Notes de cours
Semaine 19

Cours Turing

Table des matières

1 Introduction

Un graphe est une **structure de données** qui permet de modéliser efficacement certaines données.
Les graphes sont très utilisés en informatique et ont de nombreuses applications concrètes, notamment :

1. Les réseaux sociaux
2. Les réseaux informatiques
3. Les routes de transport et de livraison
4. Les moteurs de recherche

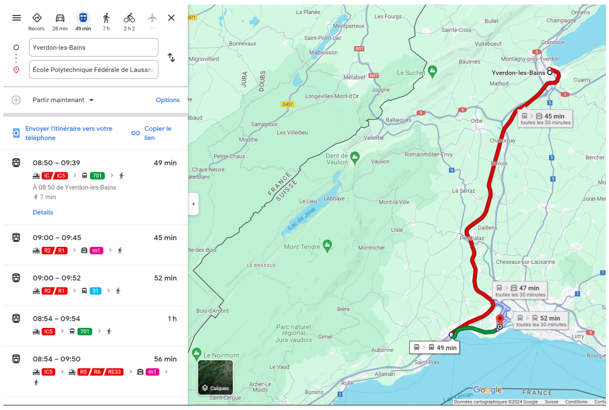

Figure 1: Google maps utilise des graphes pour trouver le meilleur itinéraire

2 Définitions

2.1 Graphe

Un graphe est composé de **sommets** et d'**arêtes**.
Formellement, un graphe est un couple $G = (V, E)$ où V est un ensemble de sommets et E est un ensemble d'arêtes. Une arête est un couple de sommets.

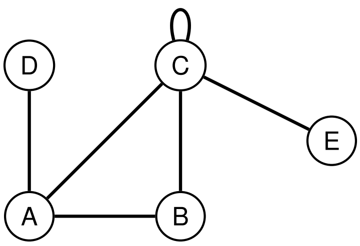

Figure 2: Un graphe avec 5 sommets et 7 arrêtes

Nous pouvons voir dans la figure 2 un exemple de graphe, dans ce graphe :

- $V = \{A, B, C, D, E\}$
- $E = \{(A, B), (A, C), (A, D), (B, C), (C, C), (C, E)\}$

2.2 Boucle

Un élément est une arrête qui connecte un sommet à lui-même. Dans la Figure 2, le sommet C possède une boucle.

2.3 Degré d'un sommet

Le degré d'un sommet est le nombre **d'extrémités d'arêtes** qui y sont connectées.
Dans la figure 2 :

- A a un degré de 3
- B a un degré de 2
- C a un degré de 5
- D a un degré de 1
- E a un degré de 1

! Dans le graphe de la Figure 2, C à un degré de 5 même s'il est seulement connecté à 4 arrêtes différentes.

2.4 Graphe Simple

Un graphe simple est un graphe qui ne contient pas de boucle et dont chaque paire de sommets est reliée au plus par une arrête.

Le graphe de la figure 2 n'est pas un graphe simple mais celui de la figure 3, oui.

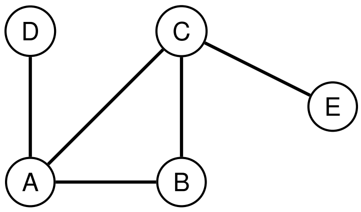

Figure 3: Un graphe simple avec 5 sommets et 5 arrêtes

2.5 Chaîne

Une chaîne est une suite d'arêtes qui relient un sommet de départ et un sommet d'arrivée
Une chaîne élémentaire est une chaîne qui ne passe qu'une seule fois par chaque sommet.
Une chaîne simple est une chaîne dont toutes les arêtes sont différentes.
Un cycle est une chaîne simple dont les sommets de départ et d'arrivée sont identiques.

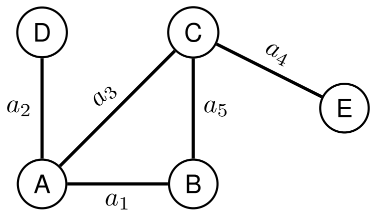

Figure 4: Un graphe où les arêtes sont nommées

Dans la figure 4 :

1. A → B → C est une chaîne simple et élémentaire
2. A → B → C → A est un cycle

S'il existe plusieurs arêtes entre deux sommets, nous devons nommer les arêtes pour les différencier. Par souci de simplicité, s'il est possible de spécifier un chemin sans ambiguïté, nous ne nommerons pas les arêtes.

