \underset{x\cdot y}{\underset{\|}{f(x,y)}} = \underset{x^*\cdot y^*}{\underset{\|}{f(x^*,y^*)}}$$



<u>Démonstration</u>:

<u>mood6002</u>

$$|x\cdot y - x^*\cdot y^*| = |(x-x^*)y + x^*(y-y^*)|$$

$$\leq |x-x^*|\cdot|y| + |x^*||y-y^*| \qquad (*)$$

Soit (x_n,y_n) une suite telle que $\lim_{n\to\infty}(x_n,y_n) = (x^*,y^*)$.

Il existe alors $C>0$, tel que $\forall n$, $|y_n| \leq C$, car <u>toute suite convergente est bornée.</u> (voir Analyse I)
En utilisant $(*)$ on a donc

$$|x_n\cdot y_n - x^*\cdot y^*| \leq |x_n - x^*|\cdot C + |x^*||y_n - y^*| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

par la proposition 2.6

<u>Conséquence de i) et ii)</u> et que la fonction

$f: \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.

<u>Théorème</u> Les fonctions polynôme de deux (ou plusieures variables, ainsi que les fonctions rationnelles de deux (ou plusieures) variables sont toutes continues sur leur domaine de définition.

Exemple 2 (non existence d'une limite)

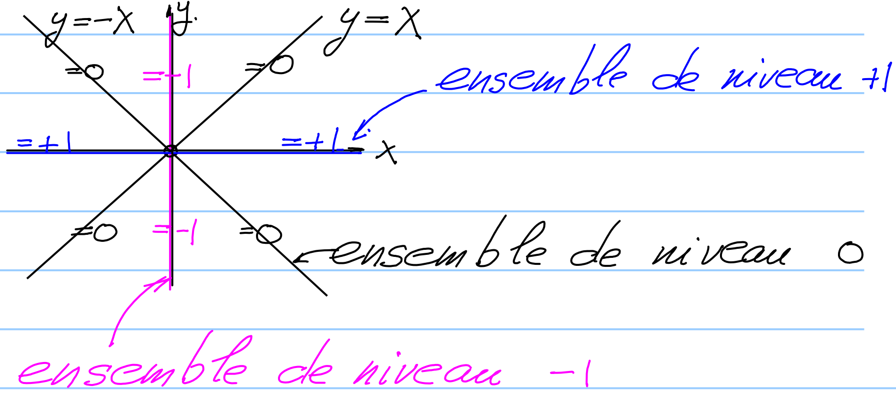
i) $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, $D(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \equiv D$

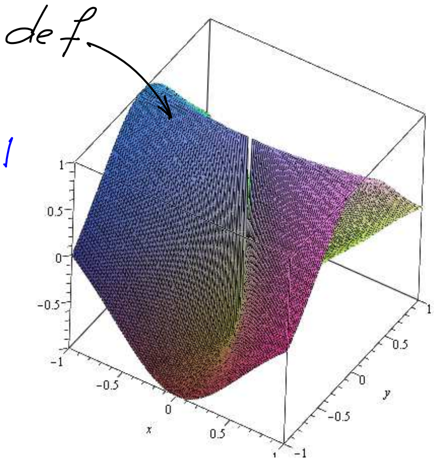
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = ?$$

f continue sur D (car f une fonction rationnelle)

Ensembles de niveau

graphe de f





la limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas, car pour toute suite de la forme $(x_n, 0)$ telle que $x_n \neq 0$ et $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ on a

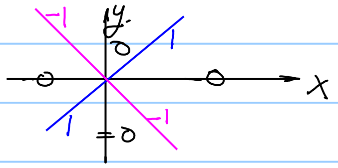
$$f(x_n, 0) = \frac{x_n^2 - 0^2}{x_n^2 + 0^2} = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 ,$$

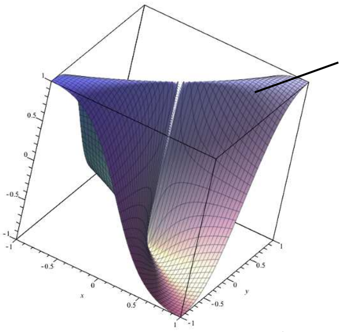
par contre pour toute suite de la forme $(0, y_n)$ telle que $y_n \neq 0$ et $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ on a

$$f(0, y_n) = \frac{0^2 - y_n^2}{0^2 + y_n^2} = -1 \xrightarrow[n\to\infty]{} -1 \neq 1.$$

ii) $f(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$, $D(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} = D$

Ensembles de niveau





graphe de $f = \Gamma(f)$ (voir aussi Maple002)

f continue sur D (car f une fonction rationnelle)

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas car

pour une suite de la forme (x_n, x_n) telle que $x_n \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ on a

$$f(x_n, x_n) = \frac{2\, x_n \cdot x_n}{x_n^2 + x_n^2} = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

par contre pour une suite de la forme $(x_n, -x_n)$ telle que $x_n \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ on a

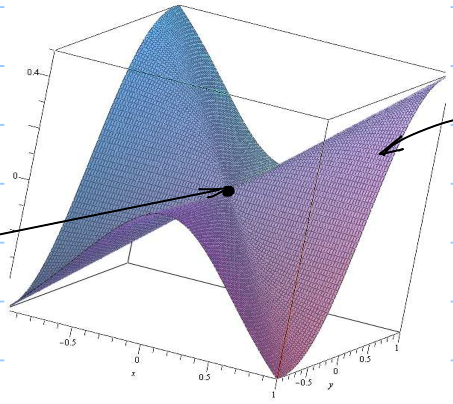
$$f(x_n, -x_n) = \frac{2\; x_n\,(-x_n)}{x_n^2 + (-x_n)^2} = -1 \xrightarrow[n\to\infty]{} -1 \neq 1.$$

Exemple 3 (existence d'une limite)

$f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}$, $D(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} = D$

f continue sur D (car f une fonction rationnelle)

Proposition: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$



$\Gamma(f)$

Démonstration (deux techniques)

i) par une borne "adéquate"

pour $x \neq 0$ et $y \neq 0$ $\quad |f(x,y)| \leq \frac{x^2|y|}{x^2+0^2} \leq |y|$

pour $x=0$ et $y \neq 0$ $\quad f(x,y) = \frac{0^2 y}{0^2+y^2} = 0$

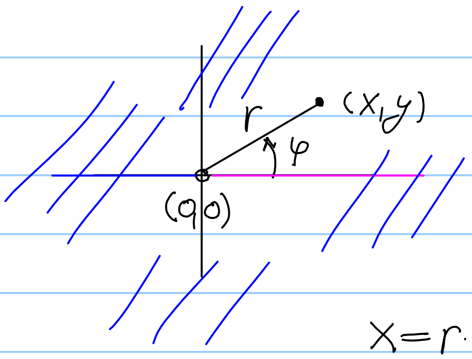
pour $x \neq 0$, $y=0$ $\quad f(x,y) = \frac{x^2 \cdot 0}{x^2+0^2} = 0$

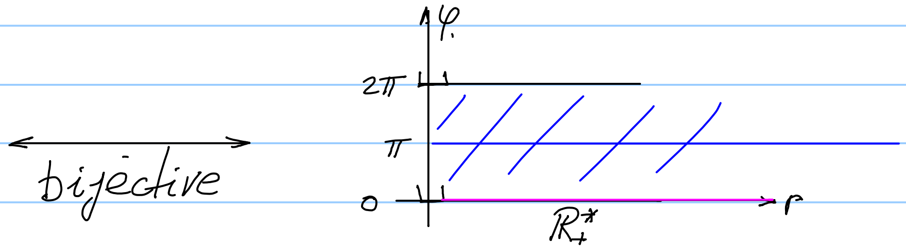
En conclusion on a $|f(x,y)| \leq |y| \, , \forall (x,y) \in D$

$$\Rightarrow 0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y) - \underset{\text{la valeur de la limite.}}{0}| = \lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)|$$

$$\leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} |y| \underset{\text{par la proposition 2.6.}}{=} 0$$

ii) par coordonnées polaires (par rapport à $(x^*,y^*)=(0,0)$)





$x = r \cdot \cos(\varphi)$

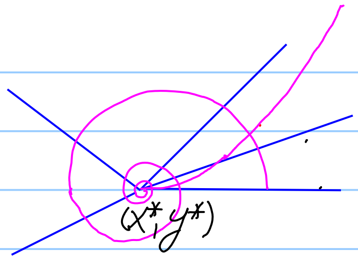
$x = r \cdot \sin(\varphi)$

$r = \sqrt{x^2+y^2} = \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|$

$$\varphi = \begin{cases} 0 \, , & y=0, \, x>0 \\ \pi + 2\arctan\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans notre exemple $(x^*,y^*)=(0,0)$. Pour toute suite (x_n,y_n) telle que $(x_n,y_n) \neq (x^*,y^*)$ et $\lim_{n\to\infty}(x_n,y_n)=(x^*,y^*)$ on a que $\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{(x_n-x^*)^2+(y^n-y^*)^2} = 0$, mais φ_n peut varier d'une manière quelconque dans $[0,2\pi[$.

Illustration:



Explication: différentes manières d'approcher (x^*, y^*) le long de droites (φ_n = const. en coordonnées polaires), ou par d'autres manières (φ_n = quelconque en coordonnées polaires).

Dans notre exemple, donné une suite arbitraire telle que $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$, $r_n > 0$ (mais φ_n arbitraires !) on a:

$$|f(x_n, y_n)| = |f(r_n \cdot \cos(\varphi_n), r_n \cdot \sin(\varphi_n))| \underset{\text{dans notre exemple}}{=} \left| \frac{r_n^2 \cos(\varphi_n)^2 \cdot r_n \sin(\varphi_n)}{r_n^2} \right|$$

$$= |r_n \cdot \cos(\varphi_n)^2 \cdot \sin(\varphi_n)| \leq r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

cette borne est vraie pour toutes les suites φ_n

$\lrcorner$

Prolongement par continuité (voir Analyse I)

La fonction

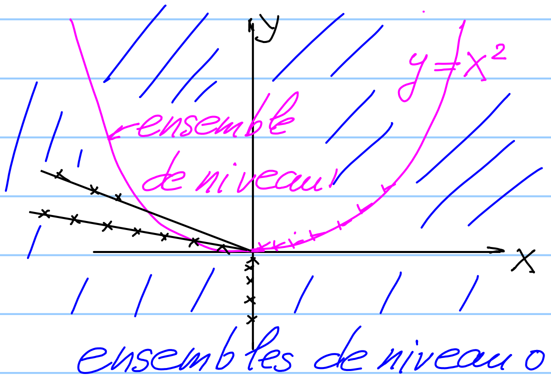
$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{pour } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{pour } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}^2$.

<u>Exemple 5</u> (important ! il faut tester toutes les suites, c-à-d toutes les approches)

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{pour } y = x^2 \\ 0 & \text{pour } y \neq x^2. \end{cases}$$



On a :

$$\lim_{r \to 0+} f(r \cdot \cos(\varphi), r \cdot \sin(\varphi)) = 0$$ pour toute approche avec φ fixe

mais la limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas !, car

pour une suite de la forme (x_n, x_n^2) telle que $x_n \neq 0$ $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ on a

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, x_n^2) = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \neq 0.$$

4.5. Dérivées partielles

4.5.1. Définitions

Remarque: les dérivées partielles d'une fonction $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dépendent du choix des coordonnées. Il est donc indispensables de préciser le choix des variables de la fonction.

Définition: la dérivée partielle d'une fonction de plusieures variables est la dérivée par rapport à une des variables, les autres variables étant gardées constantes

Définition explicite pour le cas $n=2$

Soit $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto f(x,y)$, $(x_0,y_0) \in D$, où $D \subset \mathbb{R}^2$ est ouvert. La dérivée partielle de f en (x_0,y_0) par rapport à la variable x est le nombre

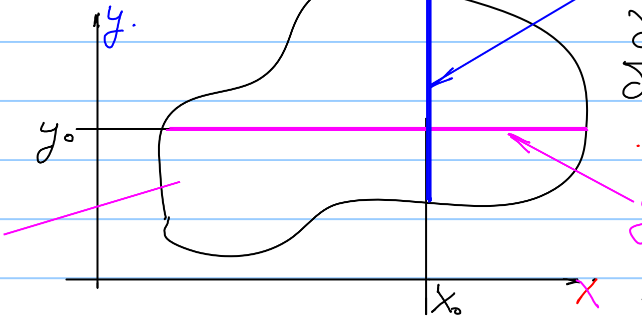
$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}_{\in \mathbb{R}} := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0)}{h}$$

et la dérivée partielle de f en (x_0,y_0) par rapport à la variable y est le nombre

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}_{\in \mathbb{R}} := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0,y_0+h) - f(x_0,y_0)}{h}$$

Explication:

le domaine de f et le choix des coordonnées



$h(y) \equiv f(x_0, y)$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) := h'(y_0)$

$g(x) \equiv f(x, y_0)$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) := g'(x_0)$

$g(x) \equiv f(x, y_0)$ est définie sur la ligne ——

$h(y) \equiv f(x_0, y)$ est définie sur la ligne |

Voir le dessin 3d plus loin et la définition du gradient pour des interprétations de ces nombres.

Notations équivalentes

$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}$, $\partial_x f(x_0, y_0)$, $f'_x(x_0, y_0)$, $f_x(x_0, y_0)$

$D_x f(x_0, y_0)$, $\partial_1 f(x_0, y_0)$, $D_1 f(x_0, y_0)$, $\cancel{\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}}$ à éviter

$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}$, $\partial_y f(x_0, y_0)$, $f'_y(x_0, y_0)$, $f_y(x_0, y_0)$

$D_y f(x_0, y_0)$, $\partial_2 f(x_0, y_0)$, $D_2 f(x_0, y_0)$, $\cancel{\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y_k}}$ à éviter

Définition: soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $\underline{x} \longmapsto f(\underline{x})$, pour $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in D$, où $D \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert. La dérivée partielle de f en $\underline{x}_0 \in D$ par rapport à la variable x_k est le nombre:

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_k}(\underline{x}_0)}_{\in \mathbb{R}} := \lim_{h \to 0} \frac{f(\underline{x}_0 + h \cdot e_k) - f(\underline{x}_0)}{h} \quad , \quad k = 1, \ldots, n$$

où $e_k = (0, \ldots, 0, \overset{\text{position } k}{1}, 0, \ldots, 0)^T$ est le k-ème vecteur de base de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

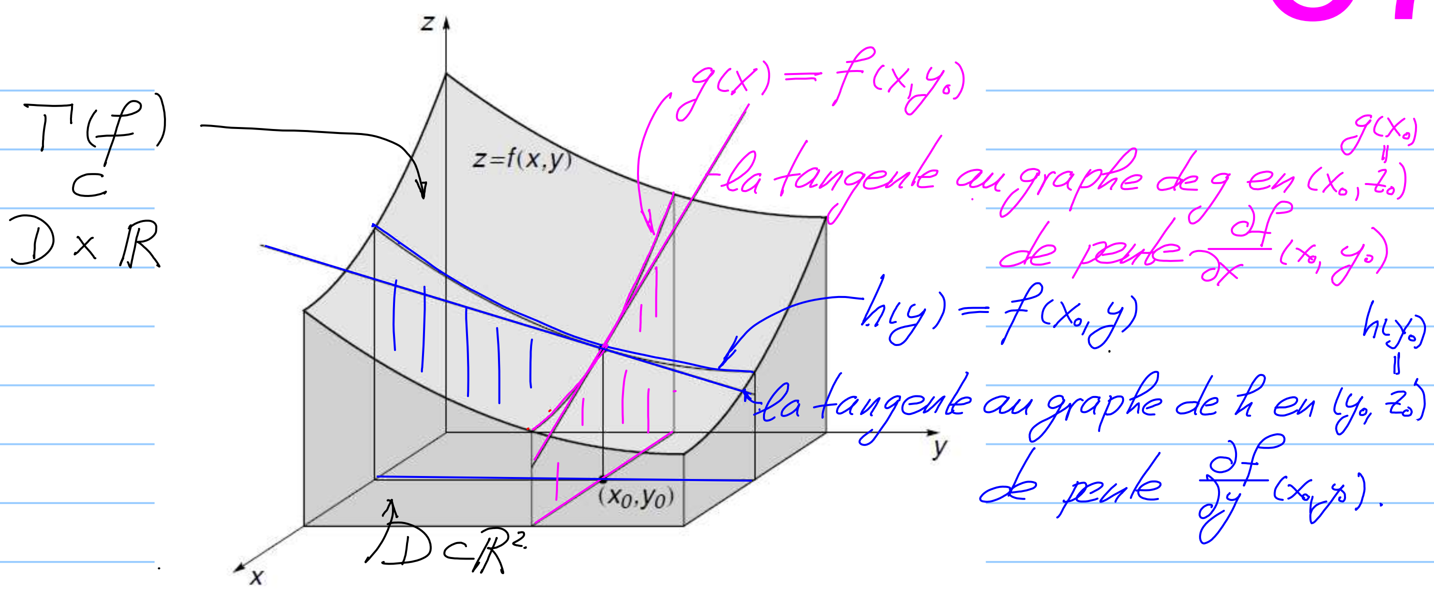
Notations équivalentes

$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_k}(\underline{x}_0)}$, $\partial_{x_k} f(\underline{x}_0)$, $f'_{x_k}(\underline{x}_0)$, $f_{x_k}(\underline{x}_0)$, $D_k f(\underline{x}_0)$,

$\partial_k f(\underline{x}_0)$, $\cancel{\frac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial k}}$ à éviter.

4.5.2. Interprétation géométrique (dessin pour $n=2$)

La dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ est la pente de la tangente au graphe de la fonction $g(x) = f(x, y_0)$ en (x_0, z_0), $z_0 = g(x_0) = f(x_0, y_0)$, et la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ est la pente de la tangente au graphe de la fonction $h(y) = f(x_0, y)$ en (y_0, z_0), avec $z_0 = h(y_0) = f(x_0, y_0)$



4.5.3. Le gradient

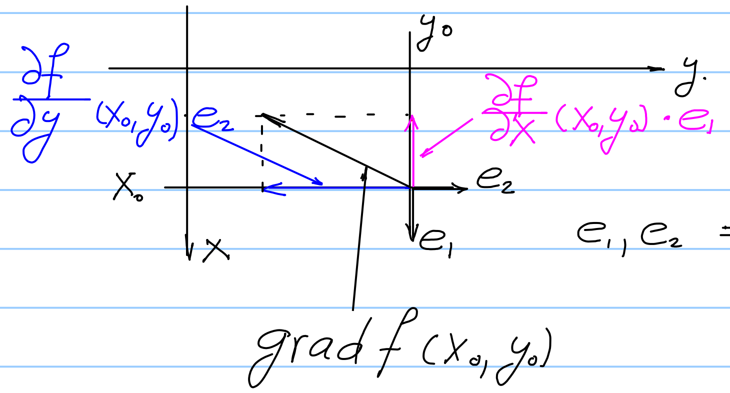
Définition: soit $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$, $\underline{x} \longmapsto f(\underline{x})$, $\underline{x}=(x_1,\dots,x_n)^T$, où $D\subset\mathbb{R}^n$ est ouvert, et soit $\underline{x}_0 \in D$.
Le vecteur

$$\nabla f(\underline{x}_0) \equiv \operatorname{grad} f(\underline{x}_0) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{x}_0)\right)^T$$

$\nabla \equiv$ "Nabla"

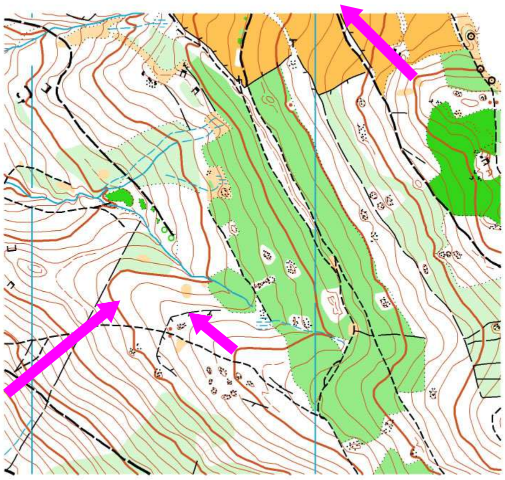
est appelé le gradient de f en $\underline{x}_0$.

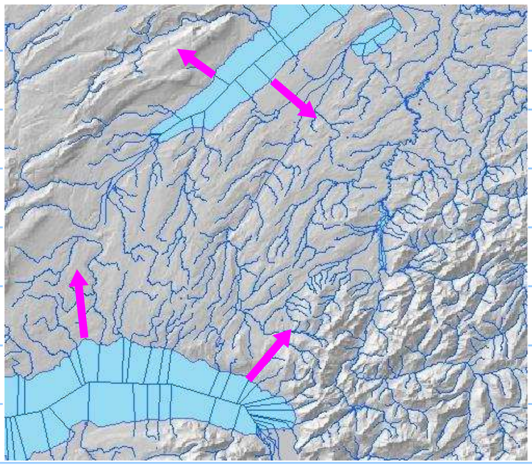
Représentation graphique (dans l'exemple)



e_1, e_2 = repère d'une copie locale de $\mathbb{R}^2$

Nous verrons que pour une fonction différentiable (voir plus loin pour la définition) le gradient indique, dans le domaine de définition de la fonction f, la direction de la pente la plus forte (positive). La norme du gradient est égale à cette pente.





4.5.4. Les fonctions dérivées partielles

Définitions ($n=2$) soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto f(x,y)$, où $D \subset \mathbb{R}^2$ est ouvert. Si les dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

existent pour tout $(x_0,y_0) \in D$, on peut définir les fonctions

$$\frac{\partial f}{\partial x} : D \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} : D \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}.$$

Notations équivalentes (exemples)

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}}, \ \partial_x f, \ f'_x, \ f_x, \ \partial_1 f, \ D_1 f, \ D_x f, \ldots$$

Définition (n général) soit $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$, $\underline{x} \longmapsto f(\underline{x})$, $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $D \subset \mathbb{R}^n$ ouvert.

Si les dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}_0) \quad , \; i = 1 \dots n,$$

existent pour tout $x_0 \in D$, on peut définir les fonctions

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\underline{x} \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}) := \lim_{h \to 0} \frac{f(\underline{x} + h \cdot e_i) - f(\underline{x})}{h}$$

$i = 1, \dots, n.$

Exemple: soit la fonction

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto f(x,y) = x^2 - y^2$$

Alors on a (règles de calcul habituelles):

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y$$

On a donc par exemple $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = -2$

INTERMEZZO

Test de compréhension : soit f comme dans l'exemple. Alors on peut s'amuser à définir la fonction

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto g(x,y) := \frac{\partial f}{\partial y}(y,x) \end{aligned}$$

On trouve $g(x,y) = -2x$.

INTERMEZZO

4.5.5 Deuxièmes dérivées partielles

Définition : soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto f(x,y)$, où $D \subset \mathbb{R}^2$ est ouvert, et supposons que les fonctions

$$\frac{\partial f}{\partial x} : D \longrightarrow \mathbb{R} , \quad (x,y) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} : D \longrightarrow \mathbb{R} , \quad (x,y) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

existent. Pour chacune de ces fonctions on peut alors étudier l'existence des dérivées partielles par rapport à x et y en $(x_0, y_0) \in D$ (calcul des limites). Si les nombres

$$\frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}{\partial x}(x_0,y_0) \quad , \quad \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}{\partial y}(x_0,y_0)$$

$$\frac{\partial \frac{\partial f}{\partial y}}{\partial x}(x_0,y_0) \quad , \quad \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial y}}{\partial y}(x_0,y_0)$$

existent pour tout $(x_0,y_0) \in D$ on peut définir les fonctions deuxièmes dérivées partielles, notées

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} : D \longrightarrow \mathbb{R} , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} : D \rightarrow \mathbb{R} , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} : D \rightarrow \mathbb{R} , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

par

$$(x,y) \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \equiv \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}{\partial x}(x,y) := \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x+h,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{h}.$$

$$(x,y) \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \equiv \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}{\partial y}(x,y) := \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y+h) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{h}.$$

$$(x,y) \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \equiv \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial y}}{\partial x}(x,y) := \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x+h,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}{h}.$$

$$(x,y) \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \equiv \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial y}}{\partial y}(x,y) := \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y+h) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}{h}.$$

Remarque: souvent on écrit directement $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)$ au lieu de $\frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}{\partial x}(x_0,y_0)$ pour la valeur de la dérivée partielle de la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ par rapport à x en (x_0,y_0), etc.

Notations équivalentes (pour les fonctions deuxièmes dérivées partielles)

$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}$, $\partial_x^2 f$, f'_{xx}, f_{xx}, $D_{xx}f$, etc.

Attention: l'interprétation de $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)$ varie d'un auteur à l'autre. L'ordre des dérivées (pour nous d'abord par rapport à y puis par rapport à x) peut être échangé (voir par exemple dans Dz).

Heureusement: pour des fonctions de classe C^2 (à définir) on a que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

c'est-à-dire $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0)$. Voir la série 6 pour un contre-exemple !

4.5.6. Dérivées partielles du deuxième ordre (n général)

Définition soit $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$, $\underline{x} \longmapsto f(\underline{x})$, $\underline{x} = (x_1,\dots,x_n)$ où $D \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert et supposons que les fonctions

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\underline{x} \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x}) \qquad , j = 1, \dots, n,$$

existent. Alors les fonctions des deuxièmes dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

sont définies en $\underline{x}_0 \in D$ par

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\underline{x}_0) \equiv \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x_j}}{\partial x_i}(\underline{x}_0)$$

$$:= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x}_0 + h \cdot e_i) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x}_0)}{h}$$

pour $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n$.

<u>Remarque</u>: les deuxièmes dérivées partielles sont souvent arrangées dans un tableau (une matrice $n \times n$):

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\underline{x}_0)\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\underline{x}_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\underline{x}_0) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\underline{x}_0) \end{pmatrix}$$

qui est appelée la matrice hessienne de f en x_0: $\text{Hess}(f)(\underline{x}_0)$.

<u>Remarque</u>: $\text{Hess}(f)(\underline{x}_0)$ peut être la transposée de cette matrice selon les auteurs.

<u>Remarque</u>: si f est suffisamment régulière (de classe C^2, voir plus loin) on a

$$\text{Hess}(f)(x_0) = \text{Hess}(f)(\underline{x}_0)^T$$

c.-à-d. la matrice est symétrique

4.5.7. Dérivées partielles d'ordre supérieur

Par récurrence on peut définir des (fonctions) dérivées partielles de tout ordre.

Exemple: (ordre 3, une fonction de $n=2$ variables).

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_0,y_0) \equiv \frac{\partial \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}{\partial x}(x_0,y_0)$$

$$:= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0+h,y_0) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)}{h}.$$

Remarque: les fonctions rationnelles possèdent des dérivées partielles de tout ordre sur leur domaine de définition, et on a les règles de calcul habituelles pour les dérivées.

4.5.8. Exemples

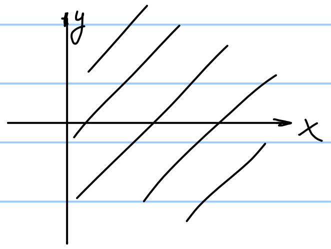
1) $f(x,y) = x^3y^2$ $\quad (f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R})$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2y^2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 6x^2y.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6xy^2$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}(x,y) = \boxed{12xy} \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(x,y) = \boxed{12xy.}$$

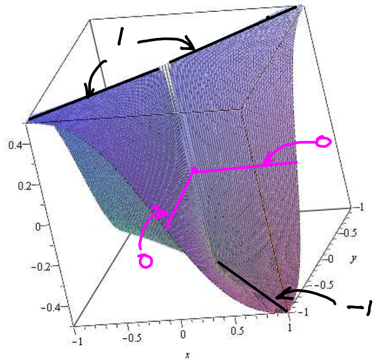
2) $f(x,y) = x^y$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$



$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y \cdot x^{y-1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^y \cdot \ln(x)$$

3)
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2\cdot xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$



f n'est pas continue en $(0,0)$!

car par exemple

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = 1 \neq 0 = f(0,0),$$

néanmoins les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont définies sur tout $\mathbb{R}^2$:

i) pour $(x,y)\neq(0,0)$ f est donnée par une fonction rationnelle

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2} - \frac{2x\cdot y\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2} - \frac{2x\cdot y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}$$

ii) pour $(x,y) = (0,0)$ il faut utiliser les définitions

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2\cdot h\cdot 0}{h^2+0^2} - 0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2\cdot 0\cdot h}{0^2+h^2} - 0}{h} = 0$$

Constat: les dérivées partielles peuvent donc exister même en un point où f n'est pas continue

4.6. Fonctions différentiables (= dérivables)

4.6.1. Rappels ($n=1$, Analyse I)

Définition de la dérivabilité et de la différentiabilité pour une fonction $f: I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, en $x_0 \in I$:

Dérivable:

$$f'(x_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \qquad (*)$$

existence de la limite $(*)$.

Différentiable:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \overset{\uparrow}{a} \cdot h + \varepsilon(x_0+h) \cdot |h| \qquad (**)$$

existence d'un nombre $a \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(x_0+h) = 0$

Remarques:

$(**) \Rightarrow \lim\limits_{h \to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$ différentiable $\Rightarrow$ continue

$$(**) \Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \left(a + \varepsilon(x_0+h) \frac{|h|}{h}\right) = 0$$

donc $(**) \Rightarrow (*)$ avec $f'(x_0) = a$.

$$(**) \Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0) - a \cdot h}{|h|} = \lim_{h \to 0} \varepsilon(x_0+h) = 0$$

4.6.2. Différentiabilité en un point

Définition Soit $f : D \to \mathbb{R}$, $\underline{x} \mapsto f(\underline{x})$, $\underline{x} = (x_1, .., x_n)$, où $D \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert. La fonction f est différentiable en $\underline{x}_0 \in D$ s'il existe une matrice A $(1 \times n \;\; \boxed{\;|\;|\;|\;|\;|\;})$ telle que

$$\left.\begin{array}{l} f(\underline{x}_0 + \underline{h}) = f(\underline{x}_0) + \underbrace{A \overset{\mathbb{R}^n}{\underline{h}}}_{\in \mathbb{R}} + \varepsilon(\underline{x}_0 + \underline{h}) \|\underline{h}\| \\ \text{avec } \varepsilon(\underline{x}_0) = 0 \text{ et } \lim_{\underline{h} \to 0} \varepsilon(\underline{x}_0 + \underline{h}) = 0. \end{array}\right\} (**)$$

Remarque: on peut réécrire $(**)$ d'une manière équivalente comme:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = f(\underline{x}_0) + A(\underline{x} - \underline{x}_0) + \varepsilon(\underline{x}) \|(\underline{x} - x_0)\| \\ \text{avec } \varepsilon(\underline{x}_0) = 0 \text{ et } \lim_{\underline{x} \to x_0} \varepsilon(\underline{x}) = 0. \end{array}\right\} (**)^{bis}$$

Notation: on écrira $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ pour l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$

Notation: dans ce cours on écrira $f'(\underline{x}_0)$ pour l'application linéaire $\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ qui correspond à la matrice A

Terminologie: l'application $f'(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ est appelée la dérivée (totale) de f en $\underline{x}_0$

Remarque: $(**) \iff$ existence d'une application linéaire $f'(\underline{x}_0)$ telle que

$$\lim_{\underline{h} \to 0} \underbrace{\frac{f(\underline{x}_0 + \underline{h}) - f(\underline{x}_0) - f'(\underline{x}_0)\underline{h}}{\|\underline{h}\|}}_{= \varepsilon(\underline{x}_0 + \underline{h})} = 0$$

Notations : $\boxed{f'(\underline{x}_0)}$, $df(\underline{x}_0)$, $L_{\underline{x}_0}$ pour la dérivée en $\underline{x}_0$

Proposition 4.6 (différentiable ⇒ continue et existence des dérivées partielles)

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $\underline{x} \longmapsto f(\underline{x})$, $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in D$, $D \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, f différentiable en $\underline{x}_0 \in D$. Alors

i) f est continue en $\underline{x}_0$

ii) $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x}_0)$ existent pour $j = 1, \dots, n$.

iii) $f'(\underline{x}_0) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}_0), \dots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{x}_0) \right)$

les mêmes nombres que pour le gradient, mais ceci n'est pas le gradient, mais une matrice $1 \times n$.

Démonstration.

i) $(**) \Rightarrow \lim\limits_{\underline{h} \to 0} f(\underline{x}_0 + \underline{h}) = \lim\limits_{\underline{h} \to 0} \dots = f(\underline{x}_0)$

ii) et iii) on choisit $\underline{h} = h \cdot e_j$, $h \in \mathbb{R}$

$$(**) \Rightarrow f(\underline{x}_0 + h \cdot e_j) = f(\underline{x}_0) + \underbrace{A(h \cdot e_j)}_{h \cdot (A e_j) \text{ par linéarité}} + \varepsilon(\underline{x}_0 + h e_j)|h|$$

$$\Rightarrow \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{f(\underline{x}_0 + h e_j) - f(\underline{x}_0)}{h}}_{= \frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x}_0) \text{ par définition}} = A e_j + \underbrace{\lim_{h \to 0} \varepsilon(\underline{x}_0 + h e_j) \frac{|h|}{h}}_{= 0}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x}_0) = A \cdot e_j = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_j & \cdots & A_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A_j$$

position j

$\lrcorner$

Nota bene: l'exemple du chapitre 4.5.8 montre que l'existence des dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x}_0) \quad , \ j=1,\dots,n.$$

ne suffit pas pour garantir la différentiabilité en un point $\underline{x}_0$. Dans l'exemple les dérivées partielles existent, mais f n'est même pas continue

Théorème. Toutes les fonctions rationnelles sont différentiables en tout point de leur domaine de définition.

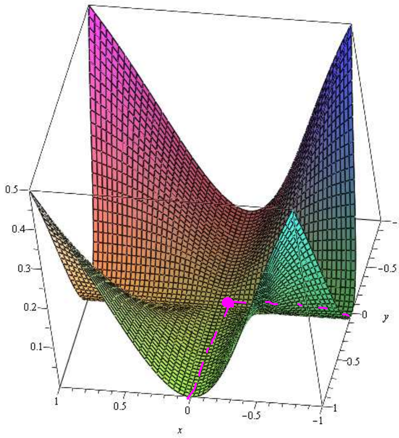
Comment contrôler la différentiabilité d'une fonction dans le cas général?

A: méthode "directe" (utiliser la définition)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

En $(x_0,y_0) \neq (0,0)$

f est différentiable car donnée par une fonction rationnelle



En $(x_0,y_0) = (0,0)$

0) test facultatif: f est continue en $(0,0)$ (c'est une condition nécessaire à la différentiabilité)
Pour $r>0$ on a en coordonnées polaires

$$|f(r\cdot\cos(\varphi), r\cdot\sin(\varphi))| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{borne uniforme en } \varphi}}{\leq} r^2 \xrightarrow[r\to 0]{r>0} 0 = f(0,0)$$

i) calculer les dérivées partielles en (0,0) (leur existence est une condition nécessaire à la differentiabilité; voir la proposition 4.6 !)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^2\cdot 0^2}{h^2+0^2} - 0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0^2 h^2}{0^2+h^2} - 0}{h} = 0$$

Donc, <u>si</u> f était différentiable en (0,0) on aurait

$$f'(0,0) = (\underset{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{0}, \underset{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{0}) \quad (\text{matrice } 1\times 2)$$

ii) par définition (utiliser $(**)^{bis}$ et proposition 4.6) si f est differentiable en (0,0) on doit avoir

$$f(x,y) = f(0,0) + (0,0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \varepsilon(x,y)\sqrt{x^2+y^2} \qquad (*)$$

et $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \varepsilon(x,y) = 0$. De $(*)$ on obtient, pour $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\varepsilon(x,y) = \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

et en coordonnées polaires on trouve pour $r>0$

$$|\varepsilon(r\cdot\cos(\varphi), r\cdot\sin(\varphi))| \leqslant r \xrightarrow[\substack{r>0 \\ r\to 0}]{} 0.$$

i) + ii) montrent la differentiabilité de f en (0,0) ainsi que $f'(0,0) = (0,0)$ (matrice 1×2).

<u>B. par la méthode indirecte suivante</u>

(utiliser le théorème suivant)

Théorème ☺ : soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $\underline{x} \longmapsto f(\underline{x})$,
$\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in D$, $D \subset \mathbb{R}^n$ ouvert.
Si les fonctions

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} : D \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad j = 1, \dots, n$$

existent et sont toutes continues en $\underline{x}_0 \in D$, alors f est différentiable en $\underline{x}_0 \in D$

Dans notre exemple: $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

On a déjà montré que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

Pour $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy^2}{x^2+y^2} - \frac{2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2x^2y}{x^2+y^2} - \frac{2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$$

et on a en coordonnées polaires

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(r \cdot \cos(\varphi), r \cdot \sin(\varphi)) \right| \leq 4 \cdot r \xrightarrow[\substack{r>0 \\ r \to 0}]{} 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(r \cdot \cos(\varphi), r \cdot \sin(\varphi)) \right| \leq 4 \cdot r \xrightarrow[\substack{r>0 \\ r \to 0}]{} 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

Les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent donc sur $\mathbb{R}^2$ et sont continues en $(0,0)$ $\Rightarrow$ f différentiable en $(0,0)$ par ☺

Remarque : le théorème ☺ est un théorème "local". Soit $\delta > 0$ tel que $B(\underline{x}_0, \delta) \subset D$, alors on peut restraindre f à $B(\underline{x}_0, \delta)$ et on a le théorème sur $B(\underline{x}_0, \delta)$. Il suffit donc que les fonctions dérivées partielles existent sur $B(\underline{x}_0, \delta)$ et soient continues en $\underline{x}_0$.