2.6 Matrice d'adjacence

La matrice d'adjacence d'un graphe est une matrice carrée de taille $n \times n$ où n est le nombre de sommets du graphe.
Chaque élément de la matrice est un entier qui représente le nombre d'arêtes entre deux sommets.
Par exemple dans la figure 2, la matrice d'adjacence est :

	A	B	C	D	E
A	0	1	1	1	0
B	1	0	1	0	0
C	1	1	1	0	1
D	1	0	0	0	0
E	0	0	1	0	0

En Python, cette matrice peut être représentée par une liste de listes comme dans l'exemple suivant :

```
adjacency_matrix = [
  [0, 1, 1, 1, 0],
  [1, 0, 1, 0, 0],
  [1, 1, 1, 0, 1],
  [1, 0, 0, 0, 0],
  [0, 0, 1, 0, 0]
]
```

Nous pouvons voir que la matrice est symétrique par rapport à sa diagonale, c'est le cas pour tous les graphes que nous verrons cette semaine.

2.7 Liste d'adjacence

La liste d'adjacence est une version plus compacte de la matrice d'adjacence, ce qui sera plus adapté pour représenter des graphes avec peu d'arêtes.
L'idée est de simplemet spécifier les sommets adjacents pour chaque sommet, si deux sommets ne sont pas adjacents, nous ne représentons pas cette information.
Nous utiliserons les dictionnaires de Python pour représenter la liste d'adjacence.
Soit le graphe de la figure 2, sa liste d'adjacence est :

```
adjacency_list = {
  'A': ['B', 'C', 'D'],
  'B': ['A', 'C'],
  'C': ['A', 'B', 'C', 'E'],
  'D': ['A'],
  'E': ['C']
}
```

2.8 Graphe connexe

Un graphe est dit connexe s'il existe une chaîne entre n'importe quelle paire de sommets, il est dit non-connexe autrement.

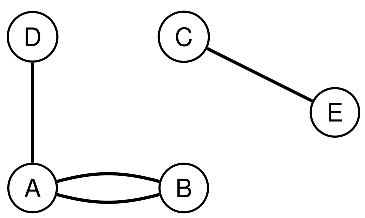

Figure 5: Ce graphe est non-connexe : il n'existe pas de chaîne reliant A à C

2.9 Arbre et arbre couvrant d'un graphe

Un arbre est un graphe sans cycle et connexe.
L'arbre couvrant d'un graphe est un arbre compris dans ce dernier et qui est connecté à tous les sommets

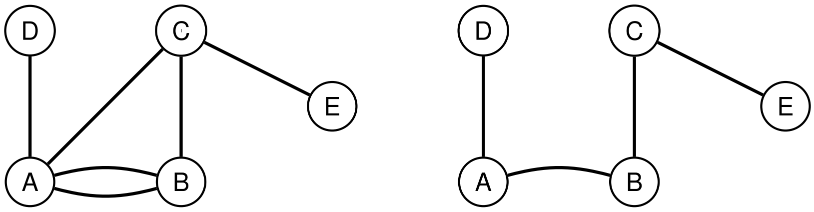

Figure 6: A gauche, un graphe et à droite un arbre couvrant de ce graphe

! Un même graphe peut posséder plusieurs arbres couvrants distincts.

2.10 Graphe complet

Un graphe complet est un graphe où chaque paire de sommets est reliée par une arête.
Dans la figure 7, nous pouvons voir des graphes complets pour des nombres de sommets différents.

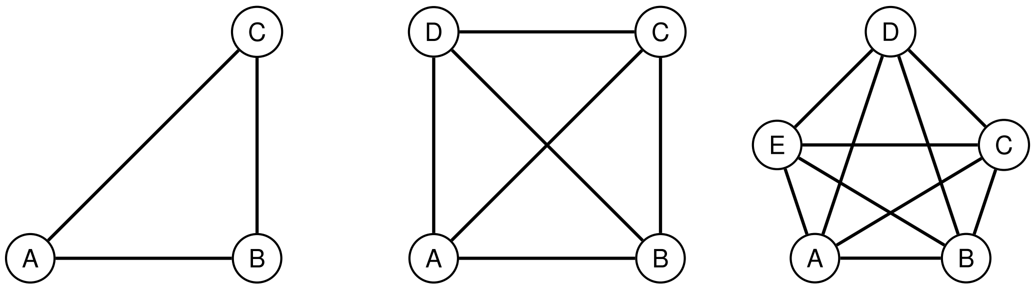

Figure 7: Des graphes complets

2.11 Graphe eulérien

Un parcours eulérien est une chaîne qui passe par chaque arête exactement une fois.
Un cycle eulérien est un parcours eulérien qui commence et termine au même sommet.
Un graphe est dit eulérien s'il possède un cycle eulérien.
Un graphe est dit semi-eulérien s'il possède un parcours eulérien.