Démonstration du théorème ☺ (idée, une variable à la fois). Soit $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in D$ et $\underline{x}_0 = (x_{0,1} \dots x_{0,n})$. Alors:

$$f(\underbrace{x_1, \dots, x_n}_{= \underline{x}}) - f(\underbrace{x_{0,1}, \dots, x_{0,n}}_{= \underline{x}_0}) =$$

$$\begin{aligned}
\text{"}+0\text{"} \quad & = f(x_1, x_{0,2}, \dots, x_{0,n}) - f(x_{0,1}, x_{0,2}, \dots x_{0,n}) \\
& + f(x_1, x_2, x_{0,3}, \dots, x_{0,n}) - f(x_1, x_{0,2}, \dots, x_{0,n}) \\
& \quad \vdots \\
\text{"}+0\text{"} \quad & + f(x_1, \dots x_{n-1}, x_n) - f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_{0,n})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& = \frac{\partial f}{\partial x_1}\left(x_{0,1} + \theta_1 (x_1 - x_{0,1}), x_{0,2}, \dots, x_{0,n}\right)(x_1 - x_{0,1}) \\
& + \frac{\partial f}{\partial x_2}\left(x_1, x_{0,2} + \theta_2 (x_2 - x_{0,2}), \dots, x_{0,n}\right)(x_2 - x_{0,2}) \\
& \quad \vdots \\
& + \frac{\partial f}{\partial x_n}\left(x_1, \dots, x_{n-1}, x_{0,n} + \theta_n (x_n - x_{0,n})\right)(x_n - x_{0,n})
\end{aligned}$$

avec $\theta_i \in]0,1[$, $i = 1 \dots n$, donnés par le théorème des accroissements finis pour une fonction réelle d'une variable réelle (voir Analyse I). Ainsi

$$\begin{bmatrix} x_1 - x_{0,1} \\ \vdots \\ x_n - x_{0,n} \end{bmatrix}$$

$$f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0) - A(\underline{x} - \underline{x}_0) =$$

$$A = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{x}_0)\right) \text{ matrice } 1 \times n.$$

$$\underline{x}_0 \equiv (x_{0,1}, \dots, x_{0,n}).$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{0,1}+\theta_1(x_1-x_{0,1}), x_{0,2}, \dots, x_{0,n})\ (x_1-x_{0,1})$$

$$-\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{0,1}, \dots, x_{0,n})\ (x_1-x_{0,1})$$

$$+ \dots +$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, x_{0,n}+\theta_n(x_n-x_{0,n}))\ (x_n-x_{0,n})$$

$$-\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_{0,1}, \dots, x_{0,n})\ (x_n-x_{0,n}).$$

Avec la définition $(\cancel{**})^{bis}$ on a.

$$\varepsilon(\underline{x}) = \frac{f(\underline{x})-f(\underline{x}_0) - A(\underline{x}-\underline{x}_0)}{\|\underline{x}-\underline{x}_0\|}$$

et donc, puisque $\dfrac{|x_i - x_{0,i}|}{\|\underline{x}-\underline{x}_0\|} \leq 1$, on obtient

$$0 \leq |\varepsilon(\underline{x})| \leq \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{0,1}+\theta_1(x_1-x_{0,1}), x_{0,2}, \dots, x_{0,n}) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{0,1}, \dots, x_{0,n})\right|$$

$$+ \dots +$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, x_{0,n}+\theta_n(x_n-x_{0,n})) - \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_{0,1}, \dots, x_{0,n})\right|$$

$$\xrightarrow[\underline{x} \to \underline{x}_0]{} 0$$

par la continuité des fonctions dérivées partielles en $\underline{x}_0 = (x_{0,1}, \dots, x_{0,n})$.

⌟

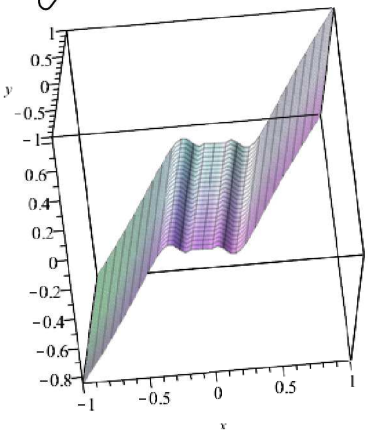
♭ Bémol

(contraposée de la)

Attention ☹ : la réciproque du théorème ☺ est fausse !. Le fait qu'une ou plusieures des fonctions $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ ne soient pas continues en un point $\underline{x}_0$ n'implique pas que la fonction n'est pas différentiable en $\underline{x}_0$

(Contre-) exemple

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0, y \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{si} \quad x = 0, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$



On montre que f est différentiable en $(0,0)$ par la méthode A

i) $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{h}\right) - 0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

ii) $(**)^{bis}$ $$f(x,y) = 0 + (0,0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \varepsilon(x,y)\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\varepsilon(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad x \neq 0, y \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{si} \quad x=0, y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

En coordonnées polaires on obtient

$$\left|\varepsilon(r \cdot \cos(\varphi), r \cdot \sin(\varphi))\right| \leq r \xrightarrow[\substack{r>0 \\ r\to 0}]{} 0$$

On a donc démontré que f est différentiable en $(0,0)$

Par contre on obtient aucune information par le théorème ☺ , car on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 2x\cdot\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}) & \text{pour } x\neq 0, y\in\mathbb{R} \\ 0 & \text{pour } x=0, y\in\mathbb{R} \end{cases}$$

$$\ulcorner \lim_{h\to 0}\frac{h^2\overset{\|}{\cdot}\sin(\frac{1}{h})-0}{h} \quad ! \quad \lrcorner$$

et, puisque la limite $\lim_{x\to 0}\frac{\partial f}{\partial x}(x,0)$ n'existe pas la limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ n'existe pas (pourquoi ?)

⌜comparer avec Exercice 8 de la série 5⌟

Conclusion:

$\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en (0,0) et le théorème ☺ ne s'applique pas. Ceci montre ☹ vue que la méthode directe montre que f est différentiable en (0,0).

46.3. La différentielle (≡ fonction dérivée)

Définition: si f est différentiable sur D, c-à-d., si f est différentiable en tout point $\underline{x}_0 \in D$, on peut définir la fonction

$$f' : D \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \qquad (\underset{\text{isomorphe}}{\cong} \mathbb{R}^n)$$
$$\underline{x} \longmapsto f'(\underline{x})$$

Cette fonction est appelée <u>la différentielle de f</u>

Notations: $\boxed{f'}$, df, … pour la différentielle

4.7. Fonctions de classe C^k

Définition $(n=2)$ Soit $f : D \to \mathbb{R}$, $(x, y) \longmapsto f(x,y)$ où $D \subset \mathbb{R}^2$ est ouvert. Alors

$$f \in C^1(D) :\Longleftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$$

existent et sont continues sur D ($\Longrightarrow$ f est différentiable sur D par le théorème 🙂).

$$f \in C^2(D) :\Longleftrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

existent et sont continues sur D.

$$f \in C^k(D) :\Longleftrightarrow \frac{\partial^k f}{\partial x^k}, \dots, \frac{\partial^k f}{\partial x^\ell \partial y^{k-\ell}}, \dots, \frac{\partial^k f}{\partial y^k}$$

$$\uparrow$$
$$0 \leq \ell \leq k$$

ainsi que les permutations

existent et sont continues sur D

exemple $k=3, \ell=1$: $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}$, $\underbrace{\dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}, \dfrac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}}_{\text{"permutations"}}$.

Définition (n général) Soit $f: D \to \mathbb{R}$, $\underline{x} \mapsto f(\underline{x})$, $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$, où $D \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert. Alors

$$f \in C^1(D) :\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_j}, \; j=1, \dots, n$$

existent et sont continues sur D

$$f \in C^k(D) :\Leftrightarrow \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{\ell_1} \cdot \ldots \cdot \partial x_n^{\ell_n}} \qquad \begin{array}{l} \ell_1 + \dots + \ell_n = k \\ \ell_i \in \{0, \dots, k\} \end{array}$$

ainsi que les permutations

existent et sont continues sur D.

Théorème: soit $f: D \to \mathbb{R}$, $\underline{x} \longmapsto f(\underline{x})$, $\underline{x} = (x_1, \dots x_n)$ $D \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert et soit f une fonction de classe C^k. Alors, les fonctions

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{\ell_1} \cdot \ldots \cdot \partial x_n^{\ell_n}} \qquad \begin{array}{l} \ell_1 + \dots + \ell_n = k \\ \ell_i \in \{0, \dots, k\}. \end{array}$$

sont égales aux fonctions "avec les ∂x_i permutés"

Exemples: si $f(x,y)$ de classe $C^2(\mathbb{R}^2)$ alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad \text{pas de permutations}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ pas de permutations

et si $f(x,y)$ de classe $C^3(\mathbb{R}^2)$ on a en plus

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial y\,\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2\,\partial x}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial y\,\partial x^2}$$

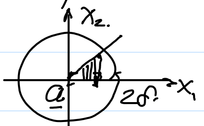
Ce théorème est une conséquence du théorème de Schwarz

Théorème: soit $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$, $\underline{x} \longmapsto f(\underline{x})$, $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in D$, $D \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et supposons que pour $i \neq j$ les fonctions $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ existent sur D et sont continues en $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n) \in D$. Alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\underline{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\underline{a})$$

Démonstration

C'est un théorème local. On peut, pour $\delta > 0$ petit restraindre f à $B(\underline{a}, 2\delta) \subset D$.



Soit $n=2$, $i=1$, $j=2$ et soit, pour $v \in [0,\delta]$ et $s \in [0,v]$

$$\left.\begin{aligned} g(s) &:= f(a_1+v,\ a_2+s) - f(a_1,\ a_2+s), \\ h(s) &:= f(a_1+s,\ a_2+v) - f(a_1+s,\ a_2). \end{aligned}\right\} (*)$$

Remarque:

$$\left.\begin{aligned} g(v)-g(0) &= f(a_1+v,\ a_2+v) - f(a_1,\ a_2+v) \\ &\quad - f(a_1+v,\ a_2) + f(a_1,\ a_2) = h(v)-h(0) \end{aligned}\right\} (**)$$

Pour $s \in]0, v[$ on a

$$\left.\begin{aligned} g'(s) &= \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1+v,\ a_2+s) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,\ a_2+s), \\ h'(s) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1+s,\ a_2+v) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1+s,\ a_2), \end{aligned}\right\} (***)$$

et, en utilisant dans (***) le théorème des accroissements finis (par rapport à v), on obtient, qu'ils existent $\theta_1, \theta_2 \in]0,1[$ tels que

$$g'(s) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a_1+\theta_1 v,\ a_2+s)\,v, \qquad (1)$$

$$h'(s) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a_1+s,\ a_2+\theta_2 v)\,v. \qquad (2)$$

et puis avec (**), qu'ils existent $\theta_3, \theta_4 \in]0,1[$ tels que

$$g(v)-g(0) = g'(\theta_3 v)\,v \underset{(1)}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a_1+\theta_1 v,\ a_2+\theta_3 v)\,v^2$$

$$h(v)-h(0) = h'(\theta_4 v)\,v \underset{(2)}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a_1+\theta_4 v,\ a_2+\theta_2 v)\,v^2$$

et donc, puisque $g(v)-g(0) = h(v)-h(0)$ (voir (**))

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a_1+\theta_1 v,\ a_2+\theta_3 v) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a_1+\theta_4 v,\ a_2+\theta_2 v)$$

et donc, en utilisant la continuité des fonctions $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$ en (a_1, a_2) on obtient, lorsque v tend vers zéro, que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a_1, a_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a_1, a_2)$$

ceci termine la démonstration pour $n=2$. Si $n \geqslant 3$, $i<j$ on applique le même argument à la fonction $F(x_i, x_j) = f(a_1 \dots a_{i-1}, x_i, a_i \;, \dots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1} \dots a_n)$. $\lrcorner$

La généralisation du théorème de Schwarz aux dérivées partielles d'ordre plus élevé s'obtient par récurrence.

4.8. Le plan tangent $(n=2)$

Soit $f : D \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(x,y)$, $D \subset \mathbb{R}^2$ ouvert. Si f est différentiable en $(x_0, y_0) \in D$ on a pour (x,y) proche de (x_0, y_0) :

$$\underbrace{f(x,y)}_{\equiv z} = f(x_0 + \underbrace{(x - x_0)}_{\equiv h}, y_0 + \underbrace{(y - y_0)}_{\equiv k})$$

$$= f(x_0, y_0) + A\binom{h}{k} + \varepsilon(\underbrace{x_0 + h}_{\equiv x}, \underbrace{y_0 + k}_{\equiv y}) \overset{\sqrt{h^2+k^2}}{\overset{\shortparallel}{\left\|\binom{h}{k}\right\|}} = \dots$$

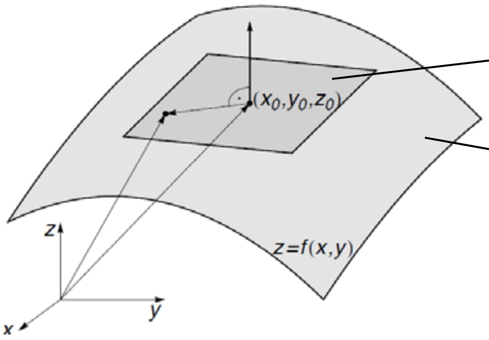
$\ulcorner$ A est la matrice de l'application linéaire $f'(x_0, y_0)$ dans les coordonnées données

$$A = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right) \quad \lrcorner$$

$$\dots = \underbrace{f(x_0, y_0)}_{\equiv c \equiv z_0} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}_{\equiv a} h + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}_{\equiv b} k + \text{"petit"}$$

donc $$\underbrace{z = c + a(x - x_0) + b(y - y_0)}_{\Longleftrightarrow} + \text{"petit"}$$

$$z = (c - a x_0 - b y_0) + a x + b y$$ (l'équation d'un plan)



graphe du plan

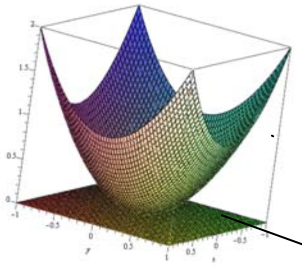
graphe de f

On verra plus loin que ce plan est <u>tangent</u> au graphe de f en (x_0, y_0, z_0), où $z_0 = f(x_0,y_0)$.

<u>Conclusion</u>: différentiable $\Leftrightarrow$ existence d'un plan tangent

<u>Remarque</u>: on a la même conclusion pour $n>2$ avec le plan remplacé par un "hyper-plan" = graphe d'une fonction affine de n variables. Pour $n=1$ on obtient comme graphe une droite.

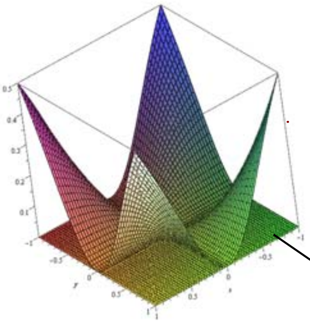
<u>Exemples</u>



$$f(x,y) = x^2+y^2 \quad , \quad (x_0,y_0)=(0,0)$$

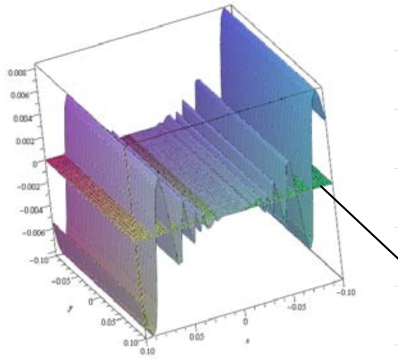
$$f(x,y) = 0 + (\underbrace{0}_{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}, \underbrace{0}_{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \text{"petit"}$$

$$z = 0 + 0\cdot x + 0\cdot y = 0$$



$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

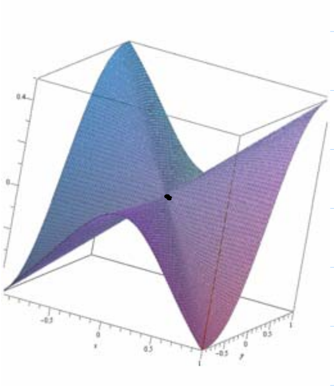
$z=0$ en $(x_0,y_0)=(0,0)$.



$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0,\ y \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{si} \quad x = 0,\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$z = 0$ en $(x_0, y_0) = (0, y_0)$, $y_0 \in \mathbb{R}$.

Exemple d'une fonction continue mais pas différentiable



(Exemple 4, section 4.4)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

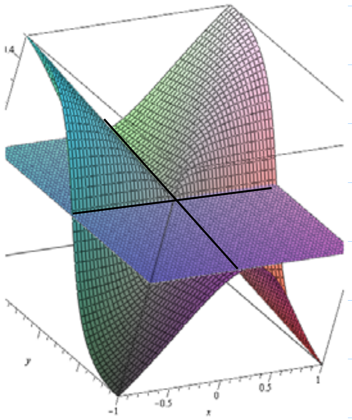
f est continue sur $\mathbb{R}^2$ (voir la section 4.4)

f n'est pas différentiable en $(0,0)$

Méthode A

i) $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h^2 \cdot 0}{h^2+0^2} - 0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{0^2 \cdot h}{0^2+h^2} - 0}{h} = 0$$



ii) de $f(x,y) = 0 + (0,0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \varepsilon(x,y)\sqrt{x^2+y^2}$

on trouve $\varepsilon(x,y) = \dfrac{x^2 y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ si $(x,y) \neq (0,0)$

mais $$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \varepsilon(x,x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{x^3}{(2x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2^{3/2}} \neq 0$$

i) + ii) $z = 0$ n'est pas un plan tangent car f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

4.9. Règles algébriques pour les dérivées des fonctions $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

Voir la série 7

Soit $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions différentiables. (en un point ou sur D). Alors (en un point ou sur D):

$$(f+g)' = f' + g'$$

à valeurs dans $\mathbb{R}$

$$(f \cdot g)' = g \cdot f' + f \cdot g'$$

à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{1}{g} f' - \frac{f}{g^2} g'$$

5. Fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ $(n \geqslant 1, m \geqslant 1)$

5.1. Définitions

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\underline{x} \longmapsto f(\underline{x}) = (f_1(\underline{x}), \dots, f_m(\underline{x}))^T$,
avec $f_i : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in D$, $D \subset \mathbb{R}^n$ ouvert.

Remarque: il suit de la définition de la continuité et de la proposition 2.6 que f est continue (en un point ou sur D), si et seulement si les fonctions f_i, $i = 1 \dots m$, sont toutes continues (en un point ou sur D)

Définition: (différentiable = dérivable dans Dz)

Une fonction f est différentiable en $\underline{x}_0 \in D$, s'il existe une matrice A,

$$A = {}_{m}\overset{n}{\boxed{\;|\;|\;|\;|\;|\;}} = (A_{ij}) \quad \text{matrice } m \times n$$

telle que

$$\left.\begin{aligned}
& f(\underbrace{\underline{x}_0 + \underline{h}}_{\equiv \underline{x}}) = f(\underline{x}_0) + \underbrace{A \cdot \overset{\overset{\mathbb{R}^n}{\cup}}{\underline{h}}}_{\in \mathbb{R}^m} {}_{\equiv (\underline{x} - \underline{x}_0)} + \varepsilon(\underbrace{\underline{x}_0 + \underline{h}}_{\equiv \underline{x}}) \|\underline{h}\| \\
& \text{avec } \varepsilon(\underline{x}_0) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\underline{h} \to 0} \varepsilon(\underbrace{\underline{x}_0 + \underline{h}}_{\equiv \underline{x}}) = 0 \in \mathbb{R}^m
\end{aligned}\right\} (**)$$

Remarque $(**) \Longrightarrow$ continuité de f en $\underline{x}_0$ et

$$A_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\underline{x}_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f_i(\underline{x}_0 + h \cdot e_j) - f_i(\underline{x}_0)}{h}$$

c.-à-d. existence de toutes les dérivées partielles

Notation: on écrira $f'(\underline{x}_0)$ pour l'application linéaire qui correspond à la matrice A

Terminologie: si f est différentiable en tout point $\underline{x}_0 \in D$, on peut définir la fonction

$$\begin{aligned} f' : D &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \\ \underline{x} &\longmapsto f'(\underline{x}) \end{aligned} \qquad \Big(\overset{\wedge}{=} \mathbb{R}^{m \cdot n}\Big)$$

isomorphe

Cette fonction s'appelle la différentielle de f.

Terminologie: l'application linéaire $f'(\underline{x}_0)$ est appelée la dérivée (totale) de f en $\underline{x}_0$ ou encore (la valeur de) la différentielle de f en x_0

Remarque: $(**) \Longleftrightarrow$

$$\lim_{\underline{h} \to 0} \underbrace{\frac{f(\underline{x}_0 + \underline{h}) - f(\underline{x}_0) - f'(\underline{x}_0)\underline{h}}{\| \underline{h} \|}}_{= \varepsilon(\underline{x}_0 + \underline{h})} = 0$$

Attention: (terminologies, notations)

Souvent on trouve dans la littérature la notation

$$\boxed{J_f(\underline{x}_0)} \qquad (= \text{matrice jacobienne de } f \text{ en } \underline{x}_0)$$

au lieu de $f'(\underline{x}_0)$ pour (la matrice de) la dérivée de f en $\underline{x}_0$. Nous utiliserons cette notation surtout pour le cas $n = m$ (changements de variables)

Attention: (terminologies, notations)

Souvent on trouve dans la litérature la notation

$\boxed{J_f(\underline{x}_0)}$ (= matrice jacobienne de f en $\underline{x}_0$)

au lieu de $f'(\underline{x}_0)$ pour (la matrice de) la dérivée de f en $\underline{x}_0$. Nous utiliserons cette notation surtout pour le cas $n = m$ (changements de variables)

Remarque: en utilisant la définition (**) et la proposition 2.6 on voit que f est différentiable si et seulement si les fonctions f_i, $i = 1 \dots m$ sont toutes différentiables.

Conséquence de cette remarque

Théorème ☺ : si les fonctions $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i = 1 \dots m$, $j = 1 \dots n$, sont toutes continues en $\underline{x}_0 \in D$, alors f est différentiable en $\underline{x}_0 \in D$

♭ même Bémol ☹ la réciproque du théorème est fausse !

Définition: une fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$,
$\underline{x} \longmapsto f(\underline{x}) = (f_1(\underline{x}), \dots, f_m(\underline{x}))^T$,
$\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in D$, $D \subset \mathbb{R}^n$ ouvert
est de classe $C^k \equiv C^k(D)$, $k = 1, \dots$
si les fonctions $f_i : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1 \dots m$
sont toutes de classe C^k

Remarque (voir algèbre linéaire)

(1) $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \xleftrightarrow{\text{isomorphe}} \mathbb{R} \ni a \qquad A=(a) \longleftrightarrow a.$

(2) $A \in \mathcal{L}(\underset{(1)}{\underset{\Downarrow}{\mathbb{R}}},\mathbb{R}^m) \xleftrightarrow{\text{isomorphe}} \mathbb{R}^m \ni \underline{a} \qquad A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \xleftrightarrow{\underline{a}=A(1)} \underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$

matrice — vecteur

(3) $A \in \mathcal{L}(\underset{\underline{h}}{\underset{\Downarrow}{\mathbb{R}^n}},\mathbb{R}) \xleftrightarrow{\text{isomorphe}} \mathbb{R}^n \ni \underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

avec le produit scalaire canonique

$$\forall \underline{h},\ A\cdot\underline{h} = (a_1,\dots,a_n)\begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_i h_i = \langle \underline{a},\underline{h} \rangle$$

Conséquence : les anciennes et nouvelles définitions coïncident

$n=m=1$: $f'(x_0) = (a) \xleftrightarrow{(1)} f'(x_0) = a$ (Analyse I)

$n=1, m>1$: $f'(x_0) = \begin{pmatrix} f_1'(x_0) \\ \vdots \\ f_m'(x_0) \end{pmatrix} \xleftrightarrow{(2)} f'(x_0) = \begin{pmatrix} f_1'(x_0) \\ \vdots \\ f_m'(x_0) \end{pmatrix}$

matrice $m\times 1$ — le vecteur tangent défini en section 3

$n>1, m=1$: $f'(\underline{x}_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}_0),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{x}_0)\right) \xleftrightarrow{(3)} \nabla f(\underline{x}_0)$

matrice $1\times n$ — le gradient en coordonnées cartésiennes

5.2. Dérivées des fonctions composées

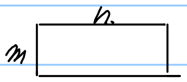
5.2.1 Théorème (dérivation en chaîne)

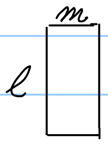
Théorème: soit

$$\begin{tikzcd} D \subset \mathbb{R}^n \arrow[r, "h"] \arrow[rr, bend right, "f = g\circ h"'] & \mathbb{R}^m \arrow[r, "g"] & \mathbb{R}^\ell \end{tikzcd}$$

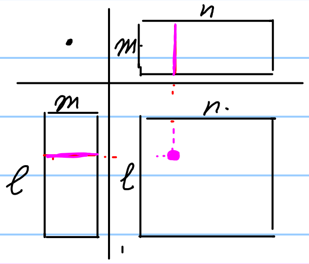
Hypothèse: $D \equiv D(h) \xrightarrow{h} h(D) \subset D(g)$, c-à-d la composition $f = g\circ h$ est bien définie et $D(f) = D$

Supposons que h et g sont de classe C^1 et $\underline{x}_0 \in D$

$h'(\underline{x}_0)$ = une matrice $m \times n$ 

$g'(h(\underline{x}_0))$ = une matrice $\ell \times m$ 

Alors $f = g\circ h$ est de classe C^1 et on a.



$$\boxed{\underbrace{f'(\underline{x}_0)}_{\ell \times n} = \underbrace{g'(h(\underline{x}_0))}_{\ell \times m} \cdot \underbrace{h'(\underline{x}_0)}_{m \times n}} \quad (*)$$

composition des applications linéaires
= multiplication des matrices

Démonstration voir Analyse I, 5.1.5, iv)

Réécriture de (*) en coordonnées

$$D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^\ell$$

$\underline{x} = (x_1, .. x_j .. x_n)$	$\underline{y} = (y_1, ... y_k, .. y_m)$	$\underline{z} = (z_1, .., z_i, .. z_\ell)$
$1 \le j \le n$	$1 \le k \le m$	$1 \le i \le \ell$

$$f'(\underline{x}_0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} (\underline{x}_0) \right) \qquad i = 1 \dots \ell \quad j = 1 \dots n.$$

$$g'(\underline{y}_0) = \left(\frac{\partial g_i}{\partial y_k} (\underline{y}_0) \right) \qquad i = 1 \dots \ell \quad k = 1 \dots m$$

où $\underline{y}_0 = h(\underline{x}_0)$

$$h'(\underline{x}_0) = \left(\frac{\partial h_k}{\partial x_j} (\underline{x}_0) \right) \qquad k = 1 \dots m \quad j = 1 \dots n.$$

$$\boxed{(*) \Leftrightarrow \frac{\partial f_i}{\partial x_j} (\underline{x}_0) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_k} (\underline{y}_0) \frac{\partial h_k}{\partial x_j} (\underline{x}_0).}$$

Notation courte. (= règle mnémotechnique = abus de notation)

$$\left.\begin{array}{l} f_i(\underline{x}) \longleftrightarrow z_i(x_1, \dots, x_n) \\ g_i(\underline{y}) \longleftrightarrow z_i(y_1, \dots, y_m) \\ h_k(\underline{x}) \longleftrightarrow y_k(x_1, \dots, x_n) \end{array}\right\} \text{identification du nom des fonctions et des coordonnées}$$

$$\boxed{(*) \Leftrightarrow \frac{\partial \overset{/\!/ f_i}{z_i}}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \overset{/\!/ g_i}{z_i}}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial \overset{/\!/ h_k}{y_k}}{\partial x_j}}$$

Exemple 5.2.1 (calcul d'une deuxième dérivée partielle).

Soient i, j donnés. En notation courte on trouve pour

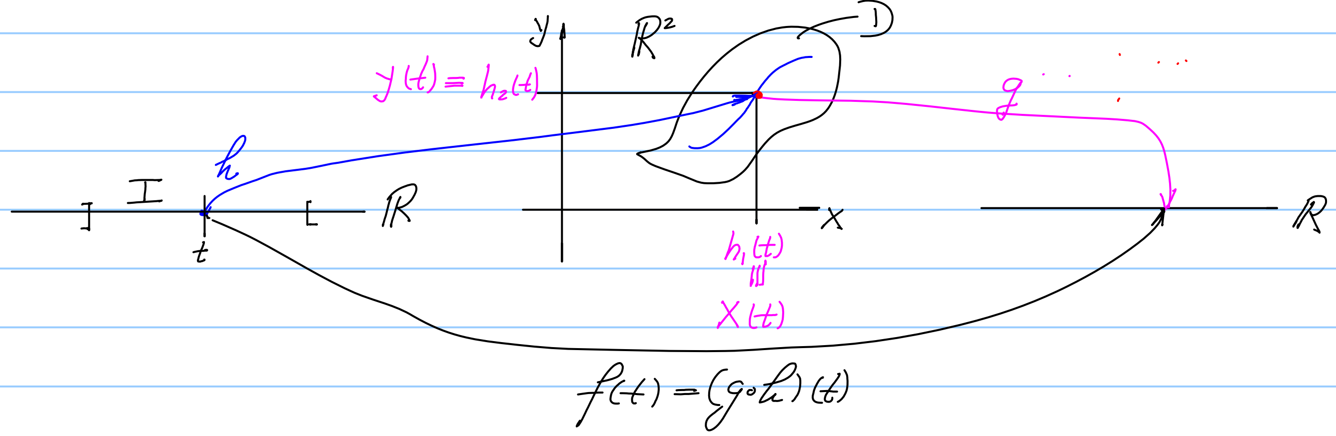
$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j^2} (\underline{x}_0)$$

l'expression :

$$\boxed{\frac{\partial^2 z_i}{\partial x_j^2} = \sum_{\ell=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 z_i}{\partial y_\ell \partial y_k} \frac{\partial y_\ell}{\partial x_j} \frac{\partial y_k}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial z_i}{\partial y_k} \frac{\partial^2 y_k}{\partial x_j^2}}$$

5.2.2. Exemple $n=1$, $m=2$, $\ell=1$

Soit $g: D \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto g(x,y)$, $D \subset \mathbb{R}^2$ ouvert, et $h: I \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \longmapsto h(t) = (h_1(t), h_2(t))^T$, $I \subset \mathbb{R}$ ouvert, tel que $h(t) \in D$ pour tout $t \in I$.

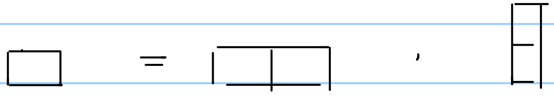


On peut considérer la fonction $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(t) \equiv (g\circ h)(t) := g(h(t))$$

Supposons que g et h sont de classe C^1. Alors on a

$$f'(t) = (g'\circ h)(t)\cdot h'(t)$$



$$\boxed{f'(t) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(h(t)), \frac{\partial g}{\partial y}(h(t))\right)\cdot\begin{pmatrix}h_1'(t)\\ h_2'(t)\end{pmatrix}}$$

Si, par abus de notation, on écrit $h(t) \equiv \begin{pmatrix}h_1(t)\\ h_2(t)\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}$ on obtient

$$f'(t) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x(t),y(t)), \frac{\partial g}{\partial y}(x(t),y(t))\right)\cdot\begin{pmatrix}x'(t)\\ y'(t)\end{pmatrix}$$

et en effectuant la multiplication matricielle

$$f'(t) = \underbrace{\frac{\partial g}{\partial x}(x(t),y(t))\cdot x'(t)}_{\substack{\text{dérivée en chaîne}\\ \text{par rapport à la}\\ \text{première variable}\\ \text{de } g}} + \underbrace{\frac{\partial g}{\partial y}(x(t),y(t))\, y'(t)}_{\substack{\text{dérivée en chaîne}\\ \text{par rapport à la}\\ \text{deuxième variable}\\ \text{de } g.}} \qquad (*)$$

et en notation courte on a pour $(*)$:

$$\boxed{\frac{df}{dt} = \frac{\partial g}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial g}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}}$$

<u>Attention:</u> avec la notation (encore plus courte) de la thermodynamique ceci s'écrit ("multiplier avec dt"), mais voir l'intermezzo plus loin)

$$\boxed{df = \frac{\partial g}{\partial x}\, dx + \frac{\partial g}{\partial y}\, dy.}$$

5.2.3. Exemple $n=1$, $m=3$, $\ell=1$

Sous les mêmes hypothèses que pour 5.2.2 on a

$$g : D \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y,z) \longmapsto g(x,y,z) \quad , D \subset \mathbb{R}^3$$

$$h : I \longrightarrow D, \quad t \longmapsto (h_1(t), h_2(t), h_3(t))^T.$$
$$\equiv (x(t), y(t), z(t))^T$$

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto f(t) = (g\circ h)(t) = g(x(t), y(t), z(t))$$

et $\quad f'(t) = g'(h(t))\cdot h'(t)$

$$\square = \begin{bmatrix}\ & \ & \ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\ \\ \ \\ \ \end{bmatrix} = \text{"trois termes"}$$

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{\partial g}{\partial x}(x(t), y(t), z(t))\, x'(t) \\ &+ \frac{\partial g}{\partial y}(x(t), y(t), z(t))\, y'(t) \\ &+ \frac{\partial g}{\partial z}(x(t), y(t), z(t))\, z'(t) \end{aligned}$$

ou en notation courte :

$$\boxed{\frac{df}{dt} = \frac{\partial g}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial g}{\partial y}\,\frac{dy}{dt} + \frac{\partial g}{\partial z}\,\frac{dz}{dt}.}$$

5.2.4 Exemple $n=2$, $m=2$, $\ell=1$

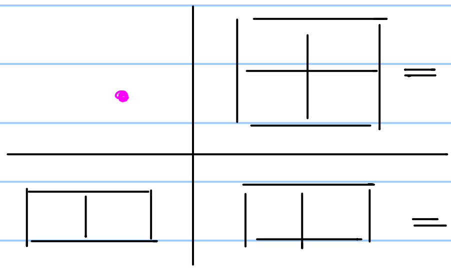
$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "h"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "g"'] & \mathbb{R} \\ (u,v) \arrow[urr, bend right, "f = g \circ h"'] & (x,y) & \end{tikzcd}$$

, g, h de classe C^1

$$g(x,y) \;,\; h(u,v) \equiv \begin{pmatrix} h_1(u,v) \\ h_2(u,v) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \end{pmatrix}$$

$$f(u,v) = (g \circ h)(u,v) = g(h(u,v))$$

$$f'(u,v) = (g' \circ h)(u,v) \cdot h'(u,v)$$ dérivée en chaîne



$$= h'(u,v)$$

$$g'(h(u,v)) =$$

$$= g'(h(u,v)) \cdot h'(u,v)$$

et en notation courte on a pour $f' = \left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}\right)$:

$$\boxed{\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u} &= \frac{\partial g}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}. \\ \frac{\partial f}{\partial v} &= \frac{\partial g}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} \end{aligned}\right\} \quad (*)}$$

INTERMEZZO

Test de non-compréhension

Si on avait l'idée de multiplier dans (*) la première ligne avec ∂u (ou la deuxième par ∂v) et si on simplifiait les ∂x et les ∂y, on obtiendrait

$$\partial f = \partial g + \partial g = 2\partial g \quad ??$$

Si un tel calcul vous semble à priori possible $\Longrightarrow$ retour à la case de départ (définition des fonctions dérivées partielles !)

Notation complète (ce que (*) veut dire) :

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial g}{\partial x}(h_1(u,v), h_2(u,v)) \cdot \frac{\partial h_1}{\partial u}(u,v)$$
$$+ \frac{\partial g}{\partial y}(h_1(u,v), h_2(u,v)) \cdot \frac{\partial h_2}{\partial u}(u,v)$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial g}{\partial x}(h_1(u,v), h_2(u,v)) \cdot \frac{\partial h_1}{\partial v}(u,v)$$
$$+ \frac{\partial g}{\partial y}(h_1(u,v), h_2(u,v)) \cdot \frac{\partial h_2}{\partial v}(u,v)$$

INTERMEZZO

5.2.5. Exemples explicites

1) Soit $f(t) = \ln(t)^{\sin(t)}$, $t>1$, $f'(t) = ?$

i) par calcul direct

$f'(t) = \dots$ voir la série 8A et analyse I

ii) $f(t) = (g \circ h)(t)$ avec

$$g(x,y) = x^y, \quad x>0, \quad h(t) = \begin{pmatrix} \ln(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad t>1.$$

$$g'(x,y) = \left(y x^{y-1}, \; x^y \cdot \ln(x) \right)$$

$$h'(t) = \left(\frac{1}{t}, \cos(t) \right)^T$$

$$f'(t) = (g' \circ h)(t) \cdot h'(t)$$

multiplication des matrices

$$= \left(\sin(t) \, \ln(t)^{\sin(t)-1}, \; \ln(t)^{\sin(t)} \cdot \ln(\ln(t)) \right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{t} \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

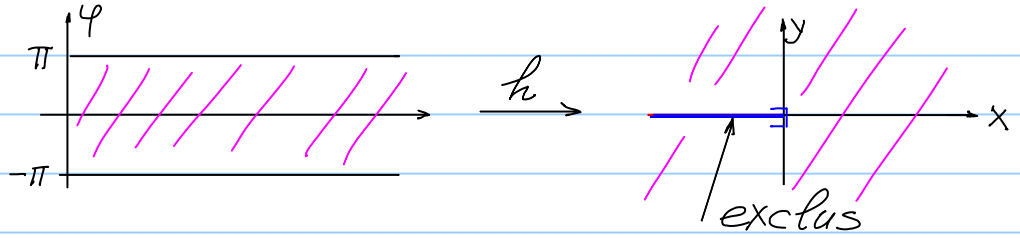
$$= \sin(t) \, \ln(t)^{\sin(t)-1} \cdot \frac{1}{t} + \ln(t)^{\sin(t)} \cdot \ln(\ln(t)) \cos(t)$$

2) $g(x,y) = x^2 + y^2$

$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, le domaine est tout $\mathbb{R}^2$

$$h : \underbrace{]0, \infty[\times]-\pi, \pi[}_{=: D} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus]-\infty, 0]$$

un ensemble ouvert



$x = r\cdot\cos(\varphi)$ $\equiv x(r,\varphi)$ $\equiv h_1(r,\varphi)$

$y = r\cdot\sin(\varphi)$

coordonnées polaires $\equiv y(r,\varphi)$ $\equiv h_2(r,\varphi)$

Remarque: h est une fonction bijective. On a

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \equiv r(x,y)$$

$$\varphi = 2\cdot\arctan\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right) \equiv \varphi(x,y)$$

Soit maintenant $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(r,\varphi) := g(r\cdot\cos(\varphi), r\cdot\sin(\varphi)) = r^2 = (g\circ h)(r,\varphi)$$

avec $h(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cdot\cos(\varphi) \\ r\cdot\sin(\varphi) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x(r,\varphi) \\ y(r,\varphi) \end{pmatrix}$

i) calcul de f' en utilisant que $f(r,\varphi)=r^2$

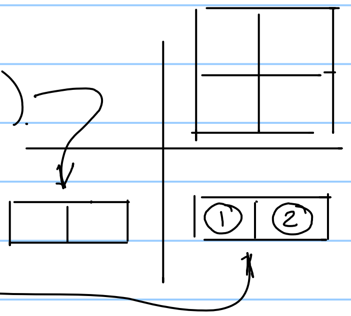
$$f'(r,\varphi) = \left(\frac{\partial f}{\partial r}(r,\varphi), \frac{\partial f}{\partial \varphi}(r,\varphi)\right) = (2r, 0)$$ (continues, donc f différentiable)

ii) calcul de f' par dérivée en chaîne

$$h'(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\cdot\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cdot\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$g'(x,y) = (2x, 2y)$$

$$(g'\circ h)(r,\varphi) = (2\cdot r\cdot\cos(\varphi), 2\cdot r\cdot\sin(\varphi)).$$



$$f'(r,\varphi) = (g'\circ h)(r,\varphi)\cdot h'(r,\varphi) =$$

① : $\frac{\partial f}{\partial r}(r,\varphi) = 2\cdot r\cdot\cos(\varphi)\,\cos(\varphi) + 2r\cdot\sin(\varphi)\,\sin(\varphi) = 2r$

② : $\frac{\partial f}{\partial \varphi}(r,\varphi) = 2\cdot r\cdot\cos(\varphi)\,(-r\cdot\sin(\varphi)) + 2\cdot r\cdot\sin(\varphi)\cos(\varphi) = 0$

iii) même chose en notation courte

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial g}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial g}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}$$

"évalué en"

$$= 2x\cdot\cos(\varphi) + 2y\cdot\sin(\varphi)\Big|_{\substack{x=r\cdot\cos(\varphi)\\ y=r\cdot\sin(\varphi)}} = 2r.$$

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{\partial g}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial g}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial \varphi}$$

$$= 2x\cdot(-r\sin(\varphi)) + 2y\cdot r\cdot\cos(\varphi)\Big|_{\substack{x=r\cdot\cos(\varphi)\\ y=r\cdot\sin(\varphi)}} = 0$$

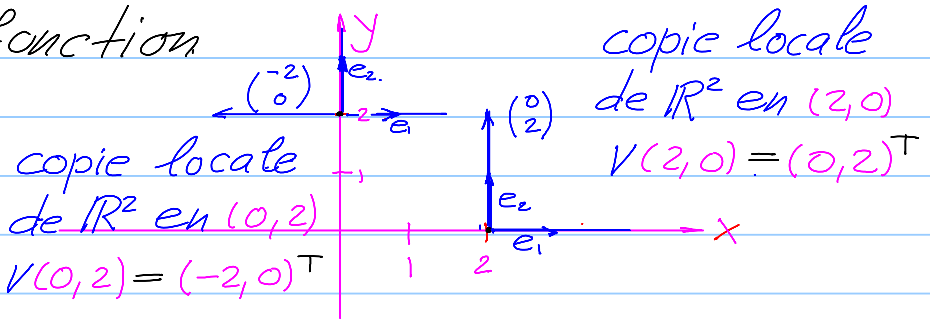
5.3. Fonctions différentiables de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ $(m=n)$

5.3.1. Représentation graphique (champ de vecteurs)

Exemple: $V: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x,y) \longmapsto V(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$

nom de la fonction

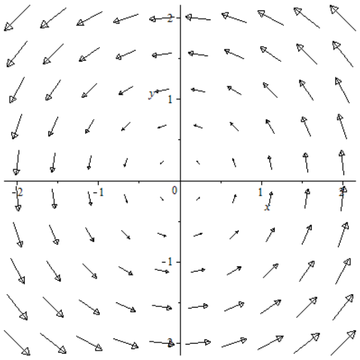


copie locale de $\mathbb{R}^2$ en $(2,0)$

$V(2,0) = (0,2)^T$

copie locale de $\mathbb{R}^2$ en $(0,2)$

$V(0,2) = (-2,0)^T$

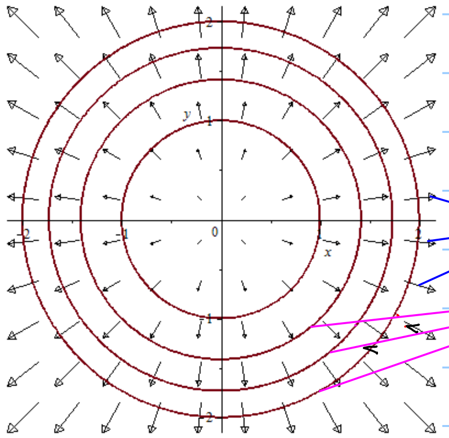


En chaque point $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ du domaine de définition de la fonction V on attache une copie de $\mathbb{R}^2$, et l'image $V(x,y)\in\mathbb{R}^2$ est interprétée comme un vecteur dans ce référentiel.

Remarque: si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1, alors $V = \nabla f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est représenté par un champ de vecteurs

Exemple: soit $f(x,y) = x^2 + y^2$, $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

alors $V(x,y) = (\nabla f)(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$



le champ de vecteur $V = \nabla f$

lignes de niveau de f

Ces deux informations sur f sont étroitement liées.

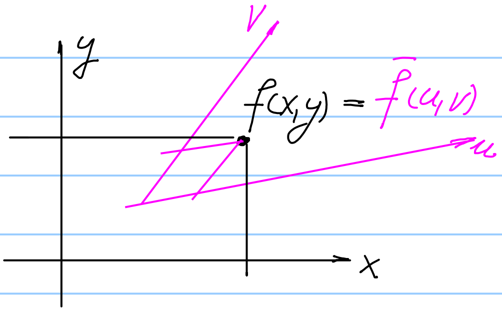
(voir plus loin)

5.4 Changements de coordonnées (fonctions bijectives)

5.4.1 Définitions (pour $n=2$)

Définition Soient les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\bar{f} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ et $G : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ avec G une fonction bijective telles que $\bar{f}(u,v) = f(x,y)$ si $(x,y) = G(u,v)$. Alors G est appelé un changement de coordonnées et $H \equiv G^{-1}$ le changement de coordonnées inverse

$$\begin{tikzcd}
(x,y) \in \mathbb{R}^2 \arrow[r, "f"] \arrow[d, shift left, "H \equiv G^{-1}"] & \mathbb{R} \\
(u,v) \in \mathbb{R}^2 \arrow[u, shift left, "\text{bijective}\quad G"] \arrow[ur, "\bar{f}"'] &
\end{tikzcd}$$



Remarque: donné f et G une fonction bijective on peut définir $\bar{f}$ par $\bar{f}(u,v) = f(G(u,v))$. $\bar{f}$ exprime alors la fonction f dans les "nouvelles" coordonnées.

Réciproquement: $f(x,y) = \bar{f}(G^{-1}(x,y)) = \bar{f}(H(x,y))$

Théorème: soit $\tilde{D} \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert et $G : \tilde{D} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue injective. Alors $\mathrm{Im}(G) \equiv G(\tilde{D}) \equiv D$ est un ensemble ouvert et $H \equiv G^{-1} : D \longrightarrow \tilde{D}$ est une fonction continue.

Terminologie: une telle fonction G est appelée un homéomorphisme.

⌈ **Démonstration:** voir le cour de topologie generale; trop difficile pour ce cours. Pour $n=1$ voir l'itermezzo, semaine 4. ⌋

Remarque: si $G : \tilde{D} \longrightarrow D$ est bijective de classe C^1 et si $\forall \tilde{x} \in \tilde{D}$, $\det(J_G(\tilde{x})) \neq 0$, alors H^{-1} est aussi de classe C^1, et G est appelé un difféomorphism (voir 5.4.2).

5.4.2. Dérivée de la fonction réciproque $(n=2)$

Soit $\quad H = G^{-1}$

Donc $\quad (H \circ G)(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \qquad (*)$

$\quad (G \circ H)(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

De $(*)$ on trouve par dérivation en chaîne

$$(H' \circ G)(u,v) \cdot G'(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ou avec $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = G(u,v)$

$$H'(x,y) \cdot G'(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ou avec la notation des matrices jacobiennes:

$$\boxed{J_H(x,y) \cdot J_G(u,v) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{application identitée}}}{J_{Id}} \qquad (*).}$$

ou encore

$$\boxed{\begin{aligned} J_H(x,y) &= \left(J_G(u,v)\right)^{-1} \\ &= \left(J_G \circ H(x,y)\right)^{-1} \end{aligned}}$$

Voir Analyse I, ceci généralise l'identité pour la dérivée d'une fonction réciproque d'une variable.

<u>Remarque:</u> $(*) \Rightarrow \det(J_H(x,y)) \cdot \det(J_G(u,v)) = 1$

pour $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = G(u,v) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = H(x,y)$

<u>Théorème:</u> si $G : \tilde{D} \longrightarrow D$, $\tilde{D}, D \subset \mathbb{R}^n$ ouverts, est bijéctive avec G et $H = G^{-1}$ de classe C^1, alors $\det(J_G) \neq 0$ en tout point de $\tilde{D}$.
Réciproquement, si G est de classe C^1 et si $\det(J_G) \neq 0$ en un point de $\tilde{D}$, G est bijéctive et H est de classe C^1 dans un voisinage de ce point.

<u>Remarque:</u> $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $G(x) = x^3$ ne satisfait pas les conditions du théorème sur $\tilde{D} = \mathbb{R}$

Idées pour la démonstration du théorème (dans $\mathbb{R}^n$).

"$\Longrightarrow$" en tout $\tilde{x}_0 \in \tilde{D}$ on a, pour $x_0 = G(\tilde{x}_0)$,

$$J_G(\tilde{x}_0) \cdot J_H(x_0) = J_{id}.$$

$J_G(\tilde{x}_0)$ est donc inversible et $\det(J_G(\tilde{x}_0)) \neq 0$

"$\Longleftarrow$" Soit $\tilde{x}_0 \in \tilde{D}$ et $x_0 = G(\tilde{x}_0)$. G est différentiable en $\tilde{x}_0$ et donc, pour $\tilde{x}$ proche de $\tilde{x}_0$:

$$\underbrace{G(\tilde{x})}_{\equiv x} = \underbrace{G(\tilde{x}_0)}_{\equiv x_0} + \underbrace{G'(\tilde{x}_0)}_{\substack{J_G(\tilde{x}_0)\\ \text{inversible}}}(\tilde{x}-\tilde{x}_0) + \underbrace{\tilde{r}(\tilde{x})}_{\lim_{\tilde{x}\to\tilde{x}_0} \tilde{r}(\tilde{x}) = 0 = \tilde{r}(\tilde{x}_0)}\|\tilde{x}-\tilde{x}_0\|$$

Ceci implique que

$$\tilde{x} = \tilde{x}_0 + \left(G'(\tilde{x}_0)\right)^{-1}(x - x_0) - \left(G'(\tilde{x}_0)\right)^{-1}\tilde{r}(\tilde{x})\|\tilde{x}-\tilde{x}_0\| \equiv f_x(\tilde{x})$$

Donné x proche de x_0, la suite $(\tilde{x}_n)$, définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $\tilde{x}_n = f_x(\tilde{x}_{n-1})$ converge vers $\tilde{x} =: H(x)$, et en particulier $\tilde{x}_0 = H(x_0)$

et donc avec $H(x) := \tilde{x}$, $H'(x_0) := (G'(\tilde{x}_0))^{-1}$, $H(x_0) = \tilde{x}_0$,

$$H(x) = H(x_0) + H'(x_0)(x - x_0) + r(x)\|x - x_0\|,$$

et H est différentiable en x_0 si

$$\lim_{x\to x_0} r(x) = \lim_{x\to x_0}\left(H'(x_0)\,\tilde{r}(H(x))\frac{\|H(x)-\tilde{x}_0\|}{\|x-x_0\|}\right) = 0,$$

ce qui suit de la dérivabilité stricte d'une fonction de classe C^1 (pas discutée dans ce cours):

$$G(\tilde{x}) - G(\tilde{y}) = G'(\tilde{x}_0)(\tilde{x}-\tilde{y}) + r(\tilde{x},\tilde{y})\|\tilde{x}-\tilde{y}\|, \quad \lim_{(\tilde{x},\tilde{y})\to(\tilde{x}_0,\tilde{x}_0)} r(\tilde{x},\tilde{y}) = 0.$$

5.4.3. Le laplacien d'une fonction

Définition (le Laplacien de f). Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto f(x,y)$ de classe C^2. Si (x,y) sont des coordonnées cartésiennes, la fonction

$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

la trace de la matrice

$$(x,y) \longmapsto g(x,y) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)(x,y) = tr(Hess(f))(x,y)$$

est appelée le laplacien de f, et l'application (linéaire)

$$\Delta : C^2(\mathbb{R}^2) \longrightarrow C^0(\mathbb{R}^2)$$

$$f \longmapsto g = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = tr(Hess(f))$$

est appelée le laplacien

Notation: on écrit souvent $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, où $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ sont interprétés comme les applications linéaires de $C^2(\mathbb{R}^2)$ dans $C^0(\mathbb{R}^2)$ qui associent à la fonction f respectivement la fonction $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

Remarque: une fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, D ouvert, telle que $\Delta f = 0$ dans D est appelée harmonique dans D.

5.4.4. Le laplacien en coordonnées polaires

Coordonnées polaires (voir 5.2.5. Ex. 2)

$$G : \,]0,\infty[\, \times \,]-\pi,\pi[\, \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \,]-\infty, 0]$$

$$(r,\varphi) \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = G(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cdot\cos(\varphi) \\ r\cdot\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto f(x,y)$ de classe C^2, x, y des coordonnées cartésiennes. On a le schéma suivant :

$$\begin{tikzcd}
f \arrow[r, "G"] \arrow[d, "\Delta"] & \bar{f} = f \circ G \arrow[d, "\bar{\Delta}"] \\
g = \Delta f \arrow[r, "G"] & \bar{g} = g \circ G = \bar{\Delta} \bar{f}
\end{tikzcd}$$

Proposition (Laplacien en coordonnées polaires)

$$(\bar{\Delta} \bar{f})(r,\varphi) = \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial r^2}(r,\varphi) + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{f}}{\partial r}(r,\varphi) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial \varphi^2}(r,\varphi)$$

c.-à-d. $$\bar{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

Démonstration

$$J_G(r,\varphi) \equiv G'(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \overset{\frac{\partial x}{\partial r}}{\overset{\|}{\cos(\varphi)}} & \overset{\frac{\partial x}{\partial \varphi}}{\overset{\|}{-r\cdot\sin(\varphi)}} \\ \underset{\frac{\partial y}{\partial r}}{\underset{\|}{\sin(\varphi)}} & \underset{\frac{\partial y}{\partial \varphi}}{\underset{\|}{r\cdot\cos(\varphi)}} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

De $\bar{f}(r,\varphi) = f(x,y) = f(r\cdot\cos(\varphi), r\cdot\sin(\varphi))$ on obtient

$$\frac{\partial \bar f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot \overset{\frac{\partial x}{\partial r}}{\overset{\|}{\cos(\varphi)}} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot \overset{\frac{\partial y}{\partial r}}{\overset{\|}{\sin(\varphi)}}$$

$$\frac{\partial^2 \bar f}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cos(\varphi)^2 + 2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cos(\varphi)\sin(\varphi) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\sin(\varphi)^2$$

$$\frac{\partial \bar f}{\partial \varphi} = \frac{\partial f}{\partial x}\underset{\frac{\partial x}{\partial \varphi}}{\underset{\|}{(-r\cdot\sin(\varphi))}} + \frac{\partial f}{\partial y}\underset{\frac{\partial y}{\partial \varphi}}{\underset{\|}{(r\cdot\cos(\varphi))}}$$

$$\frac{\partial^2 \bar f}{\partial \varphi^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-r\sin(\varphi))^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(-r\cdot\sin(\varphi))\cdot(r\cdot\cos(\varphi))$$
$$+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cdot\cos(\varphi))^2.$$
$$+\frac{\partial f}{\partial x}(-r\cdot\cos(\varphi)) + \frac{\partial f}{\partial y}(-r\cdot\sin(\varphi))$$

et si on substitue dans l'expression donnée pour $\bar\Delta$ on obtient:

$$\frac{\partial^2 \bar f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial \bar f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \bar f}{\partial \varphi^2}$$
$$= \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cos(\varphi)^2} + \cancel{2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cos(\varphi)\sin(\varphi)} + \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\sin(\varphi)^2}$$
$$+\cancel{\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial x}\cos(\varphi)} + \cancel{\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial y}\sin(\varphi)}$$
$$+\underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\sin(\varphi)^2} \cancel{- 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cos(\varphi)\cdot\sin(\varphi)} + \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cos(\varphi)^2}$$
$$\cancel{-\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial x}\cos(\varphi)} \cancel{-\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial y}\sin(\varphi)}$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

ce qui montre que $\bar\Delta$ est bien le laplacien en coordonnées polaires ∎

Comment trouver l'expression pour $\bar{\Delta}$? Il faut travailler avec $H = G^{-1}$. On a :

$$J_H(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cdot\cos(\varphi) \end{pmatrix}^{-1} \Bigg|_{\binom{r}{\varphi} = H(x,y)}$$

$$= \begin{pmatrix} \overset{\overset{\frac{\partial r}{\partial x}}{\|}}{\cos(\varphi)} & \overset{\overset{\frac{\partial r}{\partial y}}{\|}}{\sin(\varphi)} \\ \underset{\underset{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\|}}{-\frac{1}{r}\sin(\varphi)} & \underset{\underset{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\|}}{\frac{1}{r}\cos(\varphi)} \end{pmatrix} \Bigg|_{\binom{r}{\varphi} = H(x,y)} \tag{2}$$

et on peut donc calculer $\bar{\Delta}$. On a

$$f(x,y) = \bar{f}(r,\varphi) = \bar{f}(H(x,y))$$

et on obtient avec (2) :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial r}\cos(\varphi) + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \varphi}\left(-\frac{1}{r}\sin(\varphi)\right)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = {} & \underline{\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial r^2}\cos(\varphi)^2} + 2\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial r \partial \varphi}\cos(\varphi)\left(-\frac{1}{r}\sin(\varphi)\right) \\ & + \underline{\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial \varphi^2}\left(-\frac{1}{r}\sin(\varphi)\right)^2} \\ & + \underline{\frac{\partial \bar{f}}{\partial r}\left(-\sin(\varphi)\left(-\frac{1}{r}\sin(\varphi)\right)\right)} \\ & + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \varphi}\left(\left(\frac{1}{r^2}\sin(\varphi)\right)\cos(\varphi) - \frac{1}{r}\cos(\varphi)\left(-\frac{1}{r}\sin(\varphi)\right)\right)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial r}\sin(\varphi) + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{r}\cos(\varphi)\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \underbrace{\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial r^2} \sin(\varphi)^2}_{} + \cancel{2 \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial r \partial \varphi} \sin(\varphi) \left(\frac{1}{r} \cos(\varphi)\right)}$$

$$+ \underbrace{\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial \varphi^2} \left(\frac{1}{r} \cos(\varphi)\right)^2}_{}$$

$$+ \underbrace{\frac{\partial \bar{f}}{\partial r} \cos(\varphi) \left(\frac{1}{r} \cos(\varphi)\right)}_{}$$

$$+ \frac{\partial \bar{f}}{\partial \varphi} \left(\left(-\frac{1}{r^2} \sin(\varphi)\right) \cdot \cos(\varphi) \cancel{- \frac{1}{r} \sin(\varphi) \left(\frac{1}{r} \cos(\varphi)\right)} \right)$$

et donc

$$\Delta f(x,y) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)(x,y)$$

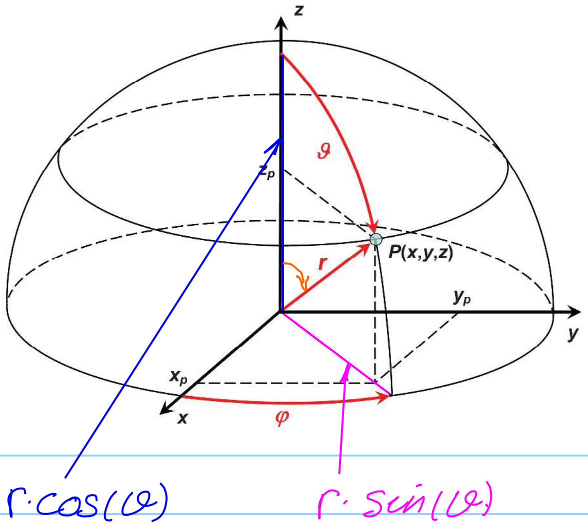
$$= \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial r^2}(r,\varphi) + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{f}}{\partial r}(r,\varphi) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial \varphi^2}(r,\varphi)$$

$$= \bar{\Delta} \bar{f}(r,\varphi)$$

si $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = G(r,\varphi) \iff \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = H(x,y)$

5.4.5 le laplacien en coordonnées sphériques (voir série 9A)

Définition des coordonnées sphériques



$$0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi$$
$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$$
$$0 \leqslant r < \infty$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= r\cdot\sin(\vartheta)\cos(\varphi)\\ y &= r\cdot\sin(\vartheta)\sin(\varphi)\\ z &= r\cdot\cos(\vartheta)\end{aligned}}$$

r, ϑ, φ les coordonnées sphériques

$$G : [0,\infty[\times [0,\pi] \times [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{surjective}$$

$$\underbrace{]0,\infty[\times]0,\pi[\times]0,2\pi[}_{=: \tilde{D},\ \text{ouvert} \subset \mathbb{R}^3} \xrightarrow[\text{bijective}]{} \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,0,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geqslant 0\}.$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = G(r,\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cdot\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ r\cdot\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ r\cdot\cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$

$$J_G(r,\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} \sin(\vartheta)\cos(\varphi) & r\cos(\vartheta)\cos(\varphi) & -r\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ \sin(\vartheta)\sin(\varphi) & r\cos(\vartheta)\sin(\varphi) & r\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \boxed{\cos(\vartheta)} & \boxed{-r\sin(\vartheta)} & 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\det J_G(r,\vartheta,\varphi) =}$ "développer la dernière ligne"

$$= \underbrace{r\cdot\sin(\vartheta)\sin(\vartheta)^2\cdot r}_{} + \underbrace{\cos(\vartheta)\, r^2 \sin(\vartheta)\cos(\vartheta)}_{}$$

$$\boxed{= r^2\cdot\sin(\vartheta)}$$ apprendre par cœur

5.5. Généralisations (voir Analyse III pour les détails)

Définition (le gradient, voir aussi § 4.5.3)

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $\underline{x} \longmapsto f(\underline{x})$, $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ une fonction de classe C^1. Le gradient de f, $\operatorname{grad} f \equiv \nabla f$, est la fonction:

$$\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^T$$

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} f \equiv \nabla f : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \underline{x} &\longmapsto \nabla f(\underline{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{x})\right)^T \end{aligned}$$

On a le schéma suivant:

$$\begin{tikzcd} f \arrow[r, bend left, "\nabla", "\text{application linéaire}"'] & \nabla f \end{tikzcd}$$

$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1; C^k, $k \geq 1$

$\nabla f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^0; C^{k-1}, $k \geq 1$

Définition (la divergence):

Soit $v : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\underline{x} \longmapsto v(\underline{x}) = (v_1(\underline{x}), \dots, v_n(\underline{x}))^T$ $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ une fonction de classe C^1. La divergence de v, $\operatorname{div} v \equiv \nabla \cdot v$ est la fonction

$\equiv \langle \nabla, v \rangle$ ("produit scalaire")

$$\begin{aligned} \operatorname{div} v \equiv \nabla \cdot v : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \underline{x} &\longmapsto \nabla \cdot v(\underline{x}) = \frac{\partial v_1}{\partial x_1}(\underline{x}) + \dots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n}(\underline{x}) \end{aligned}$$

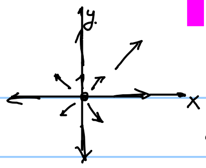
On a le schéma suivant:

$$\begin{tikzcd} v \arrow[r, bend left, "\nabla \cdot", "\text{application linéaire}"'] & \nabla \cdot v \end{tikzcd}$$

$v : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1; C^k, $k \geq 1$

$\nabla \cdot v : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^0; C^{k-1}, $k \geq 1$

Exemple: $v : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $v(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



les sources de v

$$\nabla \cdot v : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad \nabla \cdot v\,(x,y) = 1 + 1 = 2$$

Définition (le Laplacien)

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $\underline{x} \longmapsto f(\underline{x})$, $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ une fonction de classe C^2. Le laplacien de f, Δf est la fonction

$$\Delta f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\underline{x} \longmapsto \Delta f(\underline{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\underline{x}) + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\underline{x})$$

On a le schéma suivant

$$\begin{tikzcd} f \arrow[r, bend left, "\Delta", "\text{application linéaire}"'] & \Delta f \end{tikzcd}$$

$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 ; C^k, $k \geqslant 2$

$\Delta f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^0 ; C^{k-2}, $k \geqslant 2$

Identité: soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 Alors

$$\Delta f(\underline{x}) = \big((\nabla \cdot \nabla) f\big)(\underline{x}) = \nabla \cdot (\nabla f)\,(\underline{x})$$

"div · grad = Laplace"

Définition (le rotationnel, $n=3$)

Soit $v : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\underline{x} \longmapsto v(\underline{x}) = (v_1(\underline{x}), v_2(\underline{x}), v_3(\underline{x}))^T$, $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ une fonction de classe C^1. Le rotationnel de v, $\operatorname{rot} v \equiv \nabla \times v$ est la fonction

$$\operatorname{rot} v \equiv \nabla \times v : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\underline{X} \longmapsto \nabla\times V(\underline{X}) = \left(\begin{array}{c} \frac{\partial V_3}{\partial x_2}(\underline{X}) - \frac{\partial V_2}{\partial x_3}(\underline{X}) \\ -\frac{\partial V_3}{\partial x_1}(\underline{X}) + \frac{\partial V_1}{\partial x_3}(\underline{X}) \\ \frac{\partial V_2}{\partial x_1}(\underline{X}) - \frac{\partial V_1}{\partial x_2}(\underline{X}) \end{array}\right) \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\| \qquad\qquad\qquad\qquad \|$$

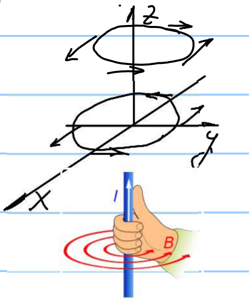
$$= \begin{vmatrix} \overset{+}{e_1} & \overset{-}{e_2} & \overset{+}{e_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix} \leftarrow \text{det}$$

On a le schéma suivant:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\nabla\times", "\text{application linéaire}"'] & \nabla\times V \end{tikzcd}$$

$V: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1: C^k $k\geq 1$

$\nabla\times V: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^0; C^{k-1}, $k\geq 1$



Exemple: $V: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $V(x,y,z) = (-y, x, 0)^T$

$\nabla\times V: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\nabla\times V(x,y,z) = (0,0,2)^T$

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1+1 \end{pmatrix}$$

Identités: soit $V: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ et $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2. Alors

$\nabla\cdot(\nabla\times V) = 0$ "div rot = 0"

$\nabla\times\nabla f = 0$ "rot grad = 0"

$\nabla\times\nabla\times V = \nabla(\nabla\cdot V) - \Delta V$

"rot rot = grad div − Laplace"

où $\Delta V(\underline{X}) = (\Delta V_1(\underline{X}), \Delta V_2(\underline{X}), \Delta V_3(\underline{X}))^T$

5.6. Dérivée d'une intégrale dépendant d'un paramètre

(Application de la dérivée en chaîne)

Proposition: Soit

$$F(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)\, dx$$

$a, b \in C^1(\mathbb{R})$
$f \in C^1(\mathbb{R}^2)$

Alors

$$\left.\begin{aligned} F'(t) &= f(b(t),t)\, b'(t) - f(a(t),t)\, a'(t) \\ &\quad + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\, dx \end{aligned}\right\} \quad (**)$$

Remarque: dans le cas particulier où $a(t) \equiv a \in \mathbb{R}$, $b(t) \equiv b \in \mathbb{R}$ sont des fonctions constantes on obtient de $(**)$:

$$F'(t) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\, dx \qquad (*)$$

"dérivée sous l'intégrale"

Idée de la démonstration de $(*)$

$$F'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{F(t+h) - F(t)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\int_a^b f(x,t+h)\, dx - \int_a^b f(x,t)\, dx \right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_a^b \left(f(x,t+h) - f(x,t) \right) dx$$

$$= \lim_{h\to 0} \int_a^b \frac{f(x,t+h) - f(x,t)}{h}\, dx.$$

$$\overset{?}{=} \int_a^b \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{f(x,t+h)-f(x,t)}{h}}_{=\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)} dx$$

oui pour $a,b \in \mathbb{R}$ $(a,b \neq \pm\infty)$ et pour $\frac{\partial f}{\partial t}$ une fonction continue, car dans ce cas on a $\forall \varepsilon > 0$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) - \frac{f(x,t+h)-f(x,t)}{h} \right| < \varepsilon$$

pour tout t donné et h suffisamment petit avec <u>h indépendant de $x \in [a,b]$.</u>

Démonstration de $(**)$

On pose $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(a,b,t) = \int_a^b f(x,t)\,dx$

$$= -\int_b^a f(x,t)\,dx$$

On a

$\frac{\partial g}{\partial b}(a,b,t) = f(b,t)$ Analyse I $\overset{!}{\nabla}$, théorème fondamental du calcul intégral.

$\frac{\partial g}{\partial a}(a,b,t) = -f(a,t)$ ——— idem ———

$\frac{\partial g}{\partial t}(a,b,t) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx$ par $(*)$

et donc, puisque $F(t) = g(\underbrace{a(t), b(t), t}) = g \circ h(t)$ on obtient:

$h(t) \equiv (a(t), b(t), t)^T$

$$F'(t) = g'(h(t)) \cdot h'(t)$$

$$= \left(\frac{\partial g}{\partial a}(a(t),b(t),t) + \frac{\partial g}{\partial b}(a(t),b(t),t) + \frac{\partial g}{\partial t}(a(t),b(t),t) \right) \cdot \begin{pmatrix} a'(t) \\ b'(t) \\ 1 \end{pmatrix}$$

= "formule du théorème"

Généralisation aux intégrales généralisées

Proposition: Soit $a \in \mathbb{R}$, I un intervalle, $f \in C^1([a,\infty[\times I)$, et soient les intégrales

$$F(t) = \int_a^{+\infty} f(x,t)\,dx \quad \text{et} \quad \int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx$$

uniformement convergents. Alors, $F \in C^1(I)$ et

$$F'(t) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx$$

Remarque: uniformement convergent veut dire, que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists A_0 \geq a$, tel que $\forall A \geq A_0$, $\forall t \in I$:

$$\left| \int_A^{+\infty} f(x,t)\,dx \right| \leq \varepsilon$$

La démonstration est identique à celle pour les intégrales sur un intervalle fini, en utilisant la convergence uniforme de l'intégrale au lieu de la continuité uniforme de f dans les estimations.

Remarque: on a $\left| \int_a^\infty f(x,t)\,dx \right| \leq \int_a^\infty |f(x,t)|\,dx$.

et de montrer que $\int_a^\infty \left| \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) \right| dx \leq \infty$

implique la convergence uniforme des deux intégrales de la proposition.

Exemples

1) $$F(t) = \int_0^\pi \underbrace{\frac{\sin(t \cdot x)}{x}}_{= f(x,t)} dx \,, \quad F'\left(\tfrac{1}{4}\right) = ?$$

$= f(x,t)$ de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$, à vérifier!
(avec $f(0,t) = t$)

$$F'(t) = \int_0^{\pi} \frac{\cos(tx)\ x}{x}\, dx = \left[\frac{1}{t}\sin(tx)\right]_{x=0}^{x=\pi}$$

$$= \frac{1}{t}\sin(\pi\cdot t)$$

$$F'\left(\frac{1}{4}\right) = 4\cdot\sin\left(\pi\cdot\frac{1}{4}\right) = 4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\cdot\sqrt{2}$$

2) $F(t) = \int_0^{t^2} \frac{\sin(tx)}{x}\, dx$, $F'\left(\frac{1}{4}\right) = ?$

$$F'(t) = \frac{1}{t^2}\sin(t\cdot t^2)\cdot(2t) + \left[\frac{1}{t}\sin(tx)\right]_{x=0}^{x=t^2}$$

$$= \frac{2}{t}\sin(t^3) + \frac{1}{t}\sin(t^3) = \frac{3}{t}\sin(t^3)$$

$$F'\left(\frac{1}{4}\right) = 12\cdot\sin\left(\frac{1}{64}\right)$$

3) $F :]1,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$F(t) := \int_0^{\infty} \underbrace{e^{-tx}}_{=f(x,t)}\, dx \quad \ulcorner := \lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-tx} dx$$

$$= \lim_{R\to\infty}\left[-\frac{1}{t}e^{-tx}\right]_{x=0}^{x=R} = \lim_{R\to\infty}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t}e^{-tR}\right)$$

$= \frac{1}{t}$. (voir Analyse I) $\lrcorner$

$\forall t \in]1,\infty[$, $x \in [0,\infty[$, $0 \le e^{-tx} \le e^{-x}$,
et donc , $\forall \varepsilon > 0$

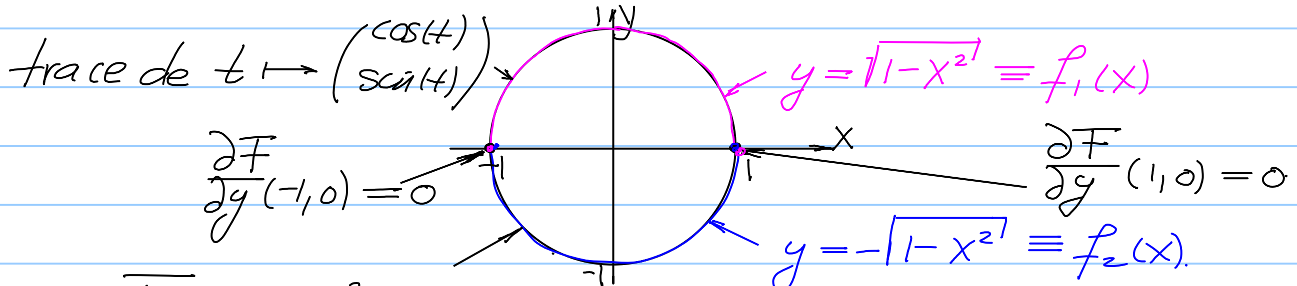
$$\left|\int_A^{\infty} e^{-tx} dx\right| \le \int_A^{\infty} e^{-x} dx = e^{-A} \le \varepsilon$$

si $A \geq A_0 = \max\{0, -\ln(\varepsilon)\}$, et similaire pour $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = e^{-tx}(-x)$. Les deux intégrales sont donc uniformement convergentes et on obtient:

$$F'(t) = \int_0^{\infty} e^{-tx}(-x)\, dx \quad \ulcorner = \ldots = -\frac{1}{t^2} \lrcorner .$$

6. Théorème des fonctions implicites

6.1. Introduction, théorèmes, exemples



$F(x,y) = x^2+y^2-1 = 0$

<u>cercle</u>: • ligne de niveau 0 de $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto F(x,y) = x^2+y^2-1$

• union des graphes de $f_1, f_2 : [-1,1] \to \mathbb{R}$

• trace de $g: [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto g(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$

f_1 et f_2 sont continues sur $[-1,1]$ et dérivables sur $]-1,1[$.

<u>Question</u>: comment définir f_1 et f_2 si on ne peut pas isoler y dans l'équation $F(x,y) = 0$?

<u>Théorème des fonctions implicites</u>: soit $D \subset \mathbb{R}^2$, ouvert, et $F: D \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto F(x,y)$ une fonction de classe C^1 telle que

$$\boxed{F(x_0, y_0) = 0 \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0}$$

pour un $(x_0, y_0) \in D$. Alors l'équation $F(x,y) = 0$ définit localement (c.-à-d. pour x proche de x_0) une fonction $f(x)$ de classe C^1 telle que

$$\boxed{f(x_0) = y_0 \quad , \quad F(x, f(x)) = 0}$$

De plus

$$\boxed{f'(x) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}} \qquad (*)$$

Démonstration de (*) :

On a que $F(x, f(x)) = 0$ pour x proche de x_0,
et donc

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))\, f'(x) = 0$$

De (*) on trouve en particulier pour $x = x_0$ en utilisant que $f(x_0) = y_0$

$$f'(x_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)} \qquad (**)$$

Remarque: (**) explique aussi la condition

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$$

Démonstration du théorem : voir la demonstration du théorème général plus loin.