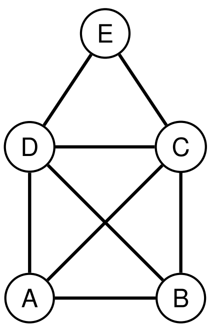

Figure 8: Un graphe semi-eulérien

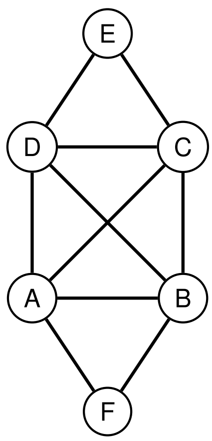

Figure 9: Un graphe eulérien

2.11.1 Théorème d'Euler

Un graphe connexe est eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair.

Si un graphe est eulérien, alors tous ses sommets sont de degré pair.
Quand nous nous déplaçons dans le graphe en suivant un cycle eulérien, chaque fois que nous arrivons à un sommet, nous devons partir par une autre arête car nous serions bloqués autrement.
Cela implique que le degré de chaque sommet est pair.

Si tous les sommets d'un graphe sont de degré pair, alors le graphe est eulérien.
Supposons un sommet de départ S_1 et déplaçons-nous dans le graphe aléatoirement en supprimant les arêtes parcourues.
Comme tous les sommets sont de degré pair, nous ne serons jamais bloqués avant de pouvoir revenir à notre point de départ S_1.
Deux options sont possibles :

1. Si nous revenons à S_1 et qu'il ne reste plus d'arêtes, nous avons trouvé un cycle eulérien
2. Si nous revenons à S_1 et qu'il reste des arêtes, nous pouvons recommencer un parcours eulérien depuis un sommet encore connecté à d'autres sommets (il reste forcément un nombre pair d'arrêtes connectées à chaque sommet).

Un graphe connexe est eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair.

2.11.2 Les ponts de Königsberg

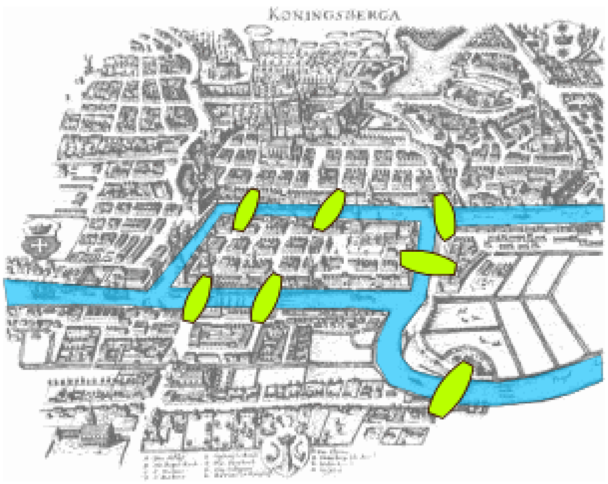

Figure 10: Les ponts de Königsberg

Le problème des sept ponts de Königsberg cherche à déterminer s'il existe un chemin permettant de revenir à son point de départ en empruntant une seule fois chaque pont de la ville.

Si c'est possible, dessinez un tel chemin. Si ce n'est pas possible, pourquoi ? Combien de ponts devraient être ajoutés pour que cela soit possible ? Et si le point de départ et d'arrivée étaient différents ?

Vous pouvez utiliser cet outil en ligne pour résoudre ce problème.

2.12 Graphe Hamiltonien

Un parcours hamiltonien est un parcours qui passe par chaque sommet une seule fois.
Un cycle hamiltonien est un parcours hamiltonien qui commence et termine au même sommet.
Un graphe est dit hamiltonien s'il possède un cycle hamiltonien.
Un graphe est dit semi-hamiltonien s'il possède un parcours hamiltonien.

Intuitivement, nous pourrions penser qu'il s'agit d'un problème similaire à celui des parcours eulériens, mais ce n'est pas le cas.
Nous en reparlerons en semaines 23 et 24.