Dérivées d'ordre supérieur

De (*) on trouve, pour F de classe C^2:

$$f''(x) = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, f(x)) + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, f(x)) \cdot f'(x)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}$$

$$+ \underbrace{\boxed{\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))\right)^2}}}_{\substack{\| \\ -f'(x) \text{ par } (*).}} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, f(x)) + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, f(x)) \cdot f'(x) \right)$$

et donc en particulier

$$\boxed{f''(x_0) = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0,y_0) + 2\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)\cdot f'(x_0) + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x_0,y_0)\cdot f'(x_0)^2}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)}}$$

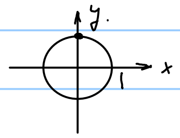
avec $f'(x_0)$ donné par (**). On peut donc calculer $f'(x_0)$, $f''(x_0)$ (et puis, pour F de classe C^k, récursivement $f^{(\ell)}(x_0)$, $\ell=3,\ldots,k$, et donc le développement limité de f en x_0), sans avoir besoin d'une expression explicite pour f.

<u>Remarque:</u> si $f'(x_0)=0$ $\left(\Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)=0 \text{ par } (**)\right)$ on a simplement

$$f''(x_0) = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0,y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)} \qquad (***)$$

Exemples

1) $F(x,y) = x^2+y^2-1$



soit $(x_0, y_0) = (0,1)$ (à titre d'exemple)

on a $F(0,1) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial y}(0,1) = 2y\Big|_{(0,1)} = 2 \neq 0$

par le théorème des fonctions implicites il existe donc une fonction f telle que

$$1 = y_0 = f(x_0) = f(0) \quad \text{et} \quad F(x, f(x)) = 0 ,$$

au moins pour $|x - x_0| = |x|$ suffisamment petit. En fait $f(x) = f_1(x) = \sqrt{1-x^2}$ pour $|x| < 1$.
De plus on a par (**)

$$f'(0) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(0,1)}{\frac{\partial F}{\partial y}(0,1)} = - \frac{2x}{2y}\Big|_{(0,1)} = - \frac{2 \cdot 0}{2 \cdot 1} = 0$$

et donc, par (***)

$$f''(0) = - \frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0,1)}{\frac{\partial F}{\partial y}(0,1)} = - \frac{2}{2y}\Big|_{(0,1)} = -1$$

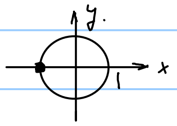
A comparer avec le calcul direct: $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \quad , \quad f'(0) = 0.$$

$$f''(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x^2}{(1-x^2)^{3/2}} , \quad f''(0) = -1$$

2) $F(x,y) = x^2+y^2-1$



soit $(x_0,y_0) = (-1,0)$ (à titre d'exemple)

on a $F(-1,0) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial y}(-1,0) = 2y\Big|_{(-1,0)} = 0$

On ne peut donc pas appliquer le théorème. Par contre $\frac{\partial F}{\partial x}(-1,0) = 2x\Big|_{(-1,0)} = -2 \neq 0$, et par le théorème des fonctions implicites il existe donc une fonction f telle que $-1 = x_0 = f(y_0) = f(0)$ et $F(f(y),y) = 0$ au moins pour $|y-y_0| = |y|$ suffisamment petit. En fait $f(y) = -\sqrt{1-y^2}$ pour $|y|<1$.

3) $F(x,y) = x^3 + xy + y^3 - 3$ sur $\mathbb{R}^2$

$(x_0,y_0) = (1,1)$ (à titre d'exemple)

on a $F(1,1) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y}(1,1) = (x+3y^2)\Big|_{(1,1)} = 4 \neq 0$.

et il existe donc une fonction f telle que $f(1) = 1$ et $F(x,f(x)) = 0$ au moins pour x proche de $x_0 = 1$. De plus

$$f'(x) = -\frac{3x^2+f(x)}{x+3f(x)^2}$$

et en particulier $f'(1) = -\frac{3+1}{1+3\cdot 1^2} = -1$.

Théorème (version $\mathbb{R}^3$) Soit $D \subset \mathbb{R}^3$ ouvert, $F: D \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \longmapsto F(x,y,z)$, une fonction de classe C^1 telle que

$$\boxed{F(x_0,y_0,z_0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \neq 0}$$

pour un $(x_0,y_0,z_0) \in D$. L'équation $F(x,y,z) = 0$ définit alors localement (c.-à-d. pour (x,y) proche de (x_0,y_0)) une fonction de classe C^1 telle que

$$\boxed{z_0 = f(x_0,y_0) \quad \text{et} \quad F(x,y,f(x,y)) = 0}$$

De plus

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,f(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,f(x,y))} \qquad (*_1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,f(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,f(x,y))} \qquad (*_2)$$

Explication de $(*_1)$ et $(*_2)$:

De $F(x,y,f(x,y)) = 0$ on trouve par dérivation en chaîne par rapport à x:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,f(x,y)) + 0 + \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,f(x,y)) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$$

$\Longrightarrow (*_1)$ en isolant $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$. Par dérivation en chaîne par rapport à y on trouve:

$$0 + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,f(x,y)) + \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,f(x,y)) \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

$\Rightarrow (*_2)$ en isolant $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

<u>Remarque</u>: comme déjà pour $n=2$, chacune des variables peut jouer le rôle de la variable dépendante, et souvent on identifie le nom de la fonction définie implicitement avec le nom de la variable (notation courte). Ainsi on a, si $F(x_0, y_0, z_0)=0$, dans des voisinages adéquats:

$$F(x, y, z(x,y)) = 0 \quad \text{si} \quad \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$$

$$F(x, y(x,z), z) = 0 \quad \text{si} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \neq 0.$$

$$F(x(y,z), y, z) = 0 \quad \text{si} \quad \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$$

et pour chaque cas on obtient pour $(*_1)$, $(*_2)$:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}} \; , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \; , \quad \boxed{\frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial y}}}$$

$$\boxed{\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}}} \; , \quad \frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial x}}.$$

d'où (règle du triple produit):

$$\boxed{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1.}$$

$(\;)_\cdot$: notation historique utilisée en thermodynamique.

Théorème (des fonctions implicites)

Soient des ouverts $U \subset \mathbb{R}^n$ et $V \subset \mathbb{R}^m$ et $F : U \times V \to \mathbb{R}^m$ une fonction de classe C^1. Supposons qu'il existe $(x_0, y_0) \in U \times V$ tel que

$$\boxed{F(x_0, y_0) = 0 \quad \text{et} \quad \det\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)\right) \neq 0.}$$

Notation: $\frac{\partial F}{\partial y} \equiv F_2'$, où $F_2 : V \longrightarrow \mathbb{R}^m$
$y \longmapsto F_2(y) = F(x_0, y)$

Alors :

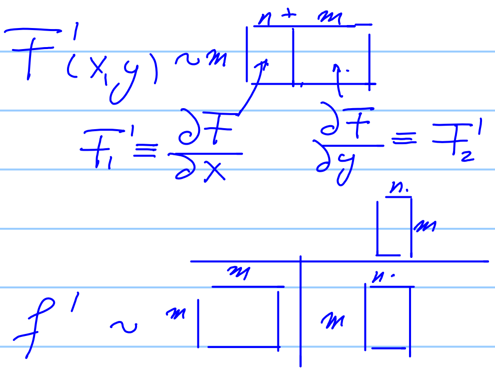
i) il existe des voisinages $U' \subset U$ de x_0 et $V' \subset V$ de y_0 et une fonction $f : U' \longrightarrow V'$ tel que

$$\boxed{y_0 = f(x_0) \quad \text{et} \quad \forall x \in U',\ F(x, f(x)) = 0.}$$

ii) la fonction f est de classe C^1 et on a

$$\boxed{f'(x) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))\right)^{-1} \underbrace{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}_{\equiv F_1'(x,\, f(x))}}$$

où $F_1 : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$
$x \longmapsto F_1(x) = F(x, y_0)$



$f : U' \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $U' \subset \mathbb{R}^n$
$f' : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m.$

Idée de la démonstration

On définit la fonction

$$H : U \times V \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$$

$$(x, y) \longmapsto (x, F(x,y)).$$

et applique le théorème de la fonction réciproque (voir §5.4.2). La fonction H est de classe C^1 et:

$$H'(x_0,y_0) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline \frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) \end{array}\right)$$

avec $\det(H'(x_0,y_0)) = \det\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\right) \neq 0.$

Vu que $H(x_0,y_0) = (x_0, F(x_0,y_0)) = (x_0, 0)$ il existe donc une fonction réciproque $G = H^{-1}$, définie dans un voisinage $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ de x_0 et $\tilde{V} \subset \mathbb{R}^m$ de 0 telle que $G(x_0,0) = (x_0,y_0)$ et

$$\forall (\tilde{x},\tilde{y}) \in \tilde{U} \times \tilde{V}, \ (H \circ G)(\tilde{x},\tilde{y}) = (\tilde{x},\tilde{y})$$

et G est de classe C^1 sur $\tilde{U} \times \tilde{V}$. Finalement vu que

$$H(x,y) = (x, F(x,y))$$

on a que

$$G(\tilde{x},\tilde{y}) = (\tilde{x}, \phi(\tilde{x},\tilde{y}))$$

avec $\phi(x_0,0) = y_0$ et $\forall (\tilde{x},\tilde{y}) \in \tilde{U} \times \tilde{V}$

$$(H \circ G)(\tilde{x},\tilde{y}) = (\tilde{x}, F(\tilde{x}, \phi(\tilde{x},\tilde{y}))) = (\tilde{x},\tilde{y})$$

et donc $F(\tilde{x}, \phi(\tilde{x},\tilde{y})) = \tilde{y}$ et en particulier $\forall \tilde{x} \in \tilde{U}, F(\tilde{x}, \phi(\tilde{x},0)) = 0$. Soit $f(x) := \phi(x,0)$, alors

$$f(x_0) = y_0, \text{ et } \forall x \in U' = \tilde{U}, \ F(x, f(x)) = \underline{0.} \ |$$

6.2. Equation du plan tangent, bis (voir aussi 4.5.2 et 4.8)

6.2.1. Représentation de "surfaces"

($n=3$ à titre d'exemple, s'applique à $n \geqslant 2$).

Soit $F(x,y,z)$ de classe C^1 dans $D \subset \mathbb{R}^3$, D ouvert telle que

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \neq 0$$

pour un $(x_0,y_0,z_0) \in D$ (c.-à-d. les conditions du théorème des fonctions implicites sont satisfaites). Il existe alors une fonction $f(x,y)$ de classe C^1 définie dans un voisinage de (x_0,y_0) telle que $f(x_0,y_0) = z_0$ et telle que

$$\boxed{F(x,y,z) = 0 \quad \text{si} \quad z = f(x,y)}$$

L'ensemble de niveau zéro de la fonction F qui contient le point (x_0,y_0,z_0) est donc proche de (x_0,y_0,z_0) une surface, et cette surface est le graphe d'une fonction f. On a donc deux manières équivalentes de représenter une surface proche du point (x_0,y_0,z_0) (appartenant à cette surface) :

i) par $\boxed{F(x,y,z)=0}$, si $F(x_0,y_0,z_0)=0$, $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \neq 0$

ii) par le graphe $\boxed{z=f(x,y)}$, si $f(x_0,y_0) = z_0$

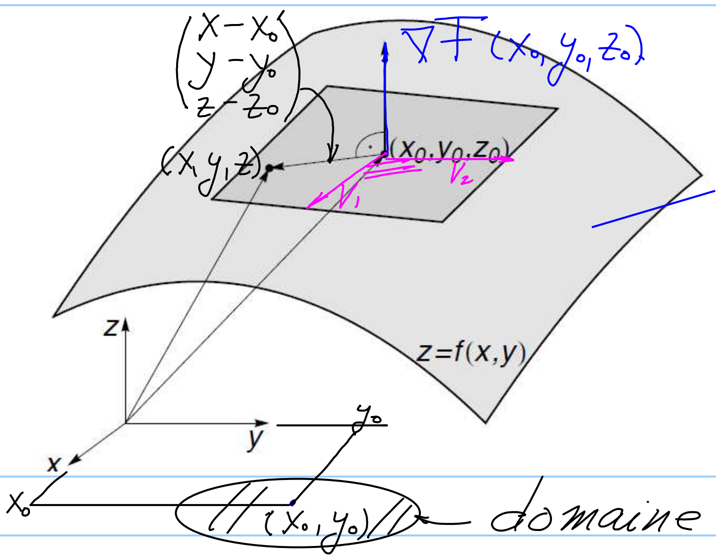
car i) $\Rightarrow$ ii) par le théorème des fonctions implicites

ii) $\Rightarrow$ i) car donné $f(x,y)$ avec $z_0 = f(x_0,y_0)$ on peut choisir $F(x,y,z) = z - f(x,y)$.

6.2.2. L'équation du plan tangent, version implicite

Donné $f(x,y)$ avec $f(x_0,y_0)=z_0$, le plan tangent est donné par l'équation (voir 4.5.2 et 4.8) :

$$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0). \quad (*)$$



domaine de f

$D \subset \mathbb{R}^3$ le domaine de F :

$$\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ \ulcorner F(x_0,y_0,z_0) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \neq 0 \lrcorner \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_1 = \left(1,\ 0,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right) \\ V_2 = \left(0,\ 1,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right) \end{cases}$$

voir 4.5.2, ces deux vecteurs engendrent le plan tangent

$$(*) \iff 1\cdot(z-z_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,(x-x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,(y-y_0) = 0$$

$$\iff \left\langle \Big(\underbrace{-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}_{\begin{array}{c}\| \\ \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)}\end{array}},\ \underbrace{-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}_{\begin{array}{c}\| \\ \frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)}\end{array}},\ 1 \Big)^T,\ \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

produit scalaire

$$\iff \left(\text{en multipliant avec } \frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0\ z_0) \neq 0\right)$$

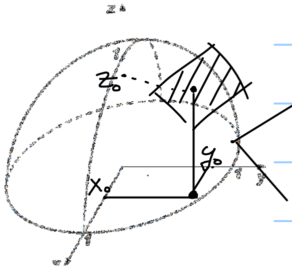
$$\left\langle \underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\,,\ \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\,,\ \frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\right)^T}_{\substack{|||\\ (\nabla F)(x_0,y_0,z_0)}},\ \begin{pmatrix} x-x_0\\ y-y_0\\ z-z_0\end{pmatrix}\right\rangle = 0$$

A noter que $\left\langle (\nabla F)(x_0,y_0,z_0)\,,\ v_1 \right\rangle = 0$

$$\left\langle (\nabla F)(x_0,y_0,z_0)\,,\ v_2 \right\rangle = 0$$

Conclusion: $(\nabla F)(x_0,y_0,z_0)$ est orthogonal au plan tangent au graphe de f (= surface de niveau de F de niveau zēro) en (x_0,y_0,z_0)

Exemple: $F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$



$F(x,y,z)=0$ surface de la sphère de rayon 1.

$\Longleftrightarrow$

$z=f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ "hēmisphère nord"

Soit (x_0,y_0) tel que $x_0^2+y_0^2<1$ et $z_0=\sqrt{1-x_0^2-y_0^2}$

On a $F(x_0\ y_0,\ z_0)=0$ et $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0\ y_0\ z_0)=2z_0 \neq 0$

L'ēquation du plan tangent à la surface de niveau zēro de F en (x_0,y_0,z_0) est:

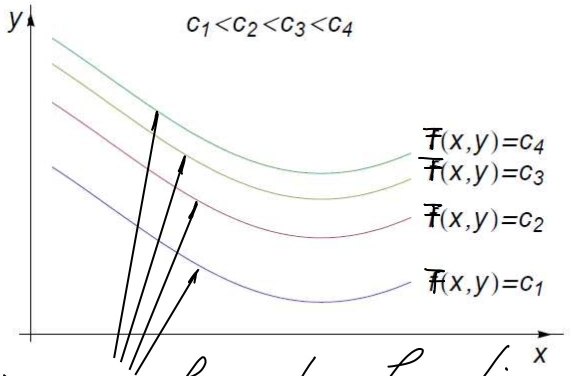
$$\left\langle \begin{pmatrix} 2x_0\\ 2y_0\\ 2z_0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} x-x_0\\ y-y_0\\ z-z_0\end{pmatrix}\right\rangle = 0 \qquad (*)$$

et ce plan est aussi le plan tangent au graphe de la fonction $f(x,y)$ en $(x_0,y_0,z_0=f(x_0,y_0))$. A noter que $(*)$ est bien dēfini même si $z_0=0$. Dans ce cas on obtient l'ēquation d'un plan qui est vertical.

6.3. "Lignes" de niveau

($n = 2$ à titre d'exemple, s'applique à $n \geq 2$)

Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1



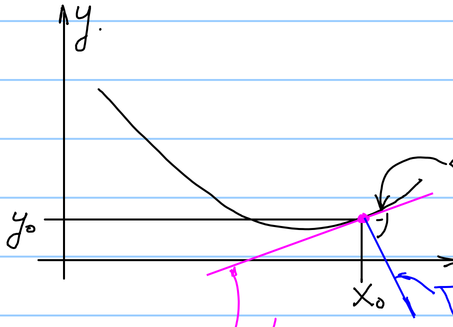
$\Leftrightarrow$ $F_4(x,y)=0$ où $F_4(x,y)=F(x,y)-c_4$

$\vdots$

$\Leftrightarrow$ $F_1(x,y)=0$ où $F_1(x,y)=F(x,y)-c_1$

$\Leftrightarrow$ graphes de fonctions f_i telles que $F_i(x, f_i(x)) = 0$

On a donc le schéma suivant:



$F(x,y) = c = F(x_0,y_0)$ $\Leftrightarrow$
$F_c(x,y)=0$ où $F_c(x,y)=F(x,y)-c$ $\Leftrightarrow$
graphe de $f_c(x)$ où $F_c(x, f_c(x))=0$

$\nabla F_c(x_0,y_0) = \nabla F(x_0,y_0)$ (supposé $\neq 0$)

tangente au graphe de f_c en $(x_0, y_0 = f_c(x_0))$

Equation de la tangente en (x_0,y_0):

$$y = y_0 + \underbrace{f_c'(x_0)}_{\parallel} (x - x_0) \qquad (*)$$

$$-\frac{\frac{\partial F_c}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial F_c}{\partial y}(x_0,y_0)} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)}$$

car $F_c(x,y) = F(x,y) - c$

ou, en écriture implicite (en supposant $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$):

$$\Leftrightarrow \quad (y-y_0) + \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)} (x-x_0) = 0$$

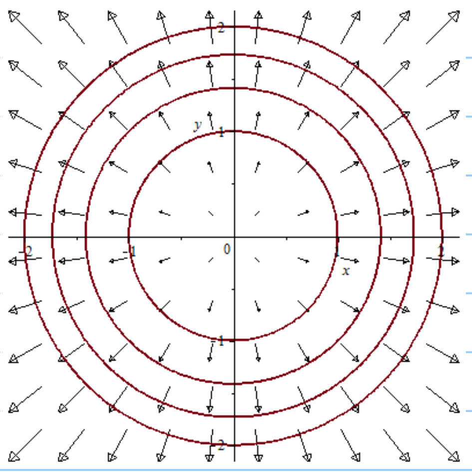
et en multipliant avec $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$

$$\boxed{\left\langle (\nabla F)(x_0,y_0), \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow (*).}$$

<u>Conclusion</u>: $(\nabla F)(x_0,y_0)$ est orthogonal à la tangente à la ligne de niveau de F passant par le point (x_0,y_0), c.-à-d. la ligne de niveau de F de niveau $c = F(x_0,y_0)$

<u>Remarque</u>: si $(\nabla F)(x_0,y_0) \neq 0$ alors ou bien $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0) \neq 0$ ou $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$ et on peut appliquer le théorème des fonctions implicites

<u>Exemple</u>:



$F(x,y) = x^2 + y^2.$

pour tout $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ on a.

$$\nabla F(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} 2x_0 \\ 2y_0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

qui est un vecteur orthogonal à la tangente au cercle donné par $F(x,y) = c = F(x_0,y_0)$.

7. La dérivée directionnelle

7.1. Définitions

Définition ($n=2$). Soit $f: D \to \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto f(x,y)$, où $D \subset \mathbb{R}^2$ est ouvert. Soit $(x_0, y_0) \in D$ et soit $\underline{v} = (v_1, v_2)^T \in \mathbb{R}^2$ un vecteur, $\underline{v} \neq 0$. Le nombre

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}_+}(x_0, y_0) := \lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \frac{f(x_0 + t v_1, y_0 + t v_2) - f(x_0, y_0)}{t}$$

est appelé la dérivée directionnelle unilaterale (ou dérivée directionnelle au sens de Dini) de f en (x_0, y_0) suivant le vecteur $\underline{v}$, et le nombre

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(x_0, y_0) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t v_1, y_0 + t v_2) - f(x_0, y_0)}{t}$$

est appelé la dérivée directionnelle de f en (x_0, y_0) suivant le vecteur $\underline{v}$.

Remarque: soit $\underline{e} = \frac{1}{\|\underline{v}\|} \underline{v}$, alors on a

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}_+}(x_0, y_0) = \|\underline{v}\| \cdot \frac{\partial f}{\partial \underline{e}_+}(x_0, y_0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(x_0, y_0) = \|\underline{v}\| \, \frac{\partial f}{\partial \underline{e}}(x_0, y_0)$$

Démonstration:

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ (t > 0)}} \frac{f(x_0 + t v_1, y_0 + t v_2) - f(x_0, y_0)}{t} \underset{t = \frac{1}{\|\underline{v}\|} \cdot s}{=} \|\underline{v}\| \cdot \lim_{\substack{s \to 0 \\ (s > 0)}} \frac{f(x_0 + e_1 s, y_0 + e_2 s) - f(x_0, y_0)}{s}$$

$\square$

Remarque: si $\underline{v} = (1,0)^T$ on a $\frac{\partial f}{\partial \underline{e}}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$

si $\underline{v} = (0,1)^T$ on a $\frac{\partial f}{\partial \underline{e}}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$

Remarque: si $\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(x_0,y_0)$ existe, alors $\frac{\partial f}{\partial \underline{v}_+}(x_0,y_0)$ existe

et $\frac{\partial f}{\partial \underline{v}_+}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(x_0,y_0)$

Proposition: soit $g(t) := f(x_0 + v_1 \cdot t, y_0 + v_2 \cdot t)$. Alors

$$\left.\begin{aligned} g'(0) &= \frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(x_0,y_0) \\ g'(0+) &= \frac{\partial f}{\partial \underline{v}_+}(x_0,y_0) \end{aligned}\right\} (*).$$

dérivée à droite en $t=0$

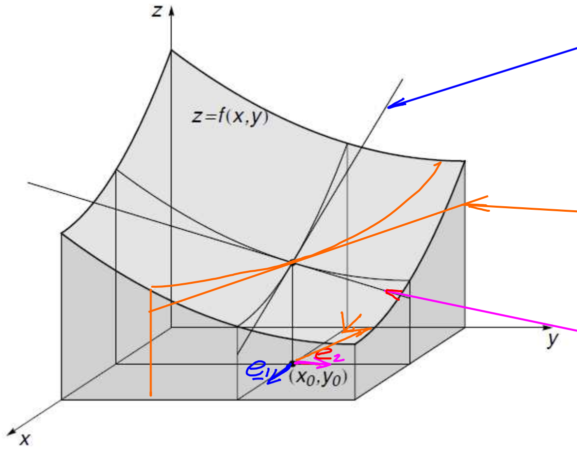
Demonstration

$$g'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{g(t)-g(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+tv_1, y_0+tv_2) - f(x_0,y_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(x_0,y_0),$$

$$g'(0+) = \ldots = \frac{\partial f}{\partial \underline{v}_+}(x_0,y_0).$$

Remarque: (*) est une (bonne) manière de calculer la dérivée directionnelle (unilatérale)

Attention ! f n'est pas forcément differentiable en (x_0,y_0) (voir les exemples plus loin).



pente $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$

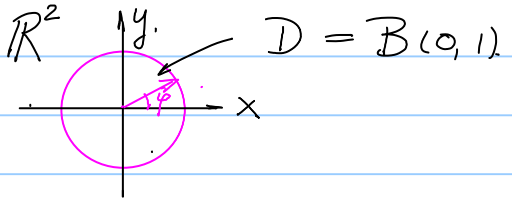
pente $\frac{\partial f}{\partial \underline{e}}(x_0,y_0)$, où $\underline{e} = \frac{\underline{v}}{\|\underline{v}\|}$

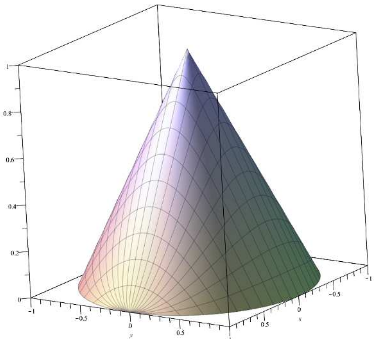
pente $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$

Exemple 1

Soit $f(x,y) = 1-\sqrt{x^2+y^2}$ pour $(x,y) \in D = B(0,1)$

disque ouvert de rayon 1 centré en 0 (voir 2.3)





Soit $(x_0, y_0) = (0,0)$, et
$\underline{e} = (\cos(\varphi), \sin(\varphi))^T$, $\varphi \in [0, 2\pi[$ (φ arbitraire mais fixe)

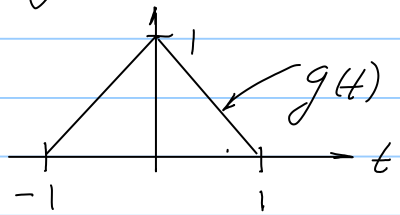
i) en utilisant les définitions

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{e}}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0+t\cos(\varphi), 0+t\sin(\varphi)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1-|t|-1}{t} \text{ n'existe pas}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{e}_+}(0,0) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{f(0+t\cos(\varphi), 0+t\sin(\varphi)) - f(0,0)}{t} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{1-t-1}{t} = -1.$$

ii) avec la fonction g(t)

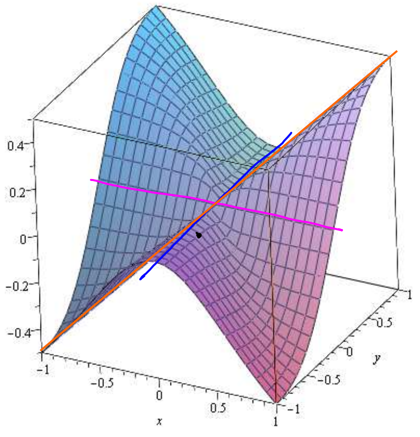
$$g(t) = f(0+t\cdot\cos(\varphi), 0+t\cdot\sin(\varphi)) = 1-|t|$$



$g'(0+) = -1$

$g'(0)$ n'existe pas

Exemple 2 (voir aussi 4.4 et 4.8)



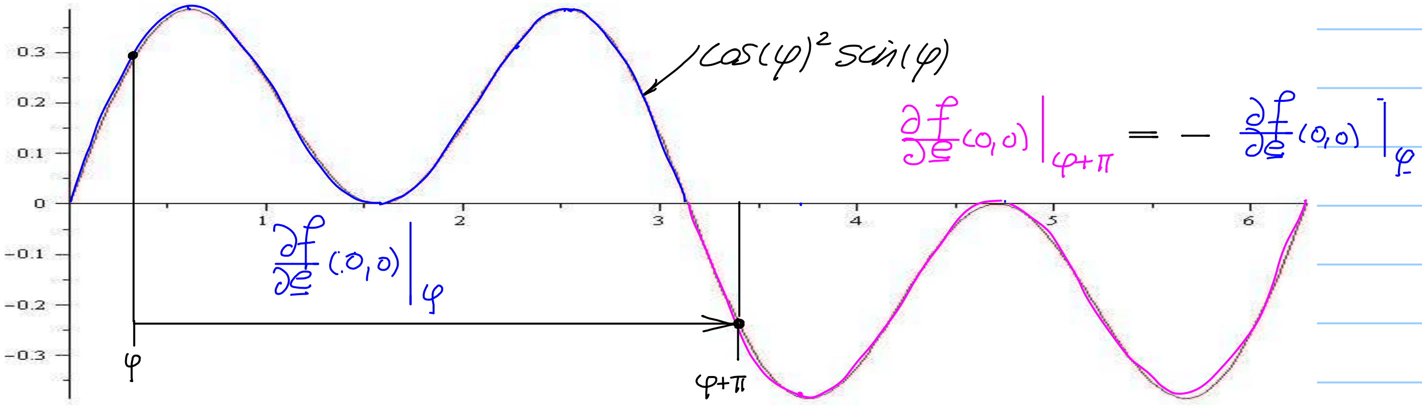
Soit

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Soit $(x_0, y_0) = (0,0)$ et $\underline{e} = (\cos(\varphi), \sin(\varphi))^T$, $\varphi \in [0, 2\pi[$

en utilisant les définitions

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{e}}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^2\cos(\varphi)^2 t\cdot\sin(\varphi)}{t^2} - 0}{t} = \cos(\varphi)^2\cdot\sin(\varphi)$$



Remarque: si la dérivée directionnelle existe pour tout vecteur $\underline{e} = (\cos(\varphi), \sin(\varphi))^T$, $\varphi \in [0, 2\pi[$ on a nécessairement

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \underline{e}}(x_0,y_0)\Big|_{\varphi+\pi} = -\frac{\partial f}{\partial \underline{e}}(x_0,y_0)\Big|_{\varphi}}$$

Pour résumer l'exemple (voir aussi 4.4 et 4.8)

La fonction de l'exemple 2 est continue en (0,0) et les dérivées partielles en (0,0) existent. En fait la dérivée directionnelle existe suivant tout vecteur $\underline{v} \neq 0$, mais la fonction f n'est quand-même pas différentiable en (0,0), elle n'admet pas de plan tangent en (0,0).

Le cas n général

Définition (n général) Soit $f: D \to \mathbb{R}$, $\underline{x} \longmapsto f(\underline{x})$ $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in D$, où $D \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert. Soit $\underline{v} = (v_1, \dots, v_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $\underline{v} \neq 0$ et $\underline{x}_0 \in D$. Le nombre

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}_+}(\underline{x}_0) := \lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \frac{f(\underline{x}_0 + t \cdot \underline{v}) - f(\underline{x}_0)}{t}$$

est appelé la dérivée directionnelle unilatérale (ou dérivée directionnelle au sens de Dini) de f en $\underline{x}_0$ suivant le vecteur $\underline{v}$, et le nombre

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x}_0) := \lim_{t \to 0} \frac{f(\underline{x}_0 + t \cdot \underline{v}) - f(\underline{x}_0)}{t}$$

est appelé la dérivée directionnelle de f en $\underline{x}_0$ suivant le vecteur $\underline{v}$

Remarque: soit $\underline{e} = \frac{1}{\|\underline{v}\|} \underline{v}$. Alors (voir n=2)

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}_+}(\underline{x}_0) = \|\underline{v}\| \cdot \frac{\partial f}{\partial \underline{e}_+}(\underline{x}_0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x}_0) = \|\underline{v}\| \cdot \frac{\partial f}{\partial \underline{e}}(\underline{x}_0)$$

Remarque: pour $n=1$ la dérivée directionnelle unilatérale pour $\underline{e} = (1)$ est égale à la dérivée à droite et pour $\underline{e} = (-1)$ à moins la dérivée à gauche (vérifier !)

Remarque: pour $\underline{v} = \underline{e} = (0, .., 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{position } i}}{1}, 0 \dots 0)^T$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{e}}(\underline{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}_0)$$

7.2. Le cas d'une fonction différentiable

7.2.1. $n=2$, f différentiable

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto f(x,y)$, où $D \subset \mathbb{R}^2$ est ouvert, f différentiable en $(x_0,y_0) \in D$ et soit $\underline{v} = (v_1,v_2)^T$, $\underline{v} \neq 0$. Soit

$$g(t) = f(\underbrace{x_0 + t\cdot v_1,\; y_0 + t\, v_2}_{\overset{|||}{h(t)=\begin{pmatrix} x_0+t\cdot v_1 \\ y_0 + t\cdot v_2\end{pmatrix}}}) = (f\circ h)(t)$$

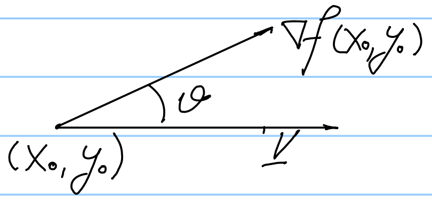
Puisque f est différentiable en (x_0,y_0) on a (dérivée en chaîne)

multiplication des matrices

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(x_0,y_0) = g'(0) = \underbrace{f'(\underbrace{h(0)}_{=(x_0,y_0)})}_{\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \end{bmatrix}} \cdot \underbrace{h'(0)}_{\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}}$$

$$= \langle \nabla f(x_0,y_0), \underline{v} \rangle = \|\nabla f(x_0,y_0)\| \cdot \|\underline{v}\| \cdot \cos(\vartheta)$$

voir § 5.1
isomorphisme des espaces vectoriels



Définition bis (cas où f est différentiable, $n=2$)
Le nombre

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(x_0,y_0) := \langle \nabla f(x_0,y_0), \underline{v} \rangle$$

est appelé la dérivée directionnelle de f en (x_0,y_0) suivant le vecteur $\underline{v}$.

7.2.2. n arbitraire, f differentiable

Définition bis (cas où f est différentiable)
Soit $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$, $\underline{x} \longmapsto f(\underline{x})$, $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in D$, $D \subset \mathbb{R}^n$, D ouvert, f différentiable en $\underline{x}_0 \in D$, et soit $\underline{v} = (v_1, \dots, v_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $\underline{v} \neq 0$. Le nombre

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x}_0) := \left\langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{v} \right\rangle$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}_0)\, v_i$$

est appelé la dérivée directionnelle de f en $\underline{x}_0$ suivant le vecteur $\underline{v}$

Remarque: cette définition est équivalente à la définition avec la limite sous l'hypothèse que f soit différentiable.

Remarque: si f est différentiable on obtient aucune nouvelle information sur f

Remarque: (cas f différentiable)
Soit $\underline{e}$ un vecteur unité et supposons que $\nabla f(\underline{x}_0) \neq 0$

Alors $\frac{\partial f}{\partial \underline{e}}(\underline{x}_0)$ est maximal si $\underline{e}$ et $\nabla f(\underline{x}_0)$ sont colinéaires c'est-à-dire pour

$$\underline{e} = \frac{\nabla f(\underline{x}_0)}{\|\nabla f(\underline{x}_0)\|}$$

car dans ce cas on a

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{e}}(\underline{x}_0) = \left\langle \nabla f(\underline{x}_0), \frac{\nabla f(\underline{x}_0)}{\|\nabla f(\underline{x}_0)\|} \right\rangle = \frac{\|\nabla f(\underline{x}_0)\|^2}{\|\nabla f(\underline{x}_0)\|} = \|\nabla f(\underline{x}_0)\|$$

maximal pour des vecteurs colinéairs !

<u>Exemples</u> (fonctions de classe C^1)

1) $f(x,y) = e^{x\cdot y}$, $(x_0,y_0)=(1,0)$, $\underline{v}=(1,1)^T$

$$\left.\begin{aligned} &i)\quad \nabla f(x,y) = (e^{x\cdot y}\cdot y,\ e^{x\cdot y}\cdot x)^T \\ &\quad\ \frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(1,0) = \left\langle (0,1)^T, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \right\rangle = 1 \end{aligned}\right\} \text{Définition bis}$$

$$\left.\begin{aligned} ii)\quad g(t) &= f(1+t,\ 0+t) \\ &= e^{(1+t)\cdot t} = e^{t+t^2} \\ g'(0) &= e^{t+t^2}(1+2t)\Big|_{t=0} = 1 \end{aligned}\right\} \begin{array}{l}\text{Définition originale}\\ \text{calculée avec } g.\end{array}$$

2) $f(x,y,z) = e^{x\cdot y\cdot z}$, $(x_0,y_0,z_0)=(1,1,0)$

$$\underline{e} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T$$

i) $\nabla f(x,y,z) = (e^{xyz}y\cdot z,\ e^{xyz}xz,\ e^{xyz}xy)^T$

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{e}}(1,1,0) = \left\langle (0,0,1)^T, \left(\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3}\right)^T \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ii) $$g(t) = e^{(1+\frac{1}{\sqrt3}t)\cdot(1+\frac{1}{\sqrt3}t)\cdot(\overset{\text{zéro}}{0}+\frac{1}{\sqrt3}t)} = \dots =$$

$$= e^{\frac{1}{\sqrt3}t + \underbrace{t\cdot\varepsilon(t)}_{\equiv\, o(t)}} = 1 + \boxed{\frac{1}{\sqrt3}}\,t + t\cdot\varepsilon(t)$$

$\lim_{t\to0}\varepsilon(t)=0$

le mieux est d'utiliser les développements limité

"composition des développements limités"

$$e^X = 1 + X + \underbrace{X\cdot\varepsilon(X)}_{\equiv\, o(X)} \qquad \lim_{X\to0}\varepsilon(X)=0$$

unicité du développement limité

$$= g(0) + \boxed{g'(0)}\cdot t + \underbrace{t\cdot\varepsilon(t)}_{\equiv\, o(t)}$$

Donc $g'(0) = \frac{1}{\sqrt3} = \frac{\partial f}{\partial \underline{e}}(1,1,0)$.

8. Approximation de Taylor, développements limités

8.1. Développements limités d'ordre un et deux $(n=2)$

Soit $f : D \to \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto f(x,y)$, où $D \subset \mathbb{R}^2$ est ouvert, f de classe $C^1(D)$, et soit $(x_0,y_0) \in D$. Alors f possède un développement limité d'ordre un dans un voisinage de (x_0,y_0) :

$$f(x,y) = \underbrace{f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)}_{\overset{||}{p_1(x,y)}} + d\cdot\varepsilon(x,y)$$

$$\text{où } d = \left\| \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

$$\text{et } \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \varepsilon(x,y) = 0.$$

Le polynôme $p_1(x,y)$ est appelé le polynôme de Taylor d'ordre un de f en (x_0,y_0). Ce polynôme approxime f linéairement dans un voisinage de (x_0,y_0).

Si f est de classe $C^2(D)$, alors f possède un développement limité d'ordre deux dans un voisinage de (x_0,y_0).

$$\begin{aligned} f(x,y) = {} & \underbrace{f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) \\ & + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 \\ & + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)(y-y_0)^2 \\ & + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)}_{\overset{||}{p_2(x,y)}} + d^2\varepsilon(x,y) \end{aligned}$$

$$\underbrace{= f(x_0,y_0) + \left\langle \nabla f(x_0,y_0), \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} \right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}, \operatorname{Hess}(f)(x_0,y_0) \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} \right\rangle}_{=p_2(x,y)}$$

où (rappel, voir la section 4.5.4)

$$\operatorname{Hess}(f)(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

est la matrice hessienne de f en (x_0,y_0). Ici, la matrice hessienne est symétrique, car on a supposé f de classe C^2 (voir la remarque de la section 4.5.4). Le polynôme $p_2(x,y)$ est le polynôme de Taylor d'ordre deux de f en (x_0,y_0). Il approxime f d'une manière quadratique dans un voisinage de (x_0,y_0)

Exemple: $f(x,y) = \sin(2x+y) + 3\cdot\cos(x+y)$

$(x_0,y_0) = (0,0)$ (à titre d'exemple)

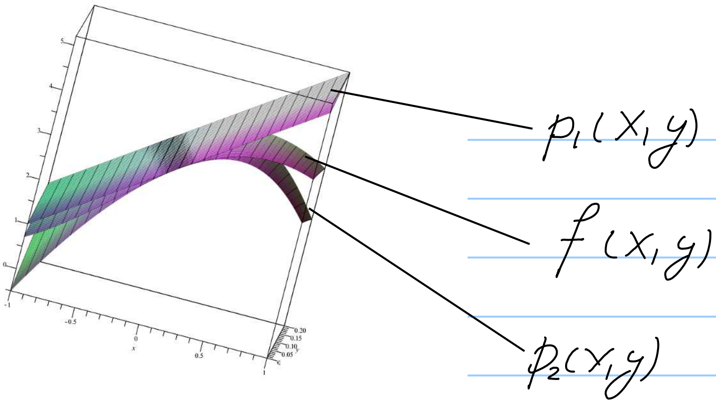
$f(0,0) = 3$

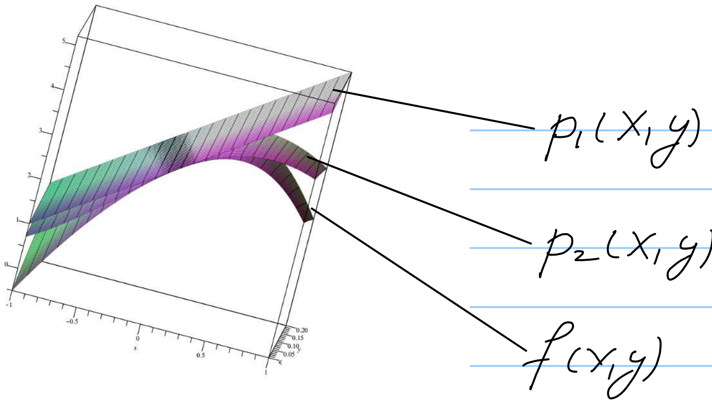
$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = -3$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = -3$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = -3$

$$p_2(x,y) = 3 + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} -3x-3y \\ -3x-3y \end{pmatrix}} \right\rangle$$

$$= 3 + 2x + y - \frac{3}{2}x^2 - 3xy - \frac{3}{2}y^2$$


5
4
3
2
1
0
-1
-0.5
0
x
0.5
1
0.20
0.15
0.10
0.05
0
y
$p_1(x,y)$
$f(x,y)$
$p_2(x,y)$



Deuxième méthode de calcul (composition des développements limités)

Puisque $2x+y\Big|_{(0,0)} = 0 =: z_1$ et

$x+y\Big|_{(0,0)} = 0 =: z_2$

on peut calculer $p_2(x,y)$ par la composition des développements limités de $\sin(z)$ en $z = z_1 = 0$ et de $\cos(z)$ en $z = z_2 = 0$ avec (les développements limités de) $2x+y$ et $x+y$ (voir Analyse I pour cette technique). On a:

$$\sin(z) = z + z^2\,\varepsilon(z) \qquad \text{avec } \lim_{z\to 0}\varepsilon(z) = 0$$

$$\cos(z) = 1 - \frac{1}{2}z^2 + z^2\varepsilon(z) \qquad \text{avec } \lim_{z\to 0}\varepsilon(z) = 0$$

et on obtient donc

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (2x+y) + \boxed{(2x+y)^2\,\varepsilon(2x+y)}^{(1)} \\ &\quad + 3\left(1 - \frac{1}{2}(x+y)^2 + \boxed{(x+y)^2\,\varepsilon(x+y)}^{(2)}\right) \\ &= 3 + 2x + y - \frac{3}{2}x^2 - 3xy - \frac{3}{2}y^2 + \underbrace{d^2\varepsilon(x,y)}_{(1)+(2)\ \text{voir la remarque}} \end{aligned}$$

Remarque concernant les restes

(voir la proposition 2.6)

$$(|x|-|y|)^2 = x^2+y^2-2|x||y| \geqslant 0 \qquad \forall x,y \in \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow \qquad 2|x||y| \leqslant x^2+y^2 = d^2 \quad , \quad \forall x,y \in \mathbb{R}.$$

Ceci implique que $(x+y)^2 \varepsilon(x+y) = d^2 \varepsilon(x,y)$ et que $(2x+y)\,\varepsilon(2x+y) = d^2 \varepsilon(x,y)$ car on a

$$(x+y)^2 \leqslant x^2+y^2+2|x||y| \leqslant 2\cdot d^2$$

et

$$(2x+y)^2 \leqslant 4x^2+y^2+4|x||y| \leqslant 4(x^2+y^2)+4|x||y| \leqslant 6\,d^2$$

et $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \varepsilon(x+y) = 0$ et $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \varepsilon(2x+y) = 0.$

8.2. Développements limités d'ordre N

Rappel: Soit $f: I \to \mathbb{R}$, $\underline{x} \longmapsto f(\underline{x})$, $\underline{x} \in I \subset \mathbb{R}$, I un intervalle ouvert, f de classe $C^N(I)$, $x_0 \in I$. Alors (voir Analyse I):

$$\left.\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{1}{N!} f^{(N)}(x_0)(x-x_0)^N + \\ + |x-x_0|^N \varepsilon(x) \end{aligned}\right\} (*)$$

avec $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$

Remarque (Analyse I, 5.5.4, (5.20).)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + (x-a)^p \varepsilon(x).$$

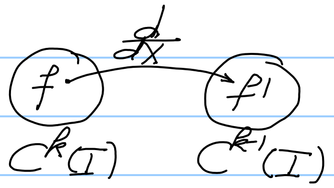
avec $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = \frac{1}{p!} \lim\limits_{x\to a} \left(f^{(p)}(\tilde{x}) - f^{(p)}(a) \right) = 0.$

Avec $h = x - x_0 \iff x = x_0 + h$ on obtient pour (*)

$$\boxed{f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\,h + \dots + \frac{1}{N!} f^{(N)}(x_0)\, h^N + |h|^N \varepsilon(x_0+h)}$$

ou encore avec l'application linéaire

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} :\ C^k(I) &\longrightarrow C^{k-1}(I) \\ f &\longmapsto \frac{d}{dx} f = f' \end{aligned}$$



$$\boxed{f(x_0+h) = \sum_{\ell=0}^{N} \frac{1}{\ell!} \left(\left(h \cdot \frac{d}{dx}\right)^{\ell} f \right)(x_0) \quad + |h|^N \varepsilon(x_0+h)}$$

terme $\ell=0$: $\frac{1}{0!} \Big(\underbrace{\left(h \frac{d}{dx}\right)^{\overset{\text{zéro}}{0}}}_{\text{application identité par convention}} f \Big)(x_0) = f(x_0)$

terme $\ell=1$: $\frac{1}{1!} \left(\left(h \cdot \frac{d}{dx}\right) f \right)(x_0) = h \cdot f'(x_0)$

terme $\ell=2$: $\frac{1}{2!} \left(\left(h \cdot \frac{d}{dx}\right)^2 f \right)(x_0) = \frac{1}{2} \left(\left(h \frac{d}{dx}\right)\left(h \frac{d}{dx}\right) f \right)(x_0)$

$$= \frac{1}{2} h^2 \left(\frac{d}{dx} f' \right)(x_0) = \frac{1}{2} f''(x_0)$$

etc.

Généralisation à $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, $f \in C^N(D)$

On définit la fonction $g \in C^N(]-2,2[, \mathbb{R})$ par

$$g(t) = f(\underline{x}_0 + t\,\underline{h}) \qquad (f : D \to \mathbb{R})$$

$$g'(t) = f'(\underline{x}_0 + t\,\underline{h}) \cdot \underline{h}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x}_0 + t\,\underline{h})\, h_j \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} : D \to \mathbb{R}\right)$$

$$g''(t) = \sum_{j=1}^{n} \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)' (\underline{x}_0 + t \cdot \underline{h}) \cdot \underline{h} \right) h_i$$

$$\vdots \qquad = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (\underline{x}_0 + t\,\underline{h})\, h_i h_j$$

$$\Longrightarrow$$

$$f(\underline{x}_0 + \underline{h}) = g(1) = \sum_{\ell=0}^{N} \frac{1}{\ell!} g^{(\ell)}(0) + \|\underline{h}\|^N \varepsilon(\underline{x}_0 + \underline{h}). \qquad \lrcorner$$

Théorème soit $f : D \to \mathbb{R}$, $\underline{x} \longmapsto f(\underline{x})$, $D \subset \mathbb{R}^n$ ouvert f de classe $C^N(D)$, $x_0 \in D$. Alors f possède un développement limité d'ordre N dans un voisinage de $\underline{x}_0$:

$$f(\underline{x}_0 + \underline{h}) = \sum_{\ell=0}^{N} \frac{1}{\ell!} \left(\langle \underline{h}, \nabla \rangle^\ell f \right)(\underline{x}_0) + d^N \varepsilon(\underline{x}_0 + \underline{h})$$

où $d = \|\underline{h}\|$ et $\lim_{\underline{h} \to 0} \varepsilon(\underline{x}_0 + \underline{h}) = 0$

Exemple: ($n = 2$, coordonnées cartésiens, développement limité de $f(x,y)$ en (x_0, y_0), $\underline{h} = (h,k)^T$ et $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)^T$.

$$f(x_0+h, y_0+k) = \sum_{\ell=0}^{N} \frac{1}{\ell!} \left(\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^\ell f \right)(x_0, y_0) + d^N \varepsilon(x_0 + h, y_0 + h)$$

où $d = \sqrt{h^2 + k^2}$.

Rappel: formule du binôme (voir Analyse I)

$$(a+b)^\ell = \sum_{m=0}^{\ell} \binom{\ell}{m} a^{\ell-m} b^m \qquad \text{(on suppose que } a \cdot b = b \cdot a)$$

$$\binom{\ell}{m} = \frac{\ell!}{m!\,(\ell-m)!} = \frac{\ell(\ell-1)\cdot\ldots\cdot(\ell-m+1)}{m!}$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \ldots \qquad \lrcorner$$

Pour $N=3$ on obtient donc (car $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}$) :

$$\begin{aligned}
f(\underbrace{x_0+h}_{=x}, \underbrace{y_0+k}_{=y}) &= f(x_0,y_0) + \left(\left(h\cdot\frac{\partial}{\partial x} + k\cdot\frac{\partial}{\partial y}\right)f\right)(x_0,y_0) \\
&\quad + \frac{1}{2!}\left(\left(h\cdot\frac{\partial}{\partial x} + k\cdot\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f\right)(x_0,y_0) \\
&\quad + \frac{1}{3!}\left(\left(h\cdot\frac{\partial}{\partial x} + k\cdot\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f\right)(x_0,y_0) \\
&\quad + d^3 \varepsilon(x_0+h, y_0+k) \\
&= \underbrace{\begin{aligned} & f(x_0,y_0) + h\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + k\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \\
& + \frac{1}{2}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\right) \\
& + \frac{1}{6}\left(h^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_0,y_0) + 3h^2k\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(x_0,y_0) \right. \\
& \qquad \left. + 3hk^2\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(x_0,y_0) + k^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x_0,y_0)\right)\end{aligned}}_{=:\, p_3(x,y).} \\
&\quad + d^3\varepsilon(\underbrace{x_0+h}_{=x}, \underbrace{y_0+k}_{=y})
\end{aligned}$$

etc.

9. Extremums locaux et absolus d'une fonction de n variables

9.1. Définitions

Définition soit $f : D \to \mathbb{R}$, $\underline{x} \longmapsto f(\underline{x})$, $D \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, $\underline{x}_0 \in D$. On dit que f admet en $\underline{x}_0$:

1) un maximum local (ou relatif) si $f(\underline{x}) \leq f(\underline{x}_0)$ pour tout $\underline{x}$ dans un voisinage de $\underline{x}_0$
un minimum local (ou relatif) si $f(\underline{x}) \geq f(\underline{x}_0)$ pour tout $\underline{x}$ dans un voisinage de $\underline{x}_0$

2) un maximum (global ou absolu) si $f(\underline{x}) \leq f(\underline{x}_0)$ pour tout $\underline{x} \in D$
un minimum (global ou absolu) si $f(\underline{x}) \geq f(\underline{x}_0)$ pour tout $\underline{x} \in D$

3) un point stationnaire (ou point critique) si f est différentiable en $\underline{x}_0$ et $\nabla f(\underline{x}_0) = 0$

4) un point-selle, si $\underline{x}_0$ est un point stationnaire et si dans tout voisinage de $\underline{x}_0$ il existent des points $\underline{x}_1$ et $\underline{x}_2$ tels que $f(\underline{x}_1) < f(\underline{x}_0) < f(\underline{x}_2)$

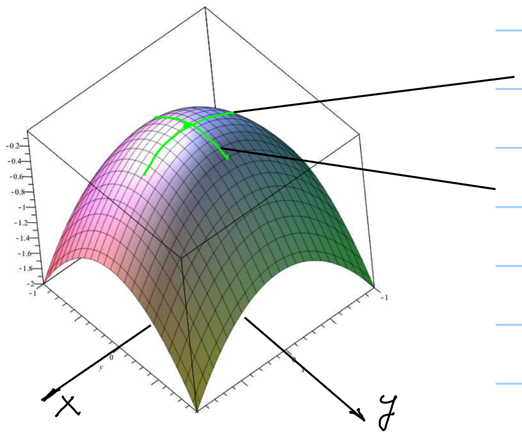
Terminologie: extremum $\Leftrightarrow$ maximum ou minimum

Remarque: la définition de point-selle dépend de l'auteur

9.2. f de classe $C^1(D)$; condition nécessaire pour un extremum

Théorème soit $f: D \to \mathbb{R}$, $\underline{x} \longmapsto f(\underline{x})$, $D \subset \mathbb{R}^n$ ouvert $f \in C^1(D)$. Si f admet un extremum local en $\underline{x}_0 \in D$, alors $\underline{x}_0$ est un point stationnaire de f, c.-à-d. $\nabla f(\underline{x}_0) = 0$

Démonstration $(n=2)$ $(x,y) \longmapsto f(x,y)$, $\underline{x}_0 = (x_0, y_0)$:

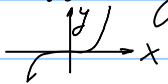


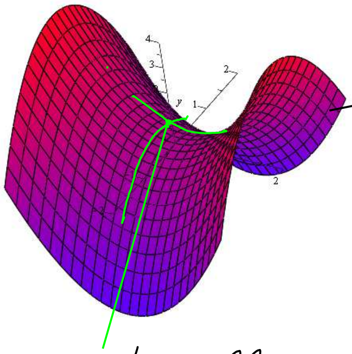
Soit $f_1(x) := f(x, y_0)$. Alors:

$$f_1(x) = f(x, y_0) \leq f(x_0, y_0) = f_1(x_0) \qquad \text{(cas d'un maximum)}$$
$$f_1(x) = f(x, y_0) \geq f(x_0, y_0) = f_1(x_0) \qquad \text{(cas d'un minimum)}$$

pour x dans un voisinage de x_0. La fonction f_1 admet donc un maximum ou un minimum local en x_0 et f_1 est de classe C^1, car $f_1'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0)$. Donc $f_1'(x_0) = 0$ (voir Analyse I). Donc on a $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ Le même argument pour $f_2(y) = f(x_0, y)$ montre que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$. Ceci montre que

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)^T = 0$$

Attention ! un point stationnaire n'est pas forcément un extremum (ce n'était déjà pas le cas pour $n=1$; $f(x)=x^3$,  admet en $x=0$ un point stationnaire qui n'est ni un maximum ni un minimum), car on a aussi les points-selle



point-selle

$f(x,y)=x^2-y^2$; $\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}2x\\-2y\end{pmatrix}$

$\nabla f(0,0)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, donc $(0,0)$ est un point stationnaire car f est de classe C^1 !

$f_1(x):=f(x,0)=x^2$ admet un minimum en $x=0$.

$f_2(y):=f(0,y)=-y^2$ admet un maximum en $y=0$.

9.3. Fonctions de classe C^2 : conditions suffisantes pour un extremum $(n=2)$

Théorème (classification des points stationnaires, $n=2$)

Soit $f: D\longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y)\longmapsto f(x,y)$, $D\subset\mathbb{R}^2$ ouvert, $f\in C^2(D)$. Soit $(x_0,y_0)\in D$ un point stationnaire de f (donc $\nabla f(x_0,y_0)=0$) et posons :

$$\Lambda_1\equiv\Lambda_1(x_0,y_0)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) \qquad = \det \boxed{}^{(1)}$$

$$\Lambda_2\equiv\Lambda_2(x_0,y_0)=\det\left(H_f(x_0,y_0)\right) \qquad = \det \boxed{}^{(2)}$$

où

$$H_f(x_0,y_0)\equiv \mathrm{Hess}(f)(x_0,y_0)=\left(\boxed{\begin{matrix}\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)}^{(1)} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\end{matrix}}^{(2)}\right)$$

$H_f(x_0,y_0)$ symétrique car $f\in C^2(D)$.

Alors la nature du point stationnaire est donnée par le schéma suivant:

Λ_2	Λ_1	nature du point
>0	>0	minimum local
>0	<0	maximum local
<0		point selle
$=0$		?.

<u>Terminologie:</u> $\det(H_f(x_0,y_0))$ est appelé le hessien de la fonction f en (x_0,y_0)

Démonstration

Pour simplifier la notation on va supposer que $(x_0,y_0)=(0,0)$. On a alors (développement limité)

$$f(x,y)=f(0,0)+\underset{\substack{\uparrow\\ \text{termes linéaires car } \nabla f(0,0)=0}}{0}+\frac{1}{2}\left\langle \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, H_f(0,0)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right\rangle + d^2\varepsilon(x,y)$$

<u>Notation:</u> $H_f(0,0)\equiv H=\begin{pmatrix}r & s\\ s & t\end{pmatrix} \leftarrow$ notation simplifiée

Avec cette notation: $\Lambda_1=r$, $\Lambda_2=r\cdot t-s^2$

<u>Voir algèbre linéaire</u>

- H étant symétrique ses valeurs propres $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$
- $\det(H)=\lambda_1\cdot\lambda_2 \quad (=r\cdot t-s^2=\Lambda_2)$
- $\operatorname{tr}(H)=\lambda_1+\lambda_2 \quad (=r+t)$

Démonstration

Pour simplifier la notation on va supposer que $(x_0, y_0) = (0,0)$. On a alors (développement limité)

$$f(x,y) = f(0,0) + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{termes linéaires car } \nabla f(0,0)=0}}{0} + \frac{1}{2}\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, H_f(0,0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle + d^2 \varepsilon(x,y)$$

Notation: $H_f(0,0) \equiv H \equiv \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix} \leftarrow$ notation simplifiée

Avec cette notation: $\Lambda_1 = r$, $\Lambda_2 = r \cdot t - s^2$

Voir algèbre linéaire

- H étant symmétrique ses valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$
- $\det(H) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \quad (= r \cdot t - s^2 = \Lambda_2)$
- $tr(H) = \lambda_1 + \lambda_2 \quad (= r + t)$
- on peut diagonaliser H avec une matrice orthogonale U, et

$$U = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

pour un certain $\alpha \in [0, 2\pi[$.

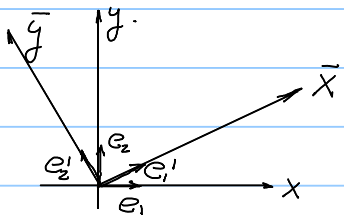
e_1', e_2', les vecteurs propres de H normalisés

- $U^T = U^{-1}$ (matrice orthogonale, $\det U = 1$)
- on a $U^T H U = U^{-1} H U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \equiv D_{iag}$ $(*)$.

$(*) \iff H = \mathcal{U} D_{iag} \mathcal{U}^{-1} = \mathcal{U} D_{iag} \mathcal{U}^{T}$

$\mathcal{U}$ définit un changement de coordonnées linéaire

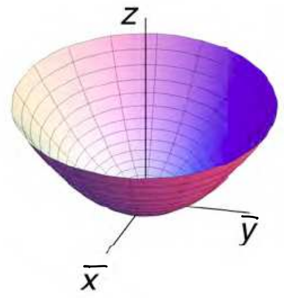
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathcal{U} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$$



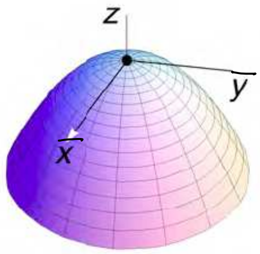
$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, H \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \mathcal{U} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}, H \mathcal{U} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}, \mathcal{U}^T H \mathcal{U} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \right\rangle$$

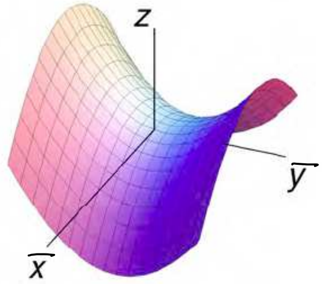
$$= \left\langle \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \right\rangle = \lambda_1 \bar{x}^2 + \lambda_2 \bar{y}^2$$



$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$



$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$



$\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$
$(\text{ou } \lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0)$

$\Longrightarrow$ $\Lambda_2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ $\quad$ $\Lambda_2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ $\quad$ $\Lambda_2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$

Discussion des conditions du théorème

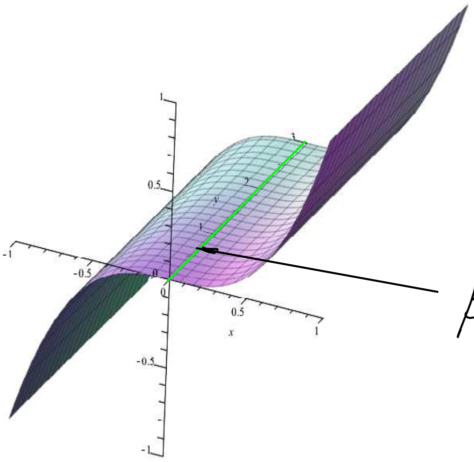
- $\Lambda_2 = r \cdot t - s^2 > 0$, $\Lambda_1 = r > 0$ $\Rightarrow t > 0$ (sinon $\Lambda_2 < 0$)
  $\Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 = r + t > 0 \Rightarrow \lambda_1$ <u>ou</u> λ_2 est positive.
  Mais $\Lambda_2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0 \Rightarrow \lambda_1$ <u>et</u> λ_2 sont positives
- $\Lambda_2 = rt - s^2 > 0$, $\Lambda_1 = r < 0$ $\Rightarrow t < 0$ (sinon $\Lambda_2 < 0$)
  $\Longrightarrow \lambda_1 + \lambda_2 = r + t < 0 \Rightarrow \lambda_1$ <u>ou</u> λ_2 est négative
  Mais $\Lambda_2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0 \Rightarrow \lambda_1$ <u>et</u> λ_2 sont négatives
- $\Lambda_2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0 \Rightarrow \lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ ou $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$
- si $\Lambda_2 = 0$, la nature du point stationnaire dépend des termes d'ordre supérieur du développement limité.

Exemple 1

$$f(x,y) = x^3$$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 \\ 0 \end{pmatrix} \underset{x=0}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$



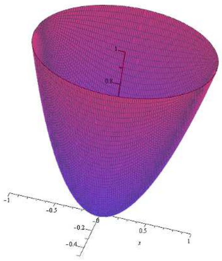
points stationnaires

Tous les points de la forme $(0,y)$ sont des points stationnaires et des points-selles selon notre définition, mais le théorème ne s'applique pas.

Exemple 2

a) $f(x,y) = x^2 + 4y^2 \in C^2(\mathbb{R}^2)$, $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 8y \end{pmatrix} \underset{x=y=0}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$(0,0)$ est un point stationnaire.



on a $H = \text{Hess}(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$

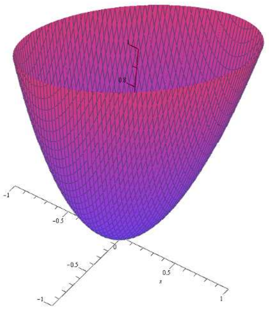
$\Lambda_1 = 2 > 0$, $\Lambda_2 = 2 \cdot 8 = 16 >$

$\Longrightarrow$ <u>un minimum local</u>

b) $f(x,y) = \frac{5}{2}x^2 - 3xy + \frac{5}{2}y^2$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 5x - 3y \\ -3x + 5y \end{pmatrix} \underset{x=y=0}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$(0,0)$ est un point stationnaire



$$H = \text{Hess}(f)(0,0) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \boxed{5} & -3 \\ -3 & 5 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$\Lambda_1 = 5$, $\Lambda_2 = 5\cdot 5 - (-3)(-3) = 16 > 0$

$\Rightarrow$ un minimum local

En fait: $f(x,y) = \frac{1}{2}\left((x+y)^2 + 4(x-y)^2\right) = \Bigg(\Big(\underset{\bar{x}}{\underset{\shortparallel}{\frac{x+y}{\sqrt{2}}}}\Big)^2 + 4\Big(\underset{\bar{y}}{\underset{\shortparallel}{\frac{-x+y}{\sqrt{2}}}}\Big)^2\Bigg)$

$$= \bar{f}(\bar{x},\bar{y}) = \bar{x}^2 + 4\bar{y}^2$$

même fonction que sous a) en d'autres coordonnées

On a $\begin{pmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}}_{=\mathcal{U}}\begin{pmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\end{pmatrix}$

Changement de variables:

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

vecteurs propres normalisés de H

9.4. Fonctions de classe C^2, conditions suffisantes pour un extremum $(n=3)$

Théorème Soit $f: D \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto f(x,y,z)$ de classe $C^2(D)$, $D \subset \mathbb{R}^3$ ouvert. Soit $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in D$ un point stationnaire de f $(\nabla f(p_0) = 0)$ et posons:

$$H \equiv \operatorname{Hess}(f) = \begin{pmatrix} \boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_0)}^{(1)} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p_0)^{(2)} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(p_0)^{(3)} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(p_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(p_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(p_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(p_0) \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_1 = \det\left(\square^{(1)}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_0)$$

$$\Lambda_2 = \det\left(\square^{(2)}\right) = \ldots$$

$\Lambda_3 = \det(\square^{(3)}) = \det(H)$

Alors la nature du point stationnaire est donnée par le tableau suivant :

(*) $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3$ $\lambda_1 \cdot \lambda_2$ λ_1 ← pour H diagonal

$\overset{\parallel}{\Lambda_3}$	$\overset{\parallel}{\Lambda_2}$	$\overset{\parallel}{\Lambda_1}$	nature du point
>0	>0	>0	minimum local
<0	>0	<0	maximum local
$\neq 0$	tous les autres cas (6 cas)		point-selle

Remarque: utiliser (*) (le tableau est aussi valable si H est diagonal) pour reconstruir le tableau

Démonstration: comme pour $n=2$. Diagonaliser H avec une matrice orthogonale et discuter les signes des valeurs propres en termes de $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$.

Remarque: on a le théorème analogue pour $n>3$.

9.5. Extremums absolus

Revoir le chapitre 2.3 pour la définition des ensembles ouverts et fermés et les définitions du bord et de l'intérieur d'un ensemble

9.5.1. Définitions, théorèmes

Définition: un ensemble $B \subset \mathbb{R}^n$ est appelé borné s'il existe $0 < r < \infty$ tel que $B \subset B(0,r)$

Définition un ensemble $C \subset \mathbb{R}^n$ qui est borné et fermé est appelé compact

Remarque: pour $\mathbb{R}^n$ cette définition est équivalente aux caractérisations suivantes, plus générales à priori, car aussi valables pour les sous-ensembles d'espaces de dimension ∞.

Théorème 1 (définition par des suites).
Un sous-ensemble $X \subset \mathbb{R}^n$. est compact (borné et fermé) si et seulement si de toute suite d'éléments de X on peut extraire une sous-suite qui converge vers un élément de X.

Démonstration:
On montre d'abord par une démonstration par l'absurde que X est borné, puis on utilise les résultats de la série 7 B, c.-à-d. Boltzano-Weierstrass + Exercice 3 |

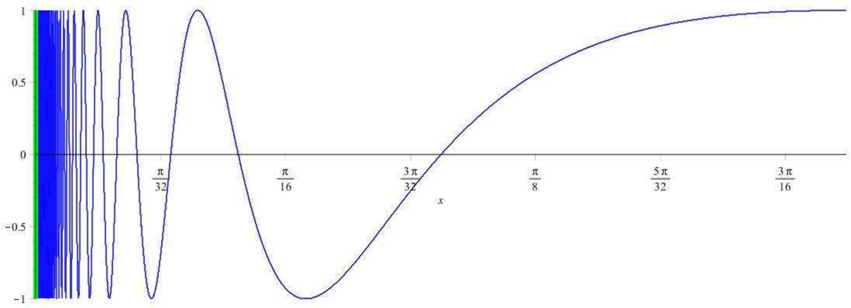
Théorème 2 (de Heine-Borel-Lebesgue)
Un sous-ensemble $X \subset \mathbb{R}^n$ est compact (borné et fermé) si et seulement si de toute famille de sous-ensembles ouverts $X_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ tels que $X \subset \bigcup_\alpha X_\alpha$ on peut extraire une famille finie $X_{\alpha'}$ telle que $X \subset \bigcup_{\alpha'} X_{\alpha'}$.

Definition un ensemble $D \subset \mathbb{R}^n$, $D \neq \phi$, est connexe s'ils n'existent pas deux sous ensembles ouverts $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ tels que :

$$X \cap Y = \phi, \quad X \cap D \neq \phi, \quad Y \cap D \neq \phi, \quad D \subset X \cup Y$$

Exemple . $D = D_1 \cup D_2$, où.

$$\left.\begin{array}{l} D_1 = \{ (x, \sin(\frac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leqslant \frac{2}{\pi} \} \\ D_2 = \{ (0, y) \subset \mathbb{R}^2 : -1 \leqslant y \leqslant 1 \}. \end{array}\right\} (*).$$



Definition un ensemble $D \subset \mathbb{R}^n$, $D \neq \phi$, est connexe par arcs si deux points x, y quelconques de D peuvent être joints dans D par un chemin.

une fonction continue de $[0,1] \longrightarrow D$ (voir §3.0)

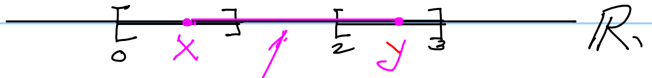
Remarque: connexe par arc implique connexe, mais pas vice-versa. D de l'exemple $(*)$ n'est pas connexe par arc.

Exemples: $C = [0,1] \subset B(0,2) =]-2,2[$.

compact, connexe par arc.

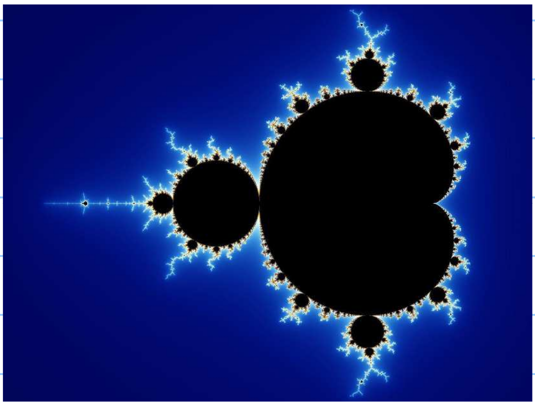
$C = [0,1] \cup [2,3] \subset B(0,4) =]-4,4[$.

compact, mais pas connexe par arc



un chemin qui relie x et y. (mais pas dans C)

Ensemble de Mandelbrot.



- ensemble compact ✓
- ensemble connexe ✓
- connexe par arc ?

https://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble_de_Mandelbrot

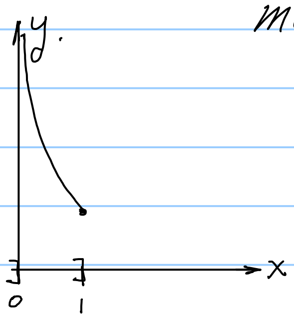
https://www.youtube.com/watch?v=zXTpASSd9xE&feature=youtu.be

Comment vérifier la continuité d'une fonction sur un ensemble compact?

Critère: Soit $D \subset \mathbb{R}$ un ensemble ouvert et $C \subset D$ un ensemble compact. Alors la restriction d'une fonction continue $f: D \to \mathbb{R}$ à C est une fonction continue sur^{n} C

Définition: une fonction $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ est appelée bornée (ou bornee sur D) si l'image de f est un ensemble borné, c.-à-d. s'il existe une constante $r > 0$ telle que $Im(f) \subset B(0,r)$, ou encore, si pour tout $x \in D$, $-r \leq f(x) \leq r$

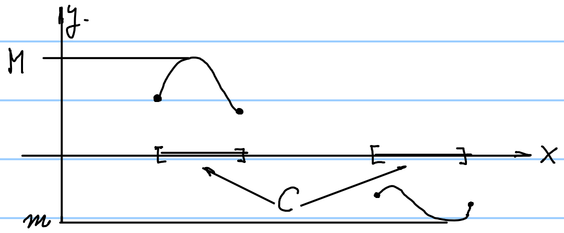
Exemple: la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ est continue.
mais non bornée sur $D =]0, 1]$.



On a les résultats suivants qui sont analogues aux résultats pour les fonctions d'une variable (voir Analyse I pour C un intervalle fermé)

Théorème: toute fonction continue sur un ensemble compact est bornée et admet un minimum et un maximum absolu

Exemple:



⌜ Démonstration (utiliser Bolzano-Weierstrass + Ex3, série 7B)

i) f est bornée sur C (démonstration par l'absurde)

Si f n'est pas bornée sur C il existe une suite $(x_k)_{k\geq 0}$, $x_k \in C$, telle que $\forall k \in \mathbb{N}$, $|f(x_k)| > k$. C étant compact on peut extraire de $(x_k)_{k\geq 0}$ une sous-suite $(x_{k(p)})_{p\geq 0}$ telle que $\lim_{p\to\infty} x_{k(p)} = x \in C$, et par la continuité de f $\lim_{p\to\infty} |f(x_{k(p)})| = |f(x)| < \infty$. $\times$ ⌟

ii) existence du maximum et minimum.

Soit $m := \text{Inf}\{f(x) : x \in C\}$
$M := \text{Sup}\{f(x) : x \in C\}$

Par la définition de l'Inf et du Sup il existent des suites $(x_k)_{k\geq 0}$ et $(y_k)_{k\geq 0}$ telles que.

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = m \quad \text{et} \quad \lim_{k\to\infty} f(y_k) = M.$$

Des suites $(x_k)_{k\geq 0}$ et $(y_k)_{k\geq 0}$ on peut extraires des sous-suites $(x_{k(p)})_{p\geq 0}$ et $(y_{k(p)})_{p\geq 0}$ telles que $\lim_{p\to\infty} x_{k(p)} = x \in C$ et $\lim_{p\to\infty} y_{k(p)} = y \in C$, et

par la continuité de f, $f(x) = m$ et $f(y) = M$ ⌟

Théorème toute fonction continue $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$, où $C \subset \mathbb{R}^n$ est un ensemble compact, est uniformement continue sur C

⌜ Démonstration (par l'absurde).

Si f n'est pas uniformement continue sur C, $\exists\, \varepsilon > 0$, $\forall \delta > 0$, $\exists\, x, y \in C$, $\|x-y\| \leq \delta$ et $\|f(x) - f(y)\| > \varepsilon$. On peut donc trouver deux suites $(x_k)_{\geq 0}$ et $(y_k)_{k\geq 0}$

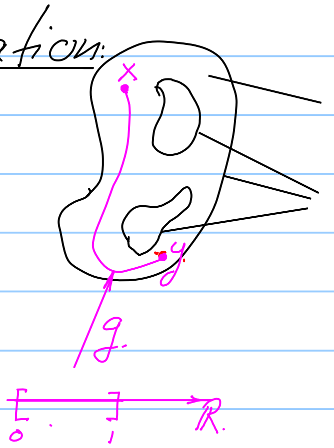
telles que $\exists \varepsilon > 0, \forall k \in \mathbb{N}^*, \|x_k - y_k\| \leq \frac{1}{k}$ et $|f(x_k) - f(y_k)| > \varepsilon$. De $(x_k)_{k\geq 0}$ on peut extraire une sous-suite $(x_{k(p)})_{p\geq 0}$ telle que $\lim_{p\to\infty} x_{k(p)} = x \in C$ et on a:

$$\|y_{k(p)} - x\| \leq \|y_{k(p)} - x_{k(p)}\| + \|x_{k(p)} - x\| \leq \frac{1}{k(p)} + \|x_{k(p)} - x\|$$

ce qui montre que $\lim_{k\to\infty} y_{k(p)} = x$. Par la continuité de la fonction f il existe p_0 tel que $\forall p \geq p_0$ $|f(x_{k(p)}) - f(y_{k(p)})| \leq \varepsilon$ $\times$

Théorème (de la valeur intermédiaire): toute fonction continue sur un ensemble compact, connexe par arc admet toutes les valeurs dans l'intervalle $[m, M]$, où m est le minimum absolu ($\equiv$ global) et M le maximum absolu ($\equiv$ global) de la fonction

Démonstration:



$C \subset \mathbb{R}^n$ compact, connexe par arc

les bords sont inclus dans C

puisque C est connexe par arc il existe $g : [0,1] \to C$, continue, telle que $g(0) = x$ et $g(1) = y$.

Soit $x, y \in C$ tels que $f(x) = m$ et $f(y) = M$ et soit $g : [0,1] \longrightarrow C$ un arc (= courbe = fonction continue) qui relie x à y, c.-à-d. $g(0) = x$ et $g(1) = y$. Puisque f et g sont continues, la fonction $h = f\circ g : [0,1] \to \mathbb{R}$ est continue, $h(0) = m$, $h(1) = M$ et h prend donc toutes les valeurs dans l'intervalle $[m, M]$ (voir Analyse I)
Conséquence: f prend toutes les valeurs dans $[m, M]$ sur toute courbe dans C qui relie x à y.

<u>Théorème</u> Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble compact, $f: C \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f atteint ses extremums absolus (globaux) :

i) dans l'intérieur de C en un point stationnaire

ii) dans l'intérieur de C en un point où f n'est pas différentiable ($\equiv$ dérivable).

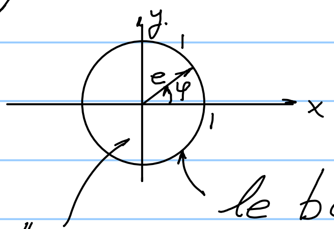
iii) sur le bord ($\equiv$ la frontière) de C.

<u>Attention!</u> si $\nabla f(x_0) = 0$ pour x_0 un point dans l'intérieur de C, alors x_0 est de type i) ou ii), selon si f est différentiable en x_0 ou pas.

9.5.2. Exemples, $n=2$

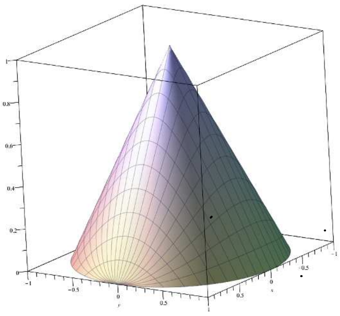
1) $f(x,y) = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$ sur $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$.

f est continue sur C, car f continue sur $\mathbb{R}^2$ qui est un ensemble ouvert qui contient C



le bord (= frontière) de C

"l'intérieur de C" $= B(0,1)$



i) $\nabla f(x,y) = \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)^T$ existe sur $B(0,1) \setminus \{(0,0)\}$

$\Rightarrow \nabla f(x,y) \neq (0,0)^T$

$\Rightarrow$ pas de points stationnaires

ii) en (0,0) la fonction n'est pas différentiable (sinon le gradient y serait bien défini).
Un outil pour analyser ce point est la dérivée directionnelle unilatérale. Pour $\underline{e} = \underline{e}(\varphi) = (\cos(\varphi), \sin(\varphi))^T$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{e}_+}(0,0) = -1 \quad \text{pour tout } \varphi \in [0, 2\pi]$$

On a donc pour $t > 0$ petit (voir le chapitre 7.1)

$$g(t) = f(0 + t\cdot\cos(\varphi), 0 + t\cdot\sin(\varphi)) = g(0) - 1\cdot t + t\cdot\varepsilon(t)$$

$$< g(0) = f(0,0)$$

ce qui veut dire que f admet un maximum local en (0,0). et $\boxed{f(0,0) = 1}$

iii) pour les points du bord on a $x^2 + y^2 = 1$ et $\boxed{f(\text{point du bord}) = 0}$. La fonction f admet donc le minimum global en ces points.

<u>Conclusions de i) – iii)</u>

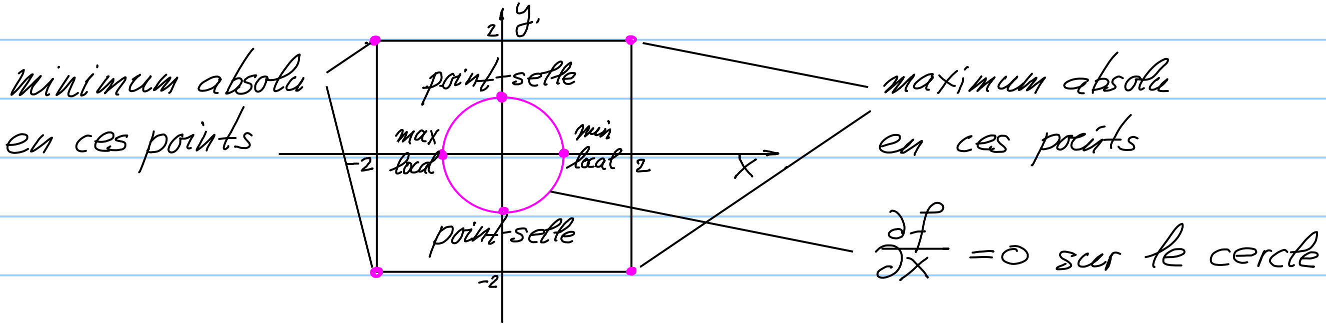
- le maximum global de f est $M = 1$
- le minimum global de f est $m = 0$
- $f : C \xrightarrow{\text{surjective}} [0,1] = [m, M]$ car C est compact et convexe par arc

(on peut appliquer le théorème de la valeur intermédiaire)

2) $f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + xy^2 - x$ sur

$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|,|y|\} \leq 2\} \subset \mathbb{R}^2$

f continue sur C car f continue sur $\mathbb{R}^2$.



minimum absolu en ces points

maximum absolu en ces points

$\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ sur le cercle

i) $\nabla f(x,y) = (x^2+y^2-1, 2xy)^T \overset{!}{=} \binom{0}{0} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x^2+y^2-1=0 \\ 2xy=0 \end{array}$

les points stationnaires sont :
$\{(1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1)\}$

$\boxed{f(1,0) = -\frac{2}{3}}$, $\boxed{f(0,\pm 1) = 0}$, $\boxed{f(-1,0) = \frac{2}{3}}$

ii) f est differentiable car un polynôme (pas de points dans cette liste).

iii) <u>quatres parties:</u>

$x=2;\ -2 \leq y \leq 2 : f(2,y) = \frac{2}{3} + 2y^2$ ①
$y=2;\ -2 \leq x \leq 2 : f(x,2) = \frac{1}{3}x^3 + 3x$ ②
$x=-2;\ -2 \leq y \leq 2 : f(-2,y) = -\frac{2}{3} - 2y^2$ ③
$y=-2;\ -2 \leq x \leq 2 : f(x,-2) = \frac{1}{3}x^3 + 3x$ ④

① valeur minimale en $y=0$: $\boxed{f(2,0) = \frac{2}{3}}$

valeur maximale en $y = \pm 2$: $\boxed{f(2,\pm 2) = \frac{26}{3}}$

② $\frac{d}{dx} f(x,2) = x^3 + 3 > 0$, $f(x,2)$ est croissante.

valeur minimale en $x=-2$: $\boxed{f(-2,2) = -\frac{26}{3}}$

valeur maximale en $x = 2$: $\boxed{f(2,2) = \frac{26}{3}}$

③ voir ①, valeur minimale en $y = \pm 2$: $\boxed{f(-2,\pm 2) = -\frac{26}{3}}$

valeur maximale en $y = 0$: $\boxed{f(-2,0) = -\frac{2}{3}}$

④ identique à ②: $\boxed{f(-2,-2) = -\frac{26}{3}}$, $\boxed{f(2,-2) = \frac{26}{3}}$

Conclusion: $m = -\frac{26}{3}$, $M = \frac{26}{3}$ (comparer les valeurs)

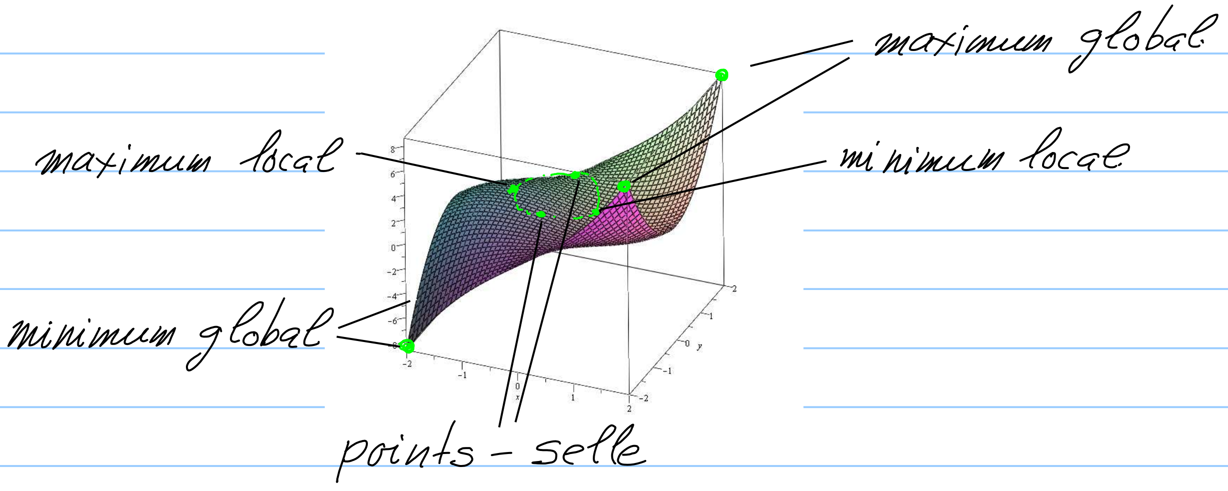
Discussion des points stationnaires

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{2x} & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}, \quad \Lambda_1 = 2x, \quad \Lambda_2 = 4(x^2 - y^2)$$

$(1,0)$: $\Lambda_2 = 4 > 0$, $\Lambda_1 = 2 > 0 \Longrightarrow$ minimum local

$(-1,0)$: $\Lambda_2 = 4 > 0$, $\Lambda_1 = -2 < 0 \Longrightarrow$ maximum local

$(0,\pm 1)$: $\Lambda_2 = -4 < 0 \Longrightarrow$ points-selle



9.5.3. Remarques pour le cas $n > 2$

- même procédure que pour $n = 2$
- sur le bord on aura typiquement des fonctions de $\mathbb{R}^{n-1}$ dans $\mathbb{R}$
- procéder d'une manière récursive

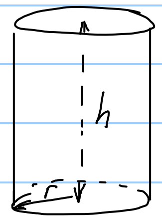
9.6. Extremums liés

La méthode (des multiplicateurs de Lagrange) permet de trouver des extremums d'une fonction f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ (fonction objectif) sous contraintes (d'autre fonctions $g_1, \dots, g_m$, $1 \leq m \leq n-1$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$).

9.6.1. Exemple

Trouver le cylindre de volume V donné et de surface minimale

$$V - \pi r^2 h \qquad =: g(r,h) \overset{!}{=} 0$$
$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h \qquad =: f(r,h)$$



Méthode 1: éliminer une des variables:

$$g(r,h) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad h = \frac{V}{\pi r^2} \qquad \text{(contrainte)}$$

$$S(r) = f\left(r, \frac{V}{\pi r^2}\right) = 2\pi r^2 + 2\pi \cdot r \, \frac{V}{\pi r^2}$$
$$= 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$$

$$S'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{r = \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (*)}$$

$$\Rightarrow S = 3 \cdot (2\pi)^{1/3} \, V^{2/3}$$

(et c'est bien un minimum car $S'' > 0$)

Méthode 2: fonction de Lagrange. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, et

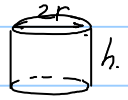
$$F(r,h,\lambda) := f(r,h) - \lambda\, g(r,h)$$
$$= 2\pi r^2 + 2\pi r h - \lambda\,(V - \pi r^2 h)$$

On cherche des points stationnaires de F ($\nabla F = 0$).

$$\nabla F(r,h,\lambda) = (\underbrace{4\pi r + 2\pi h + \lambda 2\pi r h}_{①}, \underbrace{2\pi r + \lambda \pi r^2}_{②}, \underbrace{-(V - \pi r^2 h)}_{③})^T$$
$$= (0,0,0)^T$$

$$② \Rightarrow \lambda = -\frac{2}{r} \underset{①}{\Rightarrow} 4\pi r + 2\pi h - \frac{2}{r} 2\pi r h = 0$$

$$\Rightarrow 4\pi r - 2\pi h = 0 \Rightarrow h = 2r$$



$$\underset{③}{\Rightarrow} V = \pi r^2 (2r) \Rightarrow r = \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$$ (on retrouve (*))

9.6.2. Théorème des multiplicateurs de Lagrange

Théorème (condition nécessaire pour un extremum lié)

Soient les fonctions $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ ouvert, de classe C^1 et un point (x_0, y_0) tel que $g(x_0,y_0) = 0$ et $\nabla g(x_0,y_0) \neq 0$ (*). Si f admet en (x_0,y_0) un extremum sous la contrainte g (c'est-à-dire on réduit l'étude de f aux points (x,y) tels que $g(x,y)=0$), alors il existe un nombre $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que la fonction de Lagrange

$$F : D \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y,\lambda) \longmapsto f(x,y) - \lambda \cdot g(x,y)$$

soit stationnaire en (x_0, y_0, λ_0).

Remarque: $\nabla F(x_0,y_0,\lambda_0)=0 \iff$

$$\Big(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)-\lambda_0\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)}_{①},\ \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)-\lambda_0\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)}_{②},\ \underbrace{-g(x_0,y_0)}_{③}\Big)^T$$

$$=(0,0,0)^T$$

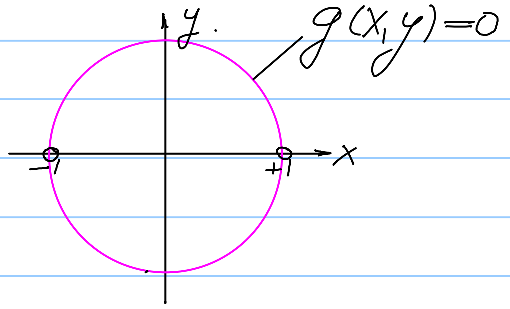
$$\left.\begin{array}{l} ① = 0 \\ ② = 0 \end{array}\right\} \iff \nabla f(x_0,y_0)=\lambda_0 \nabla g(x_0,y_0) \quad \text{pour un } \lambda_0 \in \mathbb{R}.$$

$③ = 0$ la contrainte.

Contre-exemple (au "théorème" sans (*))

$f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f(x,y)=x\ ,\ g(x,y)=(x^2+y^2-1)^2$



$g(x,y)=0$ la contrainte
($\iff x^2+y^2=1$)

$f(1,0)=1$ (maximum sous contrainte)
$f(-1,0)=-1$ (minimum sous contrainte)

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y)-\lambda\, g(x,y) = x-\lambda\,(x^2+y^2-1)^2$$

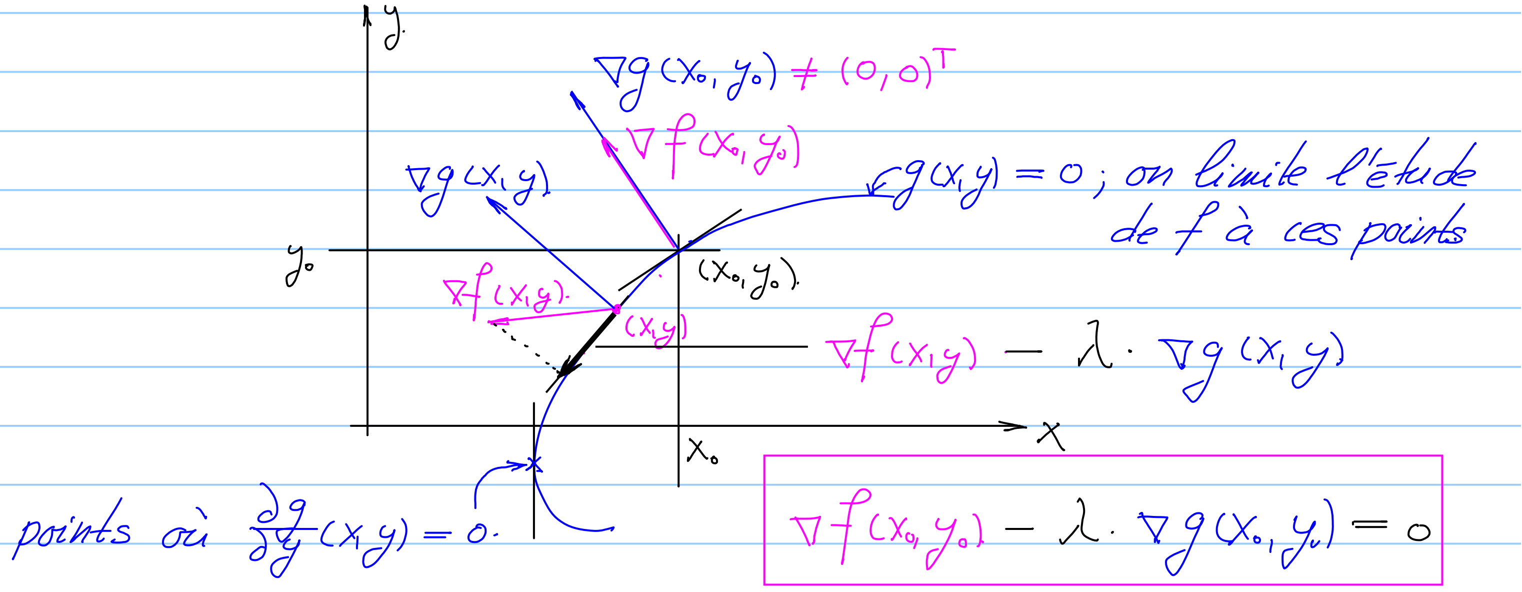
$$\nabla F(x,y,\lambda)=\big(\underbrace{1-\lambda 4x(x^2+y^2-1)}_{①},\ \underbrace{\lambda . 4y(x^2+y^2-1)}_{②},\ \underbrace{-(x^2+y^2-1)^2}_{③}\big)^T$$

$$③=0 \Rightarrow x^2+y^2-1=0 \left\{\begin{array}{l} \Rightarrow ② = 0 \\ \Rightarrow ① = 1 \neq 0 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow \nabla F(x,y,\lambda)=(1,0,0)^T \neq (0,0,0)^T$ pour tous les points (x,y) tels que $g(x,y)=0$.

La raison est que $\nabla g(x,y)=(4x(x^2+y^2-1),\ 4y(x^2+y^2-1))^T$ et on a donc $\nabla g(x,y)=(0,0)^T$ pour tous les points (x,y) tels que $g(x,y)=0$.

Démonstration du théorème



$$\boxed{\nabla f(x_0,y_0) - \lambda \cdot \nabla g(x_0,y_0) = 0}$$

Supposons que $\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$. Puisque $g(x_0,y_0)=0$ le théorème des fonctions implicites implique l'existence d'une fonction h, définie dans un voisinage de x_0 telle que $h(x_0)=y_0$ et $g(x,h(x))=0$ ("on peut isoler y" dans l'équation $g(x,y)=0$). On peut donc, comme dans le premier exemple, utiliser la méthode I et remplacer dans f la variable y par $h(x)$ et chercher des points stationnaires de la fonction $s(x) := f(x,h(x))$. On a

$$s'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,h(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,h(x))\, h'(x)$$

et en x_0 on trouve avec $h(x_0)=y_0$

$$s'(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\; h'(x_0)$$

et $s'(x_0)=0$ par hypothèse (=: point stationnaire de f sous la contrainte $g(x,y)=0$). Mais, par le théorème des fonctions implicites, on a que

$$h'(x_0) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)}$$

et donc

$$s'(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)} = 0 .$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lambda_0 \frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0) \qquad \text{avec} \quad \lambda_0 = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}{\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \nabla f(x_0,y_0) = \lambda_0 \nabla g(x_0,y_0)$$

Ceci montre le théorème sous condition que $\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$. Si $\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$ on a forcément que $\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0) \neq 0$ (sinon $\nabla g(x_0,y_0) = 0$ en contradiction avec l'hypothèse (*) du théorème), et par le théorème des fonctions implicites il existe donc une fonction $\tilde{h}$, telle que $\tilde{h}(y_0) = x_0$ et $g(\tilde{h}(y),y) = 0$ pour y dans un voisinage de y_0, et on peut refaire la démonstration avec les mêmes conclusions. $\lrcorner$

Théorème (cas général)

Soient les fonctions $f, g_1, \dots, g_m : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, $1 \leq m \leq n-1$, de classe C^1 et un point $\underline{x}_0 \in D$ tel que $g_i(\underline{x}_0) = 0$, $i = 1, \dots, m$, et les vecteurs $\nabla g_i(\underline{x}_0)$, $i = 1, \dots, m$ soient linéairement indépendants (pour $m = 1$ c'est la condition (*)). Si f admet en $\underline{x}_0$ un extremum sous les contraintes $g_i(\underline{x}) = 0$, $i = 1, .., m$ alors il existe un vecteur $\underline{\lambda}_0 \in \mathbb{R}^m$ tel que la fonction de Lagrange

$$F : D \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\underline{x}, \underline{\lambda}) \longmapsto f(\underline{x}) - \langle \underline{\lambda}, g(\underline{x}) \rangle$$

où $g(\underline{x}) := (g_1(\underline{x}), \dots, g_m(\underline{x}))^T \in \mathbb{R}^m$

soit stationnaire en $(\underline{x}_0, \underline{\lambda}_0)$.

<u>Notation:</u> $\langle \underline{\lambda}, g(\underline{x}) \rangle = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\underline{x})$

<u>Démonstration</u> on utilise le théorème des fonctions implicites pour exprimer m variables en termes des autres $n-m$ variables. Par exemple, soit

$$\underline{x} = (x, y) \in U \times V \subset D$$

$$x = (x_1, \dots, x_{n-m}) \ , \ y = (x_{n-m+1}, \dots, x_n)$$

Alors $g : U \times V \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $g(x_0, y_0) \equiv g(\underline{x}_0) = 0$

et si $\det\left(\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)\right) \neq 0$ on a $y = h(x)$,

avec $y_0 = h(x_0)$ et la fonction

$$s(x) = f(x, h(x))$$

satisfait $s'(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot h'(x_0)$.,
ce qui implique que

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(\underline{x}_0)}_{1 \times (n-m)} = \underbrace{\boxed{\underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(\underline{x}_0)}_{1 \times m} \underbrace{\left(\frac{\partial g}{\partial y}(\underline{x}_0)\right)^{-1}}_{m \times m}}}_{= \lambda_0} \underbrace{\frac{\partial g}{\partial x}(\underline{x}_0)}_{m \times (n-m)} = 0$$

9.6.4. Maximum et minimum d'une fonction de classe C^1 sur un domaine compact avec un bord de classe C^1

(A comparer avec la méthode vu en section 9.5.2.)

Soit $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1, $D \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, telle que l'ensemble

$$C := \{ \underline{x} \in D : g(\underline{x}) \leq 0 \}$$

soit un ensemble compact et telle que

$$\mathring{C} = \{ \underline{x} \in D : g(x) < 0 \}.$$

Alors, pour trouver le maximum et le minimum absolu d'une fonction $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 (f est de classe C^1 sur C, si f est la restriction d'une fonction $C^1(D, \mathbb{R})$ à C):

i) on localise les points stationnaires de f dans $\mathring{C}$.

(ii) cette liste est vide, car f de classe C^1)

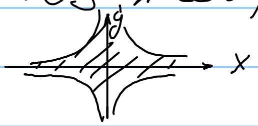
iiia) on localise les points où $g(\underline{x}) = 0$ et $\nabla g(\underline{x}) = 0$

iiib) on localise les points stationnaires de la fonction $F(\underline{x}, \lambda) = f(\underline{x}) - \lambda g(\underline{x})$ dans $D \times \mathbb{R}$

iv) on évalue f aux points trouvés sous i) – iii) et on compare les valeurs

Attention: ii) est indispensable. Il ne suffit pas de trouver les points iii) et de contrôler après coup que $\nabla g(\underline{x}) \neq 0$ pour ces points. Voir le contre-exemple de la section 9.6.2

Attention: il faut contrôler que C est compact. $X := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x||y| - 1 \leq 0\}$, n'est pas compact par exemple:



Exemple

Soit $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} x_i$. Trouver les extremums de f sur la boule unité fermée.

$$C = \left\{ \underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : g(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 1 \leq 0 \right\}.$$

On a $D = \mathbb{R}^n$, f, g de classe C^1 sur D, C compact.

i) à l'intérieur de C

$$\nabla f(x_1, \dots, x_n) = (x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n, \; x_1 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n, \; \dots, \; x_1 \cdot \dots \cdot x_{n-1})^T$$
$$= (0, \dots, 0)^T$$

$$\Longleftrightarrow \quad x_i = 0 \quad \text{et} \quad x_j = 0 \quad \text{pour deux indices } i \neq j.$$

Pour ces points $f(\underline{x}) = 0$, mais zéro n'est ni le maximum absolu de f ni le minimum absolu de f car on a par exemple pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $|\varepsilon|$ petit que $(\varepsilon, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}) \in C$ car $(n-1)\frac{1}{n^2} + \varepsilon^2 - 1 \leq 0$ et $f(\varepsilon, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}) = \varepsilon \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}$ qui est positif ou négatif selon le signe de ε. Pour trouver les extremums globaux de f il suffit donc d'analyser les points $\underline{x}$ où $f(\underline{x}) \neq 0$, c'est-à-dire les point où $x_i \neq 0$, $i = 1, \dots, n$ (car $f(\underline{x}) = 0$ si un des $x_i = 0$). Pour $x_i \neq 0$, $i = 1, \dots, n$ on peut récrire $\nabla f(\underline{x})$ comme:

$$\nabla f(x_1, \dots, x_n) = f(\underline{x}) \cdot \left(\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_n}\right)^T .$$

iiia) $\nabla g(\underline{X}) = (2X_1, \dots, 2X_n) \neq (0, \dots, 0)^T$

si $g(\underline{X}) = 0$, c.-à-d. pour $\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = 1$ ·(pas de points dans cette liste).

iiib) on pose $F(\underline{X}, \lambda) = f(\underline{X}) - \lambda g(\underline{X})$ et on cherche des points stationnaires de F sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Mais

$$\nabla F(\underline{X}, \lambda) = 0 \iff \nabla f(\underline{X}) = \lambda \nabla g(\underline{X}) \text{ et } g(\underline{X}) = 0 \iff$$

$$\begin{cases} f(\underline{X}) \dfrac{1}{X_i} - \lambda \cdot 2X_i = 0 \quad i = 1, \dots, n. \\ \sum_{i=1}^{n} X_i^2 = 1 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} f(\underline{X}) = 2\lambda X_1^2 & ① & & \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2X_1^2} f(\underline{X}) \ (\neq 0) \\ f(\underline{X}) = 2\lambda X_2^2 & \vdots & ② = ① & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \left.\right\} \ X_i^2 = X_1^2 \ , i = 2, \dots, n \\ f(\underline{X}) = 2 \cdot \lambda X_n^2 & ⓝ & ⓝ = ① & \\ \sum_{i=1}^{n^2} X_i^2 = 1 & & & (**) \end{cases}$$

Donc $X_1^2 = X_2^2 = \dots = X_n^2 =: a > 0$ et avec $(**)$ on obtient que $n \cdot a = 1$ ou $a = \frac{1}{n} \Rightarrow X_i = \pm\frac{1}{\sqrt{n}}$, $i = 1 \dots n$.
(on a donc 2^n points intéressants).

iv) on peut choisir un nombre pair des $X_i = -\frac{1}{\sqrt{n}}$ et les autres $= \frac{1}{\sqrt{n}}$. Alors

$$f(\underline{X}) = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n = n^{-\frac{1}{2}n} \qquad \text{points de maximums}$$

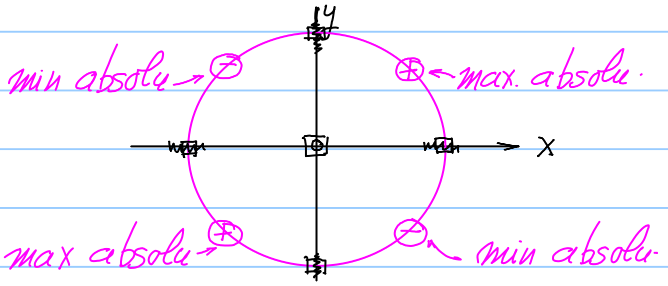
on peut choisir un nombre impair des $X_i = -\frac{1}{\sqrt{n}}$ et les autres $= \frac{1}{\sqrt{n}}$. Alors

$$f(\underline{X}) = -\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n = -n^{-\frac{1}{2}n} \qquad \text{points de minimums.}$$

Le cas particulier n=2

$$f(x,y) = x\cdot y \quad , \quad \nabla f(x,y) = (y,x)^T$$

$$C = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2-1 \leq 0 \}.$$



〰 $f(x,0) = f(0,y) = 0$

∘ $\nabla f(0,0) = (0,0)^T \; , f(0,0) = 0$

□ $f(\pm 1,0) = f(0,\pm 1) = 0$

⊕ $f(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}) = f(-\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt2}) = -\frac{1}{2}$

⊖ $f(\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt2}) = f(-\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}) = \frac{1}{2}$

$m = -\frac{1}{2}, \quad M = \frac{1}{2}$

$f : C \longrightarrow [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ est surjective

9.6.5. Méthode directe (n=2) paramétrisation du bord

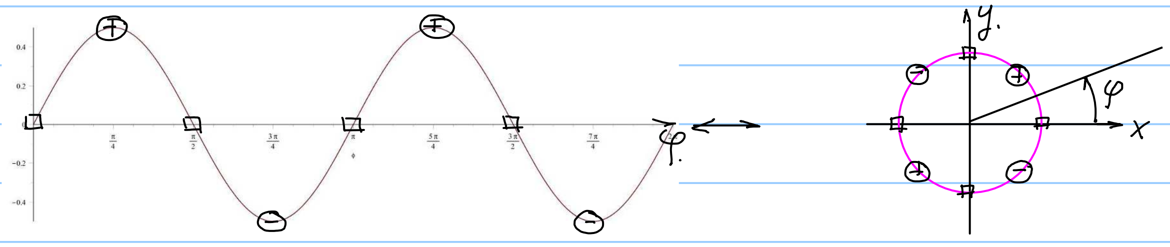
Dans l'exemple précédent (n=2) le bord est le cercle unité que l'on peut paramétriser par:

$$\left.\begin{array}{l} x = \cos(\varphi) \\ y = \sin(\varphi) \end{array}\right\} \quad \varphi \in [0,2\pi[$$

$$\text{chemin: } \gamma :]0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2.$$
$$\varphi \longmapsto (\cos(\varphi), \sin(\varphi))$$

En évaluant f le long de ce chemin on obtient

$$(f\circ\gamma)(\varphi) = f(\cos(\varphi),\sin(\varphi)) = \cos(\varphi)\cdot\sin(\varphi) = \frac{1}{2}\sin(2\varphi)$$



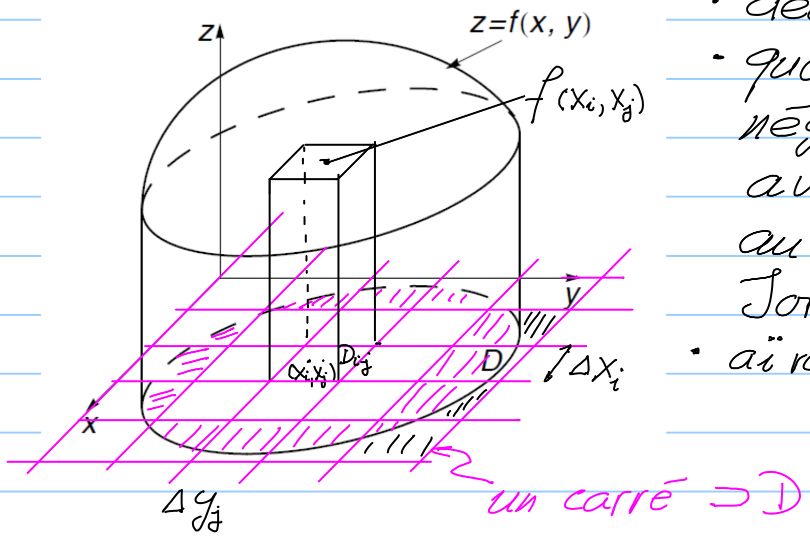
10. Intégrales multiples

10.1. Intégrales doubles $(n=2)$

10.1.1. Problématique

$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ continue

$D \subset \mathbb{R}^2$ compact avec un bord "négligeable"



- découper en rectangles
- quoi faire avec ////, négliger ou compléter avec /// ? Ça revient au même, si le bord est Jordan-négligeable
- aïre de $D_{ij} = |D_{ij}| = \Delta\sigma_{ij} := \Delta x_i \Delta y_j$

10.1.2. Intégrale de Riemann sur un rectangle fermé

(voir Analyse I, chapitre 8.1.1.)

Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $c < d$,

$D = [a,b] \times [c,d]$ et $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ bornée

Considérons, pour $p, q \in \mathbb{N}^*$ les subdivisions $\sigma_1 = \{x_0, \dots, x_p\}$ de $[a,b]$ et $\sigma_2 = \{y_0, \dots, y_q\}$ de $[c,d]$:
$a = x_0 < x_1 < \dots < x_p = b$, $c = y_0 < y_1 < \dots < y_q = d$

Posons, pour $1 \leq i \leq p$ et $1 \leq j \leq q$.

$$D_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$$

Alors $|D_{ij}| = (x_i - x_{i-1}) \cdot (y_j - y_{j-1}) =: \Delta x_i \cdot \Delta y_j$.

$$|D| = (b-a) \cdot (d-c) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} |D_{ij}|.$$

et $D = \bigcup_{i,j} D_{ij}$. (Les D_{ij} sont aussi appelés une partition de D).

Les sommes de Darboux inférieures et supérieures de f relative à la paire de subdivisions (σ_1, σ_2) sont définies par:

$$\underline{S}(f, \sigma_1, \sigma_2) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} m_{ij} \, |D_{ij}|$$

$$\bar{S}(f, \sigma_1, \sigma_2) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} M_{ij} \, |D_{ij}|$$

où

$$m_{ij} = \operatorname{Inf}\{ f(x,y) : (x,y) \in D_{ij} \},$$

$$M_{ij} = \operatorname{Sup}\{ f(x,y) : (x,y) \in D_{ij} \},$$

puis on définit:

$$\underline{S} = \underline{S}(f) = \operatorname*{Sup}_{\sigma_1, \sigma_2} \underline{S}(f, \sigma_1, \sigma_2).$$

$$\bar{S} = \bar{S}(f) = \operatorname*{Inf}_{\sigma_1, \sigma_2} \bar{S}(f, \sigma_1, \sigma_2).$$

Definition: une fonction f est dite intégrable sur un rectangle fermé D (au sens de Riemann) si

$$\underline{S}(f) = \bar{S}(f).$$

Remarque (voir § 10.3): d'une manière analogue on définit l'intégrale multiple d'une fonction bornée définie sur un hyper-rectangle de $\mathbb{R}^n$ (produit cartésien de n intervalles fermés).

Notations: $\int_D f(x,y)\,d\sigma$, $\int_D f(x,y)\,dx\cdot dy$

$\int_D f\,d\sigma$, $\int_D f$, $\int_D f(\underline{x})\,d\underline{x}$

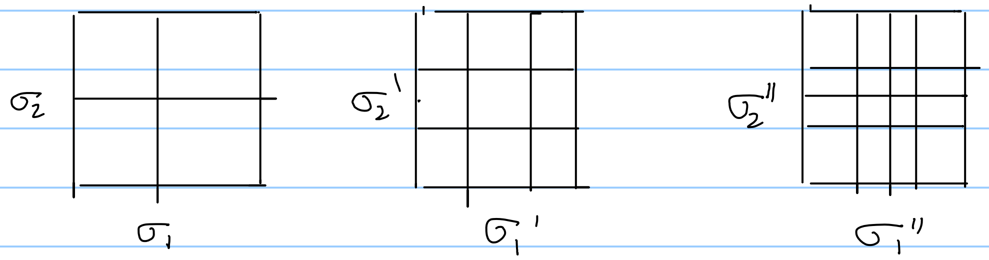
$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$, $\iint_D f\,d\sigma$ etc

Remarque: $\int_D f(x,y)\,d\sigma$ donne le volume du cylindre de base D délimité "en haut" (on suppose $f(x,y)\geq 0$ ici) par la surface $z=f(x,y)$.

Remarque 10.1.2: soient (σ_1,σ_2) et (σ_1',σ_2') deux subdivisions, alors:

$$\underline{S}(f,\sigma_1,\sigma_2)\leq\overline{S}(f,\sigma_1',\sigma_2')$$

Démonstration: soit (σ_1'',σ_2'') le rafinement commun de (σ_1,σ_2) et (σ_1',σ_2').



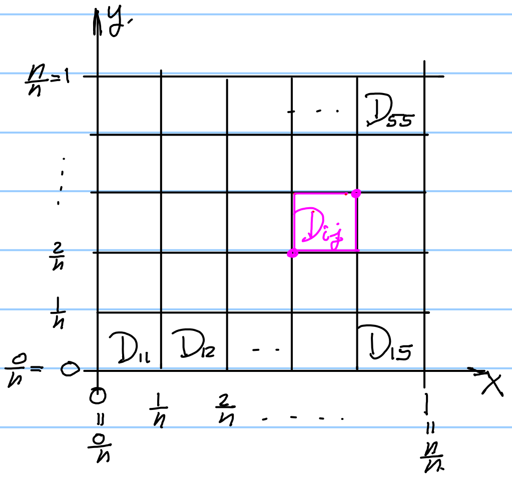
alors $\underline{S}(f,\sigma_1,\sigma_2) \le \underline{S}(f,\sigma_1'',\sigma_2'')$

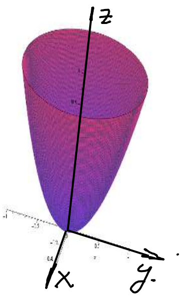
$\le \overline{S}(f,\sigma_1'',\sigma_2'') \le \overline{S}(f,\sigma_1',\sigma_2') \lrcorner$

$$\boxed{\underline{\text{Conséquence:}} \quad -\infty < \underline{S} \le \overline{S} < +\infty}$$

<u>Exemple</u>: $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D = [0,1]\times[0,1]$

$(x,y) \longmapsto x^2+y^2.$





$p=q=n,$

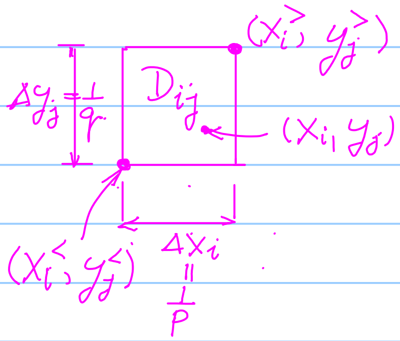
$x_i^< = \frac{i-1}{p}, \quad x_i^> = \frac{i}{p}, \quad i=1,\dots,p$

$y_j^< = \frac{j-1}{q}, \quad y_j^> = \frac{j}{q}, \quad j=1,\dots,q$

<u>Pour tout $x,y \in D$, $\Delta x>0$, $\Delta y>0$:</u>

$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = (x+\Delta x)^2+(y+\Delta y)^2$

$= \dots \ge x^2+y^2 = f(x,y)$



$\Longrightarrow$

$$\underbrace{f(x_i^<, y_j^<)}_{m_{ij}} \le f(x_k, y_k) \le \underbrace{f(x_i^>, y_j^>)}_{M_{ij}}.$$

et donc $\Delta x_i \, \Delta y_j = \frac{1}{pq}$

$$\underbrace{\frac{1}{pq}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} f(x_i^<, y_j^<)}_{\equiv S^<} \le \quad SR \quad \le \underbrace{\frac{1}{pq}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} f(x_i^>, y_j^>)}_{\equiv S^>}$$

$\uparrow$

$$\frac{1}{pq}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} f(x_i, y_j)$$

(f continue). $\lrcorner$

$$S^< \le SR \le S^>$$

$$S^< = \frac{1}{pq}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\left(\left(\frac{i-1}{p}\right)^2 + \left(\frac{j-1}{q}\right)^2\right)$$

"théorème de Fubini"

$$= \underbrace{\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}}\left(\underbrace{\frac{1}{q}\sum_{j=1}^{q}}\left(\left(\frac{i-1}{p}\right)^2 + \left(\frac{j-1}{q}\right)^2\right)\right).$$

$$\xrightarrow[p\to\infty]{} \int dx \qquad \xrightarrow[q\to\infty]{} \int dy.$$

$$\underset{p=q=n}{=} \frac{2}{n^3}\sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{2}{n^3}\,\frac{(n-1)n\cdot(2n-1)}{6} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2}{3}.$$

Analyse I, par récurrence

$$S^> = \text{mêmes idées} = \frac{2}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{2}{n^3}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2}{3}.$$

Finalement, avec la remarque 10.1.2. on a

$$\frac{2}{3} = \lim_{n\to\infty} S^< \leq \underline{S} \leq \overline{S} \leq \lim_{n\to\infty} S^> = \frac{2}{3}$$

<u>Conclusion:</u> la fonction f est intégrable sur D et $\int_D f\, d\sigma = \frac{2}{3}$.

10.1.3. Intégrale de Riemann sur un ensemble borné

<u>Definition:</u> soit $D \subset \mathbb{R}^2$ borné, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée et $E \supset D$ un rectangle fermé. Alors f est intégrable au sens de Riemann sur D si la fonction $\tilde{f} : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\tilde{f}(\underline{x}) = \begin{cases} f(\underline{x}) & \text{si } \underline{x} \in D \\ 0 & \text{si } \underline{x} \in E \setminus D \end{cases}$$

est intégrable sur E et $\int_D f\, d\sigma := \int_E \tilde{f}\, d\sigma.$

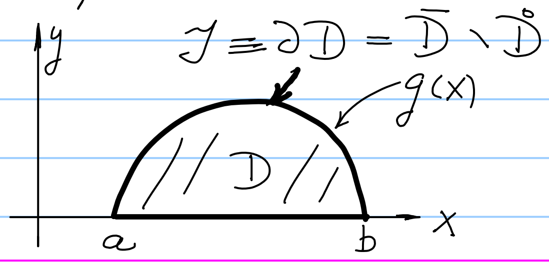
Remarque (sans démonstration) la valeur de cette intégrale ne dépend pas du choix du rectangle E

Définition: (Ensemble mesurable au sens de Jordan)

Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ borné. On dit que D est mesurable au sens de Jordan si la fonction constante égale à un sur D est intégrable au sens de Riemann sur D. Dans ce cas on pose

$$|D| := \int_D 1 \, d\sigma \qquad (=: \text{aire de } D)$$

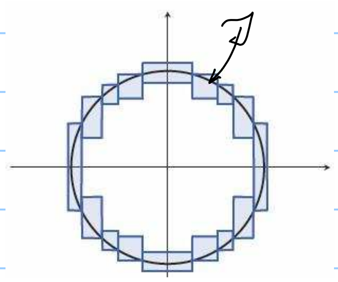
Conséquence:



$$\int_a^b g(x)\,dx = \int_D 1 \cdot d\sigma .$$

Définition: un ensemble borné $J \subset \mathbb{R}^2$ mesurable au sens de Jordan est Jordan-négligeable si $|J| = 0$

Remarque: un ensemble borné $J \subset \mathbb{R}^2$ est Jordan-négligeable si et seulement si $\forall \varepsilon > 0$ il existe un nombre fini de rectangles $D_1, \dots D_N$, tels que $J \subset \bigcup_{i=1}^N D_i$ et $\sum_{i=1}^N |D_i| \leq \varepsilon$.



Théorème (sans démonstration) Un ensemble borné $D \subset \mathbb{R}^2$ est mesurable au sens de Jordan si et seulement si $\partial D = \bar{D} \setminus \mathring{D}$ est négligeable au sens de Jordan.

Théorème : soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un domaine compact $D \subset \mathbb{R}^2$ mesurable au sens de Jordan. Alors f est intégrable sur D au sens de Riemann.

Démonstration : c'est une conséquence de la continuité uniforme de f sur D. (voir Analyse I)

10.1.4. Propriétés des intégrales doubles

Proposition : soit $D \subset \mathbb{R}^2$ compact et mesurable au sens de Jordan, $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$. des fonctions continues et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors :

1) $$\int_D (\alpha \cdot f + \beta g)\, d\sigma = \alpha \int_D f\, d\sigma + \beta \int_D g\, d\sigma$$

c'est la linéarité de l'intégrale (= additive et homogène).

2) $$\int_D f\, d\sigma = \int_{\overline{D_1}} f\, d\sigma + \int_{\overline{D_2}} f\, d\sigma$$

$D = D_1 \cup D_2$

$D_1 \cap D_2 = \emptyset$

D_1, D_2 avec "bords Jordan-négligeables"

$\overline{D_1}$ = adhérence de D_1

$\overline{D_2}$ = adhérence de D_2

(voir le chapitre 2.3)

3) si $f \leq g$, c-à-d. si $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in D$ alors

$$\int_D f\, d\sigma \leq \int_D g\, d\sigma$$

et donc en particulier

$$-\int_D |f|\, d\sigma \leq \int_D f\, d\sigma \leq \int_D |f|\, d\sigma$$

Démonstration : ce sont des conséquences directes de la définition des intégrales doubles

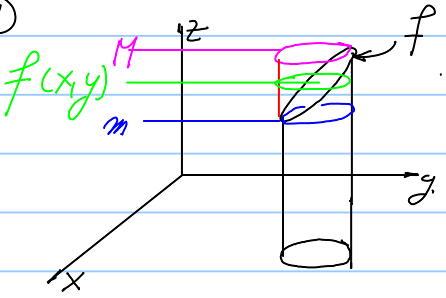
10.1.5 Théorème de la valeur moyenne

Théorème Soit $f : D \to \mathbb{R}$ continue, $D \subset \mathbb{R}^2$ compact connexe par arcs et mesurable au sens de Jordan.
Alors il existe $(x,y) \in D$ tel que

$$\int_D f\,d\sigma = f(x,y)\,\underset{\nwarrow\,\text{aire de } D}{|D|} \qquad (*)$$

Démonstration : (voir Analyse I)

$$m = \min_{(x,y)\in D} f(x,y) \le f(x,y) \le \max_{(x,y)\in D} f(x,y) = M.$$



$$\overset{3)}{\Longrightarrow}$$

$$|D|\,m \le \underbrace{\int_D f\,d\sigma}_{\substack{\shortparallel \\ |D|\cdot c}} \le |D|\,M \qquad \text{avec } c \in [m, M]$$

$$\xrightarrow[\text{continuité}]{} \exists\,(x,y) \in D \text{ tel que } f(x,y) = c$$

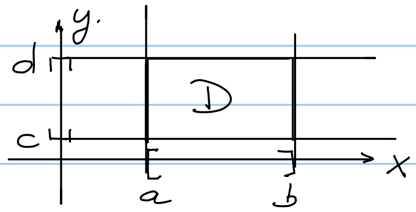
Remarque $(*) \Longleftrightarrow \exists\,(x,y) \in D$ tel que

$$f(x,y) = \frac{1}{|D|}\int_D f\,d\sigma.$$

(= valeur moyenne de f sur D)

10.2. Techniques d'intégration pour les intégrales doubles

Théorème (Fubini) Soit $D=[a,b]\times[c,d]$



et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors l'intégrale $V \equiv \int_D f\,d\sigma$ peut être calculée par intégrations successives :

$$V = \int_a^b dx \int_c^d dy\, f(x,y) \qquad (**)$$

Explication: on intègre d'abord sur y de "c" à "d" en traitant x comme un paramètre. Le résultat de cette opération est une fonction de x que l'on intègre de "a" à "b".

Remarque: le résultat est indépendant de l'ordre dans lequel les intégrales sont effectuées. V est donc aussi égal à

$$V = \int_c^d dy \int_a^b dx\, f(x,y)$$

Exemple $D=[0,1]\times[0,1]$, $f(x,y)=x^2+y^2$

(on a déjà montré par découpage que $\int_D f\,d\sigma = \frac{2}{3}$)

$$\int_D f\,d\sigma = \int_0^1 dx \int_0^1 dy\,(x^2+y^2) =$$

$$= \int_0^1 dx\,\left[x^2y + \frac{1}{3}y^3\right]_{y=0}^{y=1}$$

$$= \int_0^1 dx\,\left(x^2+\frac{1}{3}\right) = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}x\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{2}{3}.$$

On a aussi

$$\int_D f\,d\sigma = \int_0^1 dy.\int_0^1 dx\,(x^2+y^2)$$

$$= \int_0^1 dy\,\left[\frac{1}{3}x^3 + y^2x\right]_{x=0}^{x=1}$$

$$= \int_0^1 dy\,\left(\frac{1}{3}+y^2\right) = \left[\frac{1}{3}y + \frac{1}{3}y^3\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{2}{3}.$$

10.2.2. Remarques concernant la notation

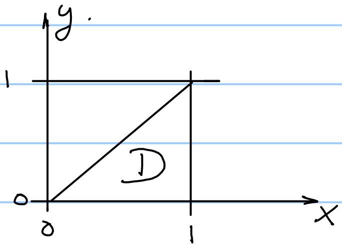
Souvent on trouve au lieu de (**) la notation

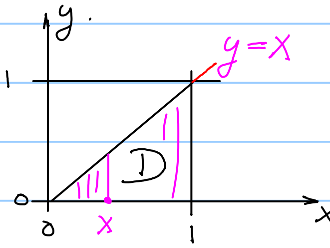
$$\boxed{\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx \equiv \int_a^b dx \int_c^d dy\,f(x,y)}$$

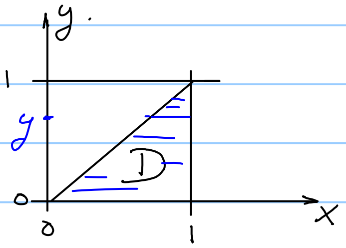
et il faut savoir traduire d'une notation à l'autre ! Mais attention (toujours écrire les parenthèses si on utilise la notation à gauche) !

10.2.3. Intégration sur des domaines plus compliqués

Exemple 1: $f(x,y) = x^2+y^2.$







$$I = \int_D f\, d\sigma = \frac{1}{3} \quad \left(= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \text{ par symétrie} \right)$$

$$I = \underbrace{\int_0^1 dx \int_0^x dy}_{\updownarrow} \, (x^2+y^2) \equiv I_1$$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 ,\ 0 \leq y \leq x \} \qquad (*)$$

$$I = \underbrace{\int_0^1 dy \int_y^1 dx}_{\updownarrow} \, (x^2+y^2) \equiv I_2 .$$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1 ,\ y \leq x \leq 1 \}$$

Mais attention !

Pour (*) on peut aussi écrire

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x ,\ 0 \leq x \leq 1 \} \text{ mais}$$

$$I \neq \int_0^x dy \int_0^1 dx\, f(x,y) \longleftarrow \text{nonsense !}$$

↑ résultat dépend de x

$$I_1 = \int_0^1 dx \left[x^2 y + \frac{1}{3} y^3 \right]_{y=0}^{y=x} = \int_0^1 dx \left(x^3 + \frac{1}{3} x^3 \right)$$

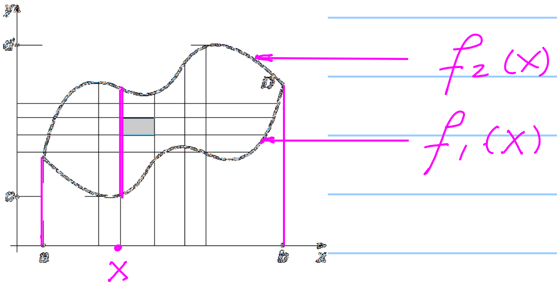
$$= \frac{4}{3} \int_0^1 x^3\, dx = \frac{4}{3} \, \frac{1}{4} x^4 \Big|_0^1 = \frac{1}{3} .$$

$$I_2 = \int_0^1 dy \left[\frac{1}{3} x^3 + y^2 x \right]_{x=y}^{x=1} = \int_0^1 dy \left(\frac{1}{3} + y^2 - \frac{1}{3} y^3 - y^3 \right)$$

$$= \left[\frac{1}{3} y + \frac{1}{3} y^3 - \frac{4}{3} \frac{1}{4} y^4 \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

10.2.4 Domaines délimités par des graphes

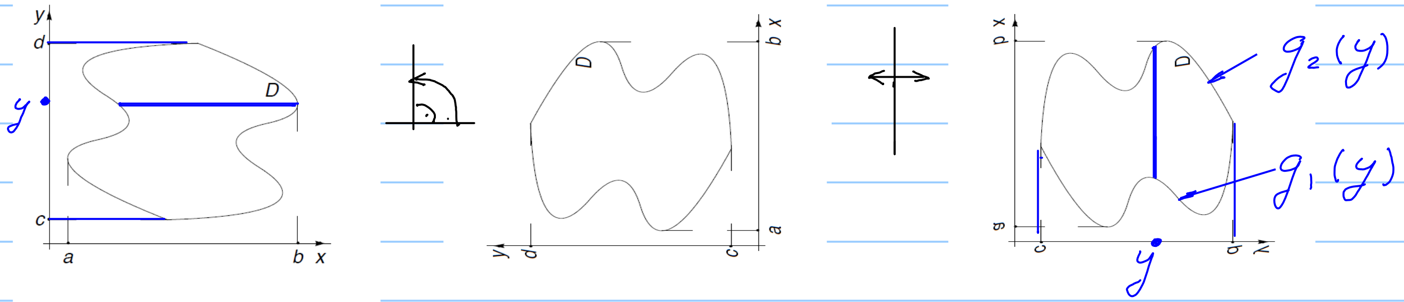
Cas 1



$$D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$$

$$\int_D f \, d\sigma = \int_a^b dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} dy\, f(x,y)$$

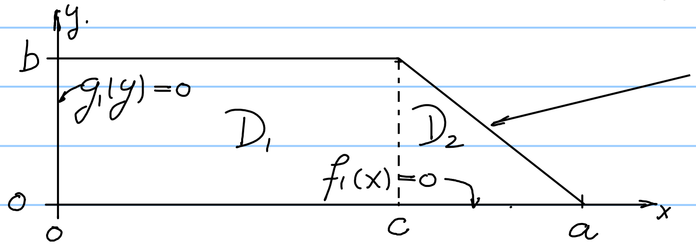
Cas 2



$$D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq b,\ g_1(y) \leq x \leq g_2(y)\}$$

$$\int_D f \, d\sigma = \int_c^d dy \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} dx\, f(x,y)$$

Exemple explicite: $f(x,y) = x \cdot y$



$$\begin{cases} x = a - \frac{a-c}{b} y = g_2(y) \\ y = b - \frac{b}{a-c}(x-c) = f_2(x) \end{cases}$$

$$D = D_1 \cup D_2 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d,\ 0 \leq x \leq g_2(y)\}$$

$$I = \int_D f\, d\sigma = \int_0^b dy \int_0^{a-\frac{a-c}{b}y} dx\; x\cdot y = \dots = (*)$$

ou, par décomposition du domaine:

$$I = \int_{D_1} f\, d\sigma + \int_{D_2} f\, d\sigma =$$

$$= \int_0^c dx \int_0^b dy\; x\cdot y + \int_c^a dx \int_0^{f_2(x)} dy\; x\cdot y$$

$$= \dots = \text{le même résultat}$$

Pour (*) on trouve:

$$(*) = \int_0^b dy \left[\tfrac{1}{2} x^2 \cdot y\right]_{x=0}^{x=a-\frac{a-c}{b}y} = \frac{1}{2}\int_0^b dy \underset{\downarrow}{\left(a-\frac{a-c}{b}y\right)^2} \underset{\uparrow}{y}$$

$$\underset{\substack{\text{intégration}\\ \text{par parties}}}{=} \frac{1}{2}\left[\left(a-\frac{a-c}{b}y\right)^2 \frac{1}{2}y^2\right]_0^b + \frac{1}{2}\left(\frac{a-c}{b}\right)\int_0^b \left(a-\frac{a-c}{b}y\right) y^2\, dy$$

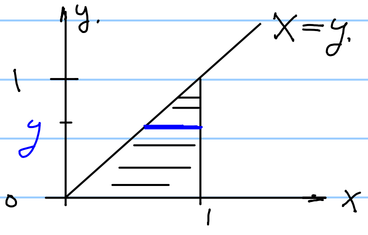
$$= \frac{1}{4} b^2 c^2 + \frac{1}{6}(a-c)\, a\, b^2 - \frac{1}{8}(a-c)^2 b^2$$

$$= \frac{1}{8} b^2 c^2 + \frac{1}{24} a^2 b^2 + \frac{1}{12} a b^2 c$$

10.2.5 Application du théorème de Fubini

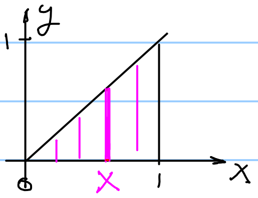
$$I = \int_0^1 \left(\int_y^1 \sin(x^2)\, dx\right) dy = \underbrace{\int_0^1 dy \int_y^1 dx\; \sin(x^2)}_{=①}$$

Pas de fonction élémentaire comme primitive de $\sin(x^2)$



① : $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1,\ y \leq x \leq 1\}$

$\Longleftrightarrow$



② : $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x\}$

$$I = \boxed{\int_0^1 dx}\,\boxed{\int_0^x dy}\ \sin(x^2) = \int_0^1 dx\ \left[\sin(x^2)\cdot y\right]_{y=0}^{y=x} =$$

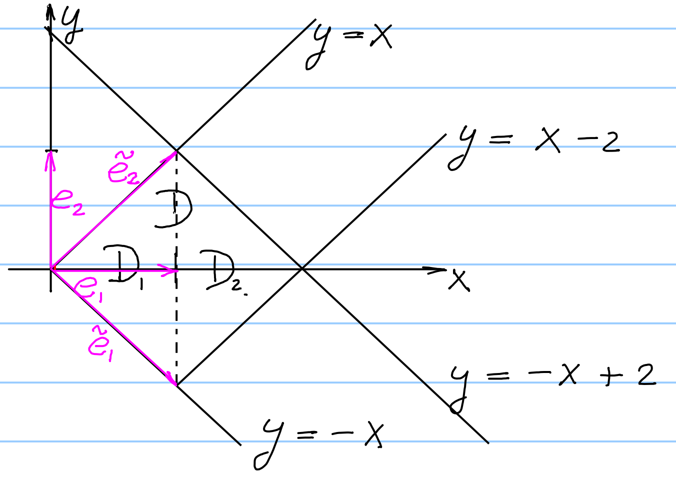
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 dx\ \sin(x^2)\cdot(2x) = \left[\frac{1}{2}\left(-\cos(x^2)\right)\right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{2}\cos(1) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1-\cos(1)).$$

Transcription du domaine sans le dessin

① $\Longleftrightarrow \begin{cases} \cancel{0 \leq y} \leq 1 \\ \cancel{y \leq x \leq} 1 \end{cases}$ $\qquad \begin{matrix} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x \end{matrix}$

10.2.6. Changement de variables / coordonnées : un exemple



$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

$$I = \int_D f\, d\sigma$$

$$I \underset{\substack{\text{décomposition} \\ \text{du domaine}}}{=} \int_{D_1} f\, d\sigma + \int_{D_2} f\, d\sigma$$

$$\underset{\text{Fubini}}{=} \int_0^1 dx \int_{-x}^{x} dy\ (x^2+y^2) + \int_1^2 dx \int_{x-2}^{-x+2} dy\ (x^2+y^2)$$

$$= 15' \text{ plus tard } = \frac{8}{3}.$$

Plus élégant, changement de coordonnées

$(e_1, e_2) \longrightarrow (\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$ une application linéaire

$\tilde{e}_1 = e_1 + (-1)\cdot e_2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det A = \boxed{2}$$

pour les coordonnées (x, y par rapport à e_1, e_2 et ξ, η par rapport à $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2$) on a.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \equiv G(\xi, \eta)$$

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right.$.
par exemple

Explicitement: $\boxed{\begin{matrix} x = \xi + \eta \\ y = -\xi + \eta . \end{matrix}}$

et on trouve pour l'intégrale:

$$I = \int_0^1 d\xi \int_0^1 d\eta \; \tilde{f}(\xi, \eta) \underbrace{|\det A|}_{= \boxed{2}}$$

Remarque: "$\Delta x \cdot \Delta y = 2\, \Delta\xi \cdot \Delta\eta = |\det A|\, \Delta\xi \cdot \Delta\eta$"

$$\tilde{f}(\xi, \eta) = f(x, y)\Big|_{(x,y) = G(\xi,\eta)} = (x^2 + y^2)\Big|_{(x,y) = G(\xi,\eta)}$$

$$= (\xi + \eta)^2 + (\xi - \eta)^2 = \boxed{2}\,(\xi^2 + \eta^2)$$

$$I = \underset{= \boxed{2} \cdot \boxed{2}}{4} \cdot \underbrace{\int_0^1 d\xi \int_0^1 d\eta \; (\xi^2 + \eta^2)}_{= \frac{2}{3}} = \frac{8}{3}$$

← notre premier exemple d'une intégrale double

10.2.7. Changement de variables : le cas général

Théorème soit
$$G : \tilde{D} \longrightarrow D$$
$$(\xi,\eta) \longmapsto (x,y) = G(\xi,\eta)$$

bijective de classe C^1 (c.-à-d. G, ainsi que $H=G^{-1}$ les deux de classe C^1). Soit

$$(x,y)^T = G(\xi,\eta) = \left(G_1(\xi,\eta),\ G_2(\xi,\eta)\right)^T$$

$$\det\left(J_G(\xi,\eta)\right) = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial \xi}(\xi,\eta) & \frac{\partial G_1}{\partial \eta}(\xi,\eta) \\ \frac{\partial G_2}{\partial \xi}(\xi,\eta) & \frac{\partial G_2}{\partial \eta}(\xi,\eta) \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\int_D f\, d\sigma = \int_{\tilde{D}} \tilde{f}\, |\det J_G|\, d\tilde{\sigma} \quad , \quad \text{où } \tilde{f} = f \circ G,$$

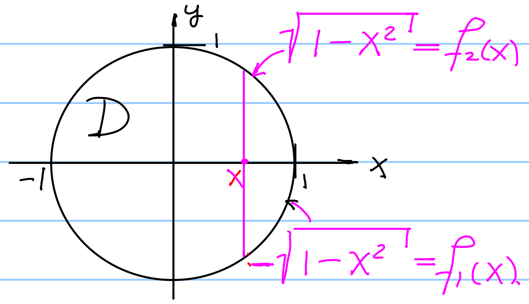
et en coordonnées (notation équivalente)

$$\int_D f(x,y)\, dx\, dy = \int_{\tilde{D}} \underbrace{\tilde{f}(\xi,\eta)}_{= f(G_1(\xi,\eta),\ G_2(\xi,\eta))} |\det J_G(\xi,\eta)|\, d\xi\, d\eta$$

Exemple 1

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$$

$$f(x,y) = (x^2+y^2)^{9999}$$

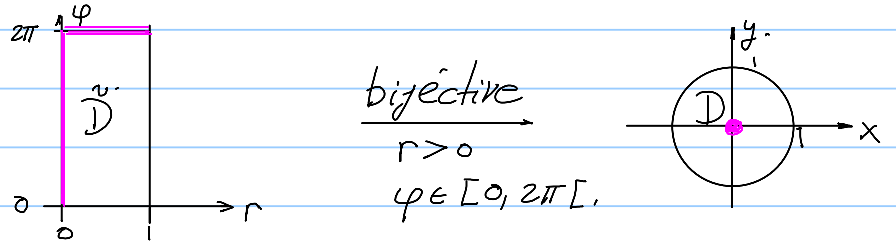


$$\int_D f\, d\sigma = \int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy\ \underbrace{(x^2+y^2)^{9999}}_{\boxed{\sum_{k=0}^{9999} \binom{9999}{k} (x^2)^k (y^2)^{9999-k}}} =$$

$$= \begin{matrix}\text{quelques} \\ \text{semaines} \\ \text{plus tard}\end{matrix} = \frac{\pi}{10'000}.$$

En coordonnées polaires (revoir les chapitres 5.2.5 et 5.3.2.2).

$$x = r\cdot\cos(\varphi) = G_1(r,\varphi)$$
$$y = r\cdot\sin(\varphi) = G_2(r,\varphi), \quad 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$



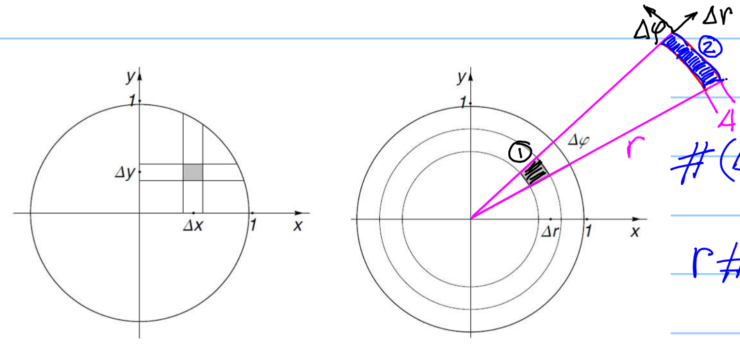
On utilisera $\tilde{D} = [0,1]\times[0,2\pi]$ (problèmes au bord seront ignorés)

$$\mathcal{J}_G(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\cdot\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

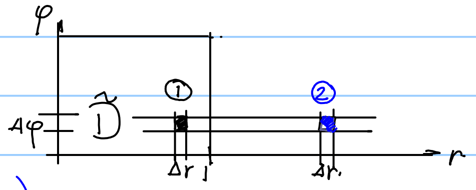
$$\boxed{\det\left(\mathcal{J}_G(r,\varphi)\right) = r.}$$

apprendre par coeur, changement de coordonnées en coordonnés polaires

Explication du facteur r.



$$\#(\Delta x\cdot\Delta y) \approx r\#(\Delta r\,\Delta\varphi)$$



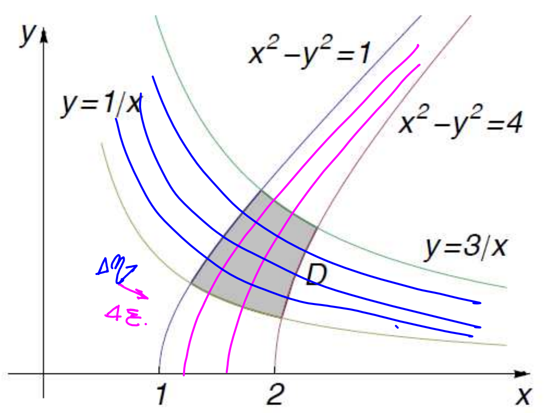
$$\tilde{f}(r,\varphi) = f(r\cdot\cos(\varphi), r\cdot\sin(\varphi)) = (r^2)^{9999} = r^{19998}$$

Donc: $\left|\det\left(\mathcal{J}_G(r,\varphi)\right)\right| = \det \mathcal{J}_G(r,\varphi).$

$$I = \int_{\tilde{D}} \tilde{f}(r,\varphi)\cdot r\, dr\,d\varphi \underset{\text{Fubini}}{=} \int_0^1 dr \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{=2\pi} \cdot r^{19998}\cdot r$$

$$= 2\pi\int_0^1 dr\, r^{19999} = 2\pi \left.\frac{r^{20'000}}{20'000}\right|_0^1 = \frac{\pi}{10'000}.$$

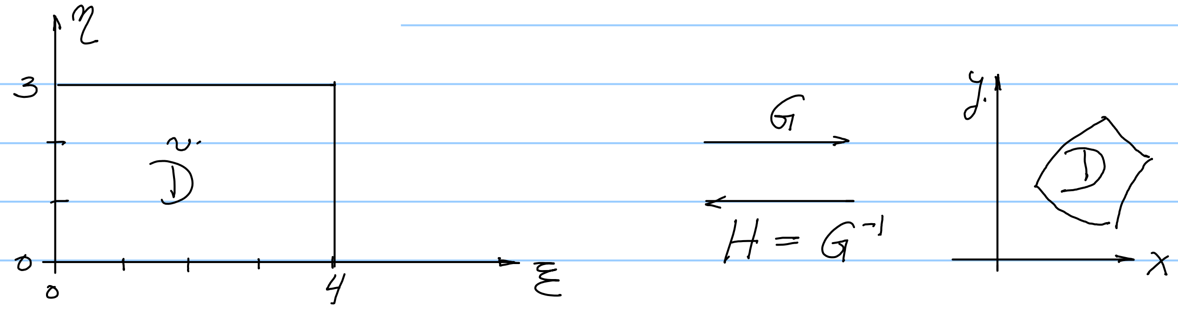
Exemple 2: domaine défini par des lignes de niveau



$$f(x,y) = (x^2+y^2)^3$$

$$I = \int_D f(x,y)\, dx\,dy$$

$$\xi = x^2 - y^2 \quad , \; 1 \leqslant \xi \leqslant 4$$
$$\eta = x \cdot y \quad , \; 1 \leqslant \eta \leqslant 3$$



$$\xi = x^2 - y^2 = H_1(x,y) \quad ①$$
$$\eta = x \cdot y = H_2(x,y) \quad ②$$

Procédure "standard" (calculer G, puis J_G)

$$② \Longrightarrow y = \frac{\eta}{x} \Longrightarrow$$

dans ① $\xi = x^2 - \dfrac{\eta^2}{x^2} \underset{x>0}{\Longleftrightarrow} (x^2)^2 - \xi(x^2) - \eta^2 = 0$

$$x^2 = \frac{1}{2}\xi \underset{-}{\oplus} \sqrt{\frac{1}{4}\xi^2 + \eta^2} > 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{1}{2}\xi + \sqrt{\frac{1}{4}\xi^2+\eta^2}} = G_1(\xi,\eta) \\ y &= \frac{\eta}{\sqrt{\frac{1}{2}\xi + \sqrt{\frac{1}{4}\xi^2+\eta^2}}} = G_2(\xi,\eta) \end{aligned} \qquad (*)}$$

Donc $G(\xi,\eta) = (G_1(\xi,\eta), G_2(\xi,\eta))^T$ et on peut effectuer le changement de variables/coordonnées. Mais on doit calculer J_G à partir de $(*)$.

Procédure plus économique (voir aussi 5.3.2.2)

On peut éviter de calculer J_G à partir de (*).
On a:

$$J_H(x,y)\Big|_{(x,y)=G(\xi,\eta)} = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ y & x \end{pmatrix}\Bigg|_{(x,y)=G(\xi,\eta)} = J_G(\xi,\eta)^{-1}$$

donc

$$(\det J_H(x,y))\Big|_{(x,y)=G(\xi,\eta)} = \frac{1}{\det J_G(\xi,\eta)}$$

et on obtient

$$\det J_G(\xi,\eta) = \frac{1}{\det J_H(x,y)}\Bigg|_{(x,y)=G(\xi,\eta)}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{(x^2+y^2)}\Bigg|_{(x,y)=G(\xi,\eta)}$$

On peut donc calculer det $J_G(\xi,\eta)$ sans calculer les dérivées partielles de (*). On obtient:

$$I = \int_{\tilde{D}} \tilde{f}(\xi,\eta)\,|\det J_G(\xi,\eta)|\,d\xi\,d\eta = \int_1^4 d\xi \int_1^3 d\eta \left((x^2+y^2)^3\Big|_{(x,y)=G(\xi,\eta)} \cdot \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2+y^2}\Bigg|_{(x,y)=G(\xi,\eta)} \right)$$

<u>Conclusion</u>: il suffit d'exprimer le produit $f(x,y)\,\frac{1}{\det J_H(x,y)}$ en termes de ξ et η. On n'a pas besoin des fonctions $\tilde{f}(\xi,\eta)$ et $\det(J_G(\xi,\eta))$ séparément.

Donc :

$$I = \int_1^4 d\xi \int_1^3 d\eta \left(\tfrac{1}{2}(x^2+y^2)^2\right)\Big|_{(x,y)=G(\xi,\eta)}$$

et puisque $(x^2+y^2)^2 = (x^2-y^2)^2 + 4x^2y^2 = \xi^2 + 4\eta^2$

utiliser (*) ici si le résultat n'est pas évident

on obtient que

$$I = \tfrac{1}{2}\int_1^4 d\xi \int_1^3 d\eta \,(\xi^2 + 4\eta^2)$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_1^4 d\xi \left[\xi^2\eta + \tfrac{4}{3}\eta^3\right]_{\eta=1}^{\eta=3}$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_1^4 d\xi \,(3\xi^2 + 36 - \xi^2 - \tfrac{4}{3}) = \dots = 73.$$

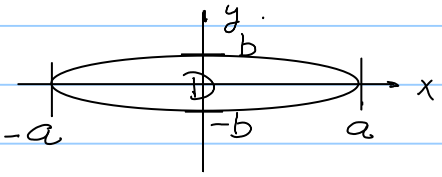
<u>Une autre manière d'évaluer cette intégrale est:</u>

$$I = \tfrac{1}{2}\int_1^4 d\xi \underbrace{\int_1^3 d\eta}_{=2} \xi^2 + 2\underbrace{\int_1^4 d\xi}_{=3} \int_1^3 d\eta \,\eta^2$$

$$= \int_1^4 \xi^2 d\xi + 6\int_1^3 \eta^2 d\eta$$

$$= \left[\tfrac{1}{3}\xi^3\right]_1^4 + \left[2\eta^3\right]_1^3 = 21 + 52 = 73.$$

Exemple 3 (aire d'une ellipse)



$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}, \text{ et}$$

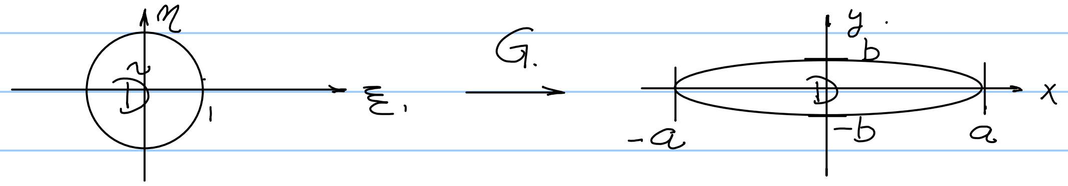
Choisir $f(x,y) = 1$ pour calculer l'aire:

$$|D| = \int_D 1 \, dx\, dy \quad , \quad |D| = \text{"aire de } D\text{"}$$

On pose $x = a\cdot\xi = G_1(\xi,\eta)$

$y = b\cdot\eta = G_2(\xi,\eta)$

de sorte que $\tilde{D} = \{(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2 : \xi^2+\eta^2 \leq 1\} =$ le disque unité.



On obtient :

$$J_G(\xi,\eta) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad \det J_G(\xi,\eta) = a\cdot b$$

et

$$I = \int_{\tilde{D}} \underbrace{1}_{\tilde{f}(\xi,\eta) = (f\circ G)(\xi,\eta)} \cdot \overbrace{(a\cdot b)}^{|\det J_G(\xi,\eta)|} \, d\xi \, d\eta = (a\cdot b) \underbrace{\int_{\tilde{D}} 1 \cdot d\xi \, d\eta}_{= |\tilde{D}| = \text{surface du disque unité } (*)}$$

$$= (a\cdot b)\cdot\pi$$

Alternativement on a pour (*) en coordonnées polaires:

$$\int_{\tilde{D}} 1 \, d\xi \, d\eta = \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \underset{\text{en coordonnées polaires}}{1 \cdot r} = 2\pi \int_0^1 r \, dr = \frac{2\pi}{2} = \pi.$$

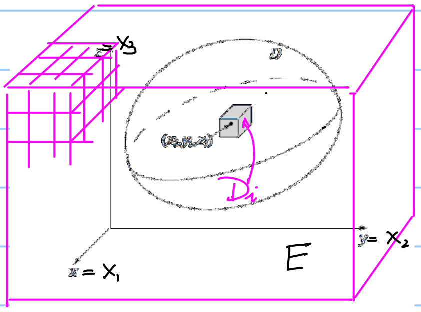
10.3. Intégrales multiples

10.3.1. Définitions et propriétés

Les idées des chapitres précédents se généralisent sans problèmes à des intégrales sur des domaines dans $\mathbb{R}^n$.

Algorithme pour les fonctions continue

Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble compact, Jordan mesurable, (c.-à-d. le bord $\partial D = \bar{D} \setminus \mathring{D}$ est Jordan-négligeable) et soit $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.



On découpe D (ou plutot E) en N "cubes" D_i, $D_i \subset D$, $i = 1 \dots n$, de volume $|D_i| = \Delta x_{i,1} \cdot \dots \cdot \Delta x_{i,n}$ et choisit des points $p_i \in D_i$. (découpage régulier, par exemple)

Théorème soit une fonction continue $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^3$ compact mesurable au sens de Jordan. Alors la limite

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{N} f(p_i)\,|D_i| =: I$$

existe (c.-à-d. $I \in \mathbb{R}$) et est indépendante du découpage (choix de $E \supset D$) et du choix des points $p_i \in D_i$. La limite s'appelle intégrale (triple si $n=3$) de f sur le domaine D (au sens de Riemann).

Notations

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \quad , \quad \int_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

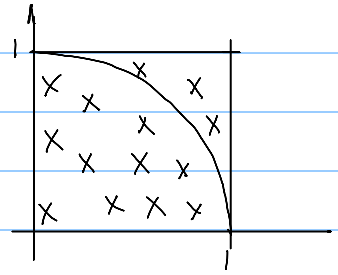
$$\int_D f\,dV \quad , \quad \int_D f$$

Remarques

1) Les intégrales (triples) satisfont les propriétés de la linéarité, décomposition du domaine et de monotonie (si $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in D$ alors $\int_D f\,dV \leq \int_D g\,dV$). Voir le cas $n=2$.

3) L'intégrale (triple) $\int_D 1\,dV$ donne le volume de D.

Remarque (méthode de Monte Carlo).



$$\pi \sim 4 \cdot \frac{11}{14} = \frac{44}{14} = \frac{22}{7} = 3.14\ldots$$

(avantageux pour $n>3$)

10.3.2. Techniques d'intégration

Comme pour $n=2$ on a le théorème de Fubini qui dit que les intégrales multiples peuvent être évaluées par des intégrales itérées.

Exemple: $D = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$

$$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$$

$$I = \int_D f\, dV = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz\ (x^2+y^2+z^2)$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^1 dy \left[x^2 z + y^2 z + \frac{1}{3} z^3 \right]_{z=0}^{z=1}$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^1 dy \left(x^2 + y^2 + \frac{1}{3} \right)$$

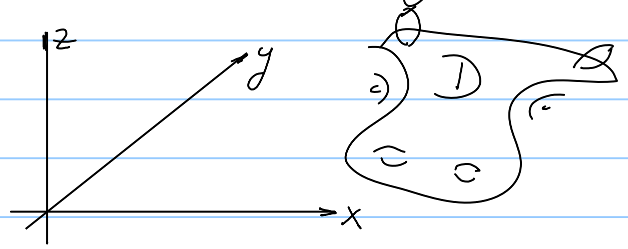
$$= \int_0^1 dx \left[x^2 y + \frac{1}{3} y^3 + \frac{1}{3} y \right]_{y=0}^{y=1}$$

$$= \int_0^1 dx \left(x^2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) = \left[\frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{3} x \right]_0^1 = 1.$$

<u>Remarque:</u> $I =$ "regarder !" $= 3 \cdot 1 \cdot 1 \int_0^1 x^2 dx = 1.$

<u>Remarque:</u> $0 \leq f(x,y,z) \leq 3 \Rightarrow 0 \leq I \leq 3.$

10.3.3. Centre de gravité (barycentre, centre de masse)



$D \subset \mathbb{R}^3$, compact

$\rho(x,y,z)$ distribution de masse sur D

$\rho : D \to \mathbb{R}$, continue.

$$I = \int_D \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \qquad \text{masse totale}$$

$$I_1 = \int_D x \cdot \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

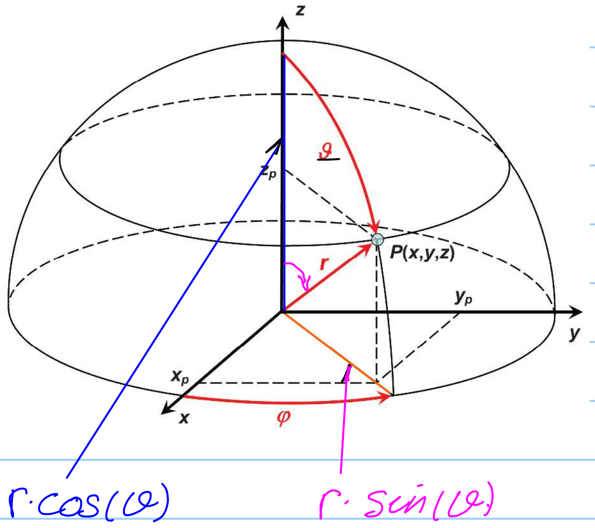
$$I_2 = \int_D y \cdot \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

$$I_3 = \int_D z \cdot \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

Le centre de gravité se trouve au point $\left(\frac{I_1}{I}, \frac{I_2}{I}, \frac{I_3}{I} \right)$.

<u>Remarque:</u> si la distribution de masse est constante (ρ est une fonction constante) on peut calculer avec $\rho = 1$

10.3.4. Coordonnées sphériques (voir 5.4.7. et série 9)



$0 \leq \vartheta \leq \pi$

$0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$0 \leq r < \infty$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= r\cdot\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ y &= r\cdot\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ z &= r\cdot\cos(\vartheta) \end{aligned}}$$

r, ϑ, φ les coordonnées sphériques

$G : [0,\infty[\times [0,\pi] \times [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ surjective

$$\underbrace{]0,\infty[\times]0,\pi[\times]0,2\pi[}_{=:\tilde{D},\ \text{ouvert} \subset \mathbb{R}^3} \xrightarrow[\text{bijective}]{} \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,0,z)\in\mathbb{R}^3 : x \geq 0\}$$

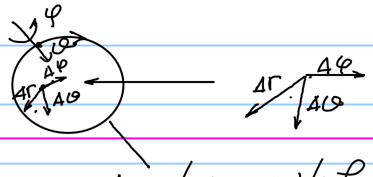
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = G(r,\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cdot\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ r\cdot\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ r\cdot\cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{J_G(r,\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} \sin(\vartheta)\cos(\varphi) & r\cos(\vartheta)\cos(\varphi) & -r\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ \sin(\vartheta)\sin(\varphi) & r\cos(\vartheta)\sin(\varphi) & r\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \cos(\vartheta) & -r\sin(\vartheta) & 0 \end{pmatrix}}$$

$\det J_G(r,\vartheta,\varphi) =$ "développer la dernière ligne"

$$= r\cdot\sin(\vartheta)\sin(\vartheta)^2\cdot r + \cos(\vartheta)\, r^2 \sin(\vartheta)\cos(\vartheta)$$

$$= \boxed{r^2\cdot\sin(\vartheta)} \geq 0 \xleftarrow{\geq 0}$$



orienté positif

voir 5.4.5, "=0", G non bijective pour $r=0, \vartheta=0,\pi$

Exemple 1 (volume de la sphère unité)

$$D = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1 \}$$

$$f(x,y,z) = 1$$

$$|D| = \int_D 1 \, dx\,dy\,dz = \int_{\tilde{D}} \overset{\tilde{f}(r,\vartheta,\varphi)}{1} \underbrace{r^2 \cdot \sin(\vartheta)}_{= \det J_G(r,\vartheta,\varphi)} dr\,d\vartheta\,d\varphi \qquad (*)$$

$$\tilde{D} = [0,1] \times [0,\pi] \times [0,2\pi]$$

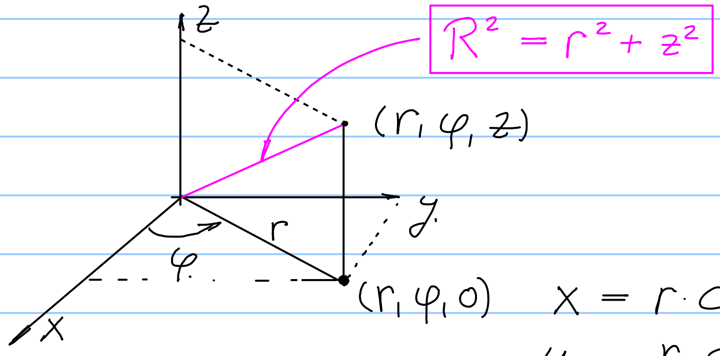
<u>Remarque</u>: on négligera "les problèmes" aux bords. $G : \tilde{D} \longrightarrow D$ n'est pas bijective et on devrait plutôt, pour $\varepsilon > 0$, ε petit, faire le changement de coordonnées entre $\tilde{D}(\varepsilon) = [\varepsilon, 1] \times [\varepsilon, \pi-\varepsilon] \times [0, 2\pi-\varepsilon] \subset \tilde{D}$ et $D(\varepsilon) = G(\tilde{D}(\varepsilon)) \subset D$ puis laisser tendre ε vers zéro, ce qui redonne $(*)$

En termes d'intégrales itérées on obtient:

$$|D| = \int_0^1 dr \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \; r^2 \cdot \sin(\vartheta)$$

$$= 2\pi \int_0^1 dr \; r^2 \underbrace{\left[-\cos(\vartheta) \right]_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi}}_{=2} = 4\pi \left[\frac{r^3}{3} \right]_{r=0}^{r=1} = \frac{4\pi}{3}.$$

10.3.5. Coordonnées cylindriques



$r \geq 0$

$0 \leq \varphi \leq 2\pi$

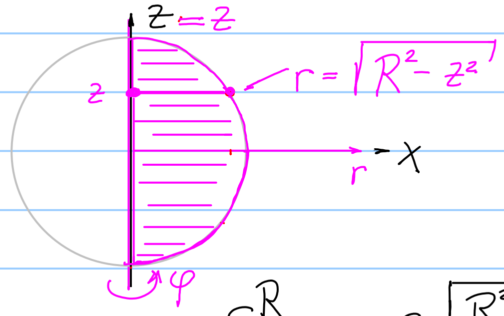
$z \in \mathbb{R}$.

$$\left. \begin{array}{l} x = r \cdot \cos(\varphi) \\ y = r \cdot \sin(\varphi) \\ z = z \end{array} \right\} =: G(r,\varphi,z)$$

$$J_G(r,\varphi,z) = \left(\begin{array}{cc|c} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\boxed{\det J_G(r,\varphi,z) = r \quad \geq 0} \longleftarrow (r,\varphi,z) \text{ orienté positif}$$

Exemple (volume de la sphère de rayon R)



$$V = \int_{-R}^{R} dz \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} dr \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \overset{\tilde f(r,\varphi,z)}{1} \cdot \underset{|\det J_G(r,\varphi,z)|}{r}$$

$$= 2\pi \cdot \int_{-R}^{R} dz \left[\tfrac{1}{2} r^2\right]_{r=0}^{r=\sqrt{R^2-z^2}}$$

$$= \pi \int_{-R}^{R} dz \, (R^2 - z^2) \underset{\text{fonction paire sur domaine symétrique.}}{=} 2\pi \int_0^R dz \, (R^2 - z^2)$$

$$= 2\pi \left[R^2 z - \tfrac{1}{3} z^3\right]_{z=0}^{z=R}$$

$$= 2\pi \left(R^3 - \tfrac{1}{3} R^3\right) = \frac{4\pi}{3} R^3.$$

10.3.6. Application du théorème de Fubini

Exemple

$$I = \underbrace{\int_0^1 dz}_{} \, \underbrace{\int_z^1 dy}_{} \, \underbrace{\int_y^1 dx \; e^{x^3}}_{}$$

notation alternative

$$\left(\equiv \int_0^1 \left(\int_z^1 \left(\int_y^1 e^{x^3} dx \right) dy \right) dz \right)$$

Identification du domaine

$$I = \int_D e^{x^3} dx\,dy\,dz \qquad \left(\overset{\text{notation alternative}}{\equiv \iiint_D e^{x^3} dx\,dy\,dz} \right)$$

où $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \underline{0 \leqslant z \leqslant 1}, \underline{z \leqslant y \leqslant 1}, \underline{y \leqslant x \leqslant 1}\}.$ ①

Transcription du domaine

(1')
$$0 \leqslant z \leqslant 1$$
$$z \leqslant y \leqslant 1$$
$$y \leqslant x \leqslant 1$$

②
$$0 \leqslant x \leqslant 1$$
$$0 \leqslant y \leqslant x$$
$$0 \leqslant z \leqslant y.$$

③
$$0 \leqslant x \leqslant 1$$
$$0 \leqslant z \leqslant x$$
$$z \leqslant y \leqslant x$$

④
$$0 \leqslant y \leqslant 1$$
$$y \leqslant x \leqslant 1$$
$$0 \leqslant z \leqslant y.$$

⑤
$$0 \leqslant y \leqslant 1$$
$$0 \leqslant z \leqslant y$$
$$y \leqslant x \leqslant 1$$

⑥
$$0 \leqslant z \leqslant 1$$
$$z \leqslant x \leqslant 1$$
$$z \leqslant y. \leqslant x.$$

② : $D \equiv \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant x, 0 \leqslant z \leqslant y\}$

③ : $D \equiv \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant x, z \leqslant y \leqslant x\}$

Transcription de l'intégrale (cas ② et ③).

$$I = \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y dz\; e^{x^3} \qquad ②$$

$$I = \int_0^1 dx \int_0^x dz \int_z^x dy\; e^{x^3} \qquad ③$$

Evaluation des intégrales

② $I = \int_0^1 dx \int_0^x dy\; e^{x^3} \cdot y = \int_0^1 dx\; e^{x^3} \left[\frac{1}{2} y^2\right]_{y=0}^{y=x}$

$$= \int_0^1 dx\, e^{x^3} \tfrac{1}{2} x^2 = \frac{1}{6} \int_0^1 e^{x^3} (3x^2)\, dx = \frac{1}{6}(e-1).$$

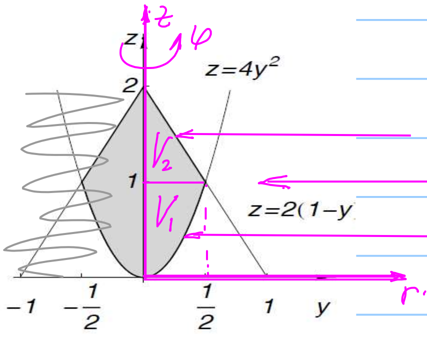
③ $$I = \int_0^1 dx \int_0^x dz\; e^{x^3} (x-z)$$

$$= \int_0^1 dx\; e^{x^3} \left[xz - \tfrac{1}{2} z^2 \right]_{z=0}^{z=x} = \int_0^1 dx\, e^{x^3} (x^2 - \tfrac{1}{2} x^2)$$

$$= \int_0^1 dx\, e^{x^3} \tfrac{1}{2} x^2 = \text{voir ②} = \frac{1}{6}(e-1).$$

10.4. Exemples divers

1) Volume d'un corps de révolution (exemple)



$z = 2(1-r)$, $r \geqslant 0$ $\Longleftrightarrow$ $r = 1 - \frac{z}{2}$, $r \geqslant 0$

$z = 4r^2$, $r \geqslant 0$ $\Longleftrightarrow$ $r = \sqrt{\frac{z}{4}}$, $r \geqslant 0$

$$\begin{cases} 2\cdot(1-r) = 4r^2 \\ r \geqslant 0 \end{cases} \Longrightarrow r = \frac{1}{2}$$

i) Calcul du volume par décomposition du domaine

$$V_1 = \int_0^1 dz \cdot \int_0^{\sqrt{\frac{z}{4}}} dr \int_0^{2\pi} d\varphi\;\; 1\cdot r$$

$$= 2\pi \int_0^1 dz \left[\tfrac{1}{2} r^2 \right]_0^{\sqrt{\frac{z}{4}}} = 2\pi \int_0^1 dz\; \frac{1}{2}\; \frac{z}{4}$$

$$= \frac{\pi}{4} \left[\tfrac{1}{2} z^2 \right]_0^1 = \frac{\pi}{8}$$

$$V_2 = \int_1^2 dz \int_0^{1-\frac{z}{2}} dr \int_0^{2\pi} d\varphi\;\; 1\cdot r$$

$$= 2\pi \int_1^2 dz \left[\tfrac{1}{2} r^2 \right]_0^{1-\frac{z}{2}} = 2\pi \int_1^2 dz\, \frac{1}{2} (1-\tfrac{z}{2})^2$$

$$= \pi \left[(1-\tfrac{z}{2})^3 (-\tfrac{2}{3}) \right]_1^2 = \frac{2\pi}{3} (\tfrac{1}{2})^3 = \frac{\pi}{12}$$

$$V = V_1 + V_2 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{12} = \frac{5\pi}{24}$$

ii) Calcul direct

$$V = \int_0^{\frac{1}{2}} dr \int_{4r^2}^{2(1-r)} dz \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot 1 \cdot r$$

$$= 2\pi \cdot \int_0^{\frac{1}{2}} dr \cdot r \cdot \left[z \right]_{4r^2}^{2-2r}$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}} dr \left(2r - 2r^2 - 4r^3 \right)$$

$$= 2\pi \left[r^2 - \frac{2}{3} r^3 - r^4 \right]_0^{\frac{1}{2}} = \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} \right) = \frac{5\pi}{24}$$

iii) Transcription du domaine i) → ii) sans le dessin

V_1 :

$0 \leqslant z \leqslant 1$

$0 \leqslant \underbrace{r \leqslant \sqrt{\frac{z}{4}}}_{\Leftrightarrow\ z \geqslant 4r^2}$

$0 \leqslant r \leqslant \frac{1}{2}$

$4r^2 \leqslant z \leqslant 1$

V_2:

$① \leqslant z \leqslant 2$

$0 \leqslant \underbrace{r \leqslant 1 - \frac{z}{2}}_{\Leftrightarrow\ z \leqslant 2(1-r)}$

$0 \leqslant r \leqslant \frac{1}{2}$

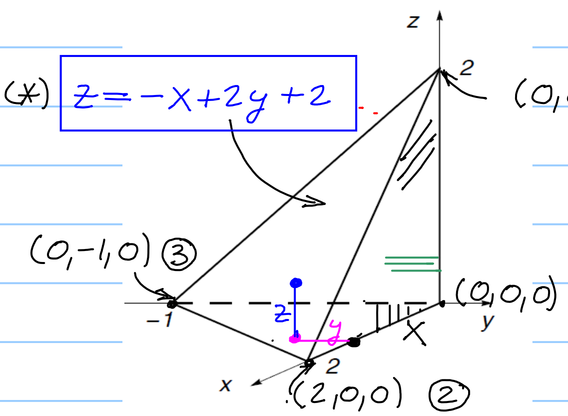
$1 \leqslant z \leqslant 2(1-r)$

$$V_1 + V_2 = \int_0^{\frac{1}{2}} dr \int_{4r^2}^{1} dz \ \underline{\qquad} + \int_0^{\frac{1}{2}} dr \int_1^{2(1-r)} dz \ \underline{\qquad}$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} dr \left(\int_{4r^2}^{1} dz \ \underline{\qquad} + \int_1^{2(1-r)} dz \ \underline{\qquad} \right)$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} dr \int_{4r^2}^{2(1-r)} dz \ \underline{\qquad} = V \quad \text{(méthode ii))}$$

2) Calcul d'un centre de gravité (voir 10.3.3)

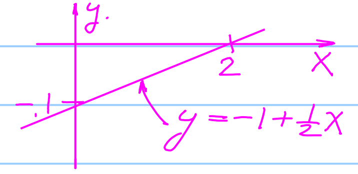


||||| $z=0$,

/// $y=0$

═ $x=0$

Dans le plan $z=0$:



(*):

$$z = ax+by+c =: f(x,y)$$

$$① \Rightarrow 2 = 0 + 0 + c \Rightarrow c=2$$

$$② \Rightarrow 0 = a\cdot 2 + 0 + 2 \Rightarrow a=-1$$

$$③ \Rightarrow 0 = -b+2 \Rightarrow b=2$$

$$I = \int_0^2 dx \int_{-1+\frac{1}{2}x}^{0} dy \int_0^{-x+2y+2} dz \; 1$$ (voir les dessins)

Même intégrale à partir des inégalités

$$0 \leq x$$

$$y \leq 0$$

$$0 \leq \underbrace{z \leq -x+2y+2}$$

$$\Leftrightarrow x \leq 2y+2-z$$

$$\Leftrightarrow y \geq -1+\tfrac{1}{2}z+\tfrac{1}{2}x$$

$$\Longrightarrow \quad 0 \leqslant x \leqslant 2, \quad -1+\tfrac{1}{2}x \leqslant y \leqslant 0, \quad 0 \leqslant z \leqslant -x+2y+2$$

Evaluation de l'intégrale

$$I = \int_0^2 dx \int_{-1+\frac{1}{2}x}^{0} dy \, (-x+2y+2) \;/\!/\; f(x,y)$$

$$= \int_0^2 dx \left[-xy+y^2+2y\right]_{y=-1+\frac{1}{2}x}^{y=0}$$

$$= -\int_0^2 dx \left(x(1-\tfrac{1}{2}x)+(1-\tfrac{1}{2}x)^2-2+x\right)$$

$$= -\left[\tfrac{1}{2}x^2-\tfrac{1}{6}x^3-\tfrac{2}{3}(1-\tfrac{1}{2}x)^3-2x+\tfrac{1}{2}x^2\right]_0^2 = \ldots = \frac{2}{3}$$

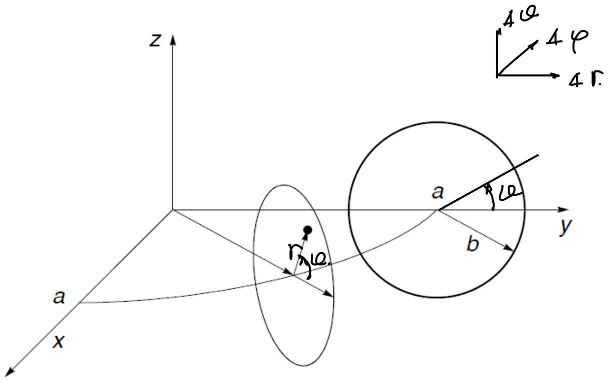
$$I_1 = \int_0^2 dx \int_{-1+\frac{1}{2}x}^{0} dy \int_0^{-x+2y+2} dz \cdot x = \ldots = \frac{1}{3}$$

$$I_2 = \ldots = -\frac{1}{6}$$

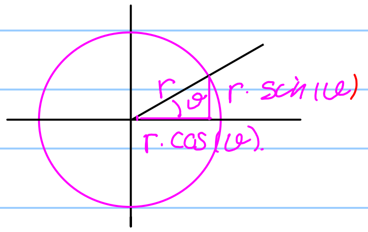
$$I_3 = \ldots = \frac{1}{3}$$

<u>Centre de gravité:</u> $\left(\frac{I_1}{I}, \frac{I_2}{I}, \frac{I_3}{I}\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$

3) Volume d'un tore



$(1\varphi, 1\theta, 1r)$ orienté positif (le déterminant du changement de coordonnées sera positif).



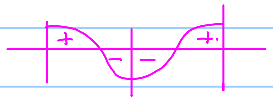
$$\begin{aligned} x &= (a+r\cdot\cos(\theta))\cos(\varphi) &&= G_1(\varphi,\theta,r)\\ y &= (a+r\cdot\cos(\theta))\sin(\varphi) &&= G_2(\varphi,\theta,r)\\ z &= r\cdot\sin(\theta) &&= G_3(\varphi\ \theta\ r)\end{aligned}$$

$$J_G(\varphi,\theta,r) = \begin{pmatrix} (a+r\cos(\theta))(-\sin(\varphi)) & -r\cdot\sin(\theta)\cos(\varphi) & \cos(\theta)\cos(\varphi)\\ (a+r\cdot\cos(\theta))\cos(\varphi) & -r\sin(\theta)\sin(\varphi) & \cos(\theta)\sin(\varphi)\\ 0 & \boxed{r\cdot\cos(\theta)} & \boxed{\sin(\theta)} \end{pmatrix}$$

$$\det J_G(\varphi,\theta,r) = -r\cdot\cos(\theta)(a+r\cos(\theta))(-\cos(\theta)\sin(\varphi)^2-\cos(\theta)\cos(\varphi)^2)$$
$$+\sin(\theta)(a+r\cos(\theta))r\cdot(\sin(\theta)\sin(\varphi)^2+\sin(\theta)\cos(\varphi)^2)$$
$$= r\cdot(a+r\cos(\theta))\cos(\theta)^2 + r(a+r\cdot\cos(\theta))\sin(\theta)^2$$
$$= r(a+r\cos(\theta))(\cos(\theta)^2+\sin(\theta)^2) = r\cdot(a+r\cos(\theta)) \geqslant 0.$$

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^b dr\cdot 1\cdot r\cdot(a+r\cos(\theta))$$
$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^b dr\cdot a\cdot r + \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0 dr\cdot r^2\cos(\theta)}_{=0}$$

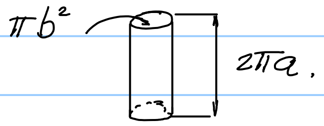
échanger



$$= 2\pi\cdot 2\pi\cdot a\cdot\frac{b^2}{2}$$

$$= (\pi b^2)(2\pi a)$$

tore avec une section qui est un cercle



Le même volume que le cylindre "utilisé pour produire" le tore

11. Equations différentielles (suite du chapitre 1.10).

Référence pour ce chapitre

Ernst Hairer "Analyse II, Partie B" (1998/1999)

Soient $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue et $(x_0, y_0) \in D$, et considérons le problème de Cauchy

$$y' = f(x, y) \quad , \quad y(x_0) = y_0.$$

ou d'une manière équivalente l'équation intégrale

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt.$$

Proposition: soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$ tels que $A \subset D$, où

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq a, \|y - y_0\| \leq b \},$$

$$M = \max\{ \|f(x,y)\| : (x,y) \in A \}, \quad \alpha = \min\{ a, \frac{b}{M} \} \quad \text{et}$$

$$\Omega = \{ y \in C(I_\alpha, \mathbb{R}^n) : \|y - y_0\|_\infty \leq b \}$$

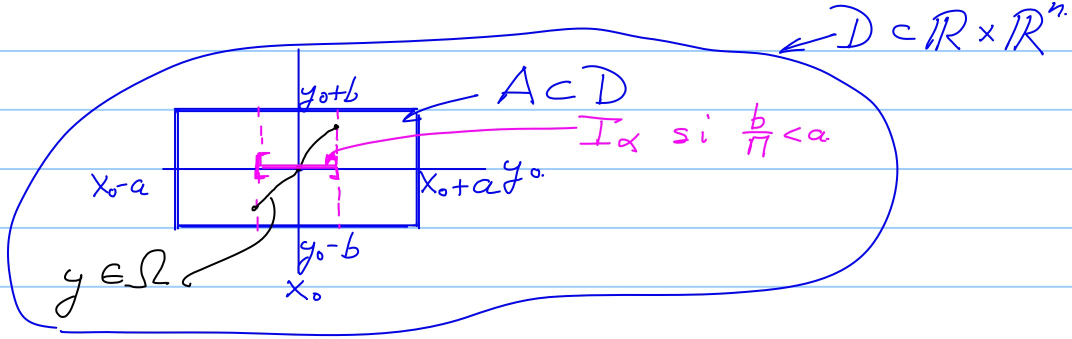
où $I_\alpha = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$. Alors, la suite $(y_k)_{k \geq 0}$, $y_k \in \Omega$, définie par

$$y_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_k(t))\, dt.$$

est bien définie

Démonstration ("bien définie" $\Longleftrightarrow$ $\forall k \geq 0$, $y_k \in \Omega$)

Remarque : lire le théorème



$$\Omega = \{ y \in C(I_\alpha, \mathbb{R}^n) : \forall x \in I_\alpha , (x, y(x)) \in A \}$$

i) $y_0(x) \equiv y_0 \in \Omega$

ii) $\forall k \geq 0$, si $y_k \in \Omega$ alors la fonction

$$y_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\underbrace{t, y_k(t)}_{\in A}) \, dt$$, car $t \in I_\alpha$ et $y_k \in \Omega$

est bien définie et continue sur I_α.
De plus, $\forall x \in I_\alpha$,

$$(*) \left\{ \begin{aligned} & \| y(x) - y_0 \| = \left\| \int_{x_0}^{x} f(t, y(t)) \, dt \right\| \leq \\ & \leq \left| \int_{x_0}^{x} \| f(t, y(t)) \| dt \right| \leq M |x - x_0| \leq M \cdot \alpha \leq b \end{aligned} \right.$$

et donc $y_{k+1} \subset \Omega$.

Proposition: si f satisfait une condition de Lipschitz, c-à-d. s'il existe $L \in \mathbb{R}$ tel que $\forall (x,y), (x,z) \in A$,

$$\| f(x,y) - f(x,z) \| \leq L \; \| y - z \|$$

alors la suite $(y_k)_{k \geq 0}$ est de Cauchy par rapport à la norme $\| \; \|_\infty$ (voir la série 8B).

Remarque: si la fonction $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue sur D alors f satisfait une condition de Lipschitz (voir le théorème des fonctions implicites pour la définition de cette fonction voir aussi la série II B).

Démonstration

a) $\forall x \in I_\alpha$, $\quad \|y_{k+1}(x) - y_k(x)\| \leq M L^k \dfrac{|x-x_0|^{k+1}}{(k+1)!}$

car : i) $\|y_1(x) - y_0\| \leq M |x - x_0|$ (voir $(*)$)

ii) $\forall k \geq 0$

$$\|y_{k+1}(x) - y_k(x)\| \leq \left| \int_{x_0}^{x} \|f(t, y_k(t)) - f(t, y_{k-1}(t))\| \, dt \right|$$

$$\leq L \left| \int_{x_0}^{x} \|y_k(t) - y_{k-1}(t)\| \, dt \right|$$

$$\leq M L^k \left| \int_{x_0}^{x} \frac{1}{k!} |t - x_0|^k \, dt \right| = M L^k \frac{|x-x_0|^{k+1}}{(k+1)!}$$

b). $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in I_\alpha$.

$$\|y_{k+m}(x) - y_k(x)\| \leq \sum_{\ell=0}^{m-1} \|y_{k+\ell+1}(x) - y_{k+\ell}(x)\|$$

$$\leq \sum_{\ell=0}^{m-1} M L^{k+\ell} \frac{|x-x_0|^{k+\ell+1}}{(k+\ell+1)!} \leq M L^k \alpha$$

$$\leq \frac{M}{L} \sum_{\ell=k+1}^{\infty} \frac{(L\alpha)^\ell}{\ell!} \quad \xrightarrow[k \to \infty]{\swarrow \text{ car } \lim\limits_{N\to\infty} \sum_{\ell=0}^{N} \frac{(L\alpha)^\ell}{\ell!} = e^{L\alpha}} 0$$

c) de b) il suit que $\forall \varepsilon > 0, \exists k_0$, t.q. $\forall k, \ell \geq k_0$.

$$\|y_k - y_\ell\|_\infty = \sup_{x \in I_\alpha} \|y_k(x) - y_\ell(x)\| \leq \varepsilon,$$

et $(y_k)_{k\geq 0}$ est donc de Cauchy dans $(\Omega, \|\ \|)$

Théorème La fonction $y(x) = \lim_{k\to\infty} y_k(x)$ est solution du problème de Cauchy

Démonstration (voir Analyse I, et §9.5.1)

Comme $(y_k(x))_{k\geq 0}$ converge uniformément et $f(x,y)$ est uniformement continue sur A, la suite $(f(x, y_k(x)))_{k\geq 0}$ converge uniformément vers $f(x,y(x))$. On peut donc échanger la limite et l'intégrale et on voit que $y(x)$ est solution de l'équation intégrale. ┘

Remarque: l'unicité de $y(x)$ suit aussi des estimations déjà établies

Exemple ($n=2$)

$$\left.\begin{aligned} &u''(t) + u(t) = 0 \qquad (*) \\ &u(0) = 1, \quad u'(0) = 0 \end{aligned}\right\} \text{ solution: } u(t) = \cos(t).$$

Avec le théorème

$$y := \begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix}, \quad y' = \begin{pmatrix} u' \\ u'' \end{pmatrix} \underset{(*)}{=} \begin{pmatrix} u' \\ -u \end{pmatrix} = Ay.$$

$$\text{avec } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $f(x,y) \equiv Ay$. (f est Lipschitz, car linéaire, avec $L = \|A\|$, voir la série 8B).

$$y_0 = \begin{pmatrix} u(0) \\ u'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$y_0(x) \equiv y_0$$

$$y_1(x) = y_0 + \int_0^x f(\xi, y_0(\xi))\, d\xi.$$

$$= y_0 + \int_0^x A y_0 \, d\xi = y_0 + (A\cdot x) y_0$$

$$y_2(x) = y_0 + \int^x f(\xi, y_1(\xi))\, d\xi = y_0 + \int_0^x A\, y_1(\xi)\, d\xi$$

$$= y_0 + \int_0^x A\,(y_0 + (A\cdot\xi) y_0)\, d\xi$$

$$= y_0 + (Ax) y_0 + \tfrac{1}{2}(Ax)^2 y_0$$

$$\vdots$$

$$y_k(x) = \sum_{\ell=0}^{k} \frac{1}{\ell!}(Ax)^\ell y_0 \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{Ax} y_0 = ?$$

Définition: Soit B une matrice $n\times n$. Alors

$$e^B := \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} B^k \,, \quad \text{où } B^0 = I \text{ (matrice identitée)}$$

Remarque (voir la série 8B).

Soit $\|\ \|$ une norme pour $\mathbb{R}^n$ et

$$\|B\| := \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, x\neq 0} \frac{\|Bx\|}{\|x\|}$$

la norme induite sur $\mathbb{R}^{n\cdot n}$. Alors, $\forall x\in\mathbb{R}^n$

$$\|Bx\| \le \|B\|\,\|x\| \,, \quad \|B^2x\| \le \|B(Bx)\| \le \|B\|\,\|Bx\| \le \|B\|^2\|x\|$$

et donc $\|B^k x\| \le \|B\|^k \|x\|$

$$\Rightarrow \|B^k\| = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ x\neq 0}} \frac{\|B^k x\|}{\|x\|} \le \|B\|^k$$

Ceci implique que la suite $B_N = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} B^k$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}^{n\cdot n}$ et e^B est bien définie.

Remarques: (B, B_1, B_2 des matrices $n \times n$).

1) La série e^B converge absolument (en norme)

2) $e^{B_1} \cdot e^{B_2} = e^{B_1+B_2} \Leftrightarrow B_1 B_2 = B_2 B_1$

$$(B_1+B_2)^2 = B_1^2 + B_1 B_2 + \underline{\underline{B_2 B_1}} + B_2^2$$

3) $(e^B)^{-1} = e^{-B}$.

4) $\det(e^B) = e^{tr.(B)}$.

5) Si $B = SDS^{-1}$, $D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$

$\left(| \, | \, | \, | \right)$ les vecteurs propres de B

$$D^2 = \begin{pmatrix} d_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n^2 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad e^B = S e^D S^{-1}$$

avec $e^D = \begin{pmatrix} e^{d_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{d_n} \end{pmatrix}$

car $B^2 = (SDS^{-1})(SDS^{-1}) = SD^2S^{-1}$ et donc

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} B^k = S \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} D^k \right) S^{-1}$$

6) Soit $p(\lambda) = \det(\lambda I - B)$. Alors (voir Algèbre linéaire) $p(B) = 0 \Longrightarrow$

$$e^B = \sum_{k=0}^{n-1} b_k B^k.$$

pour certains nombres $b_0, \dots, b_{n-1}$

7) Si $Bv = \lambda v$, alors $e^B v = e^\lambda v$. $(v \neq 0)$

Dans notre cas:

$$y' = A y \quad , \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \text{avec}$$

$$\underset{\substack{\nearrow \\ p(\lambda) = \lambda^2 + 1}}{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad A^2 + I = 0 \iff \underset{\substack{\nwarrow \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}}{A^2} = -I .$$

Avec $B \equiv Ax$: , $B^k = A^k x^k$.

$$e^B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{(2\ell)!} \underset{\substack{\| \\ x^{2\ell}(A^2)^\ell}}{B^{2\ell}} + \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{(2\ell+1)!} \underset{\substack{\| \\ x^{2\ell+1} A (A^2)^\ell .}}{B^{2\ell+1}}$$

$$= I \cdot \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{(2\ \ )!} x^{2\ell} + A \cdot \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{(2\ell+1)!} x^{2\ell+1}$$

$$= I \cdot \cos(x) + A \cdot \sin(x) = \begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}$$

La solution de notre problème est donc:

$$y(x) = e^{Ax} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(x) \\ -\sin(x) \end{pmatrix} ,$$

ou, dans les variables de départ, $u(t) = \cos(t)$