Série 22

Pour le 20 mars 2024

Exercice 1

Calcule les intégrales définies suivantes (en utilisant le Théorème fondamental du calcul intégral) :

$$\int_0^4 x\ dx\,; \quad \int_1^3 (u^2+1)du\,; \quad \int_2^7 \frac{1}{v}dv\,; \quad \int_{-3}^2 e^{-2t}dt\,; \quad \int_{-2}^2 x^3\ dx.$$

Exercice 2

Théorème de la moyenne. Regarde dans le cours ce que dit le Théorème de la moyenne. Nous nous intéressons dans cet exercice à la fonction $f(x) = \sin x$ définie sur l'intervalle $[0;\pi]$. Quelle est sa valeur moyenne ? En d'autres termes, on veut savoir quelle(s) sont les valeurs de c pour lesquelles $f(c)\cdot\pi$ est égal à l'aire de la surface comprise entre le graphe de la fonction sin et l'axe Ox.

Exercice 3

Primitives. Calcule *toutes* les primitives des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 3$

b) $f(u) = 5u$

c) $f(t) = -3t^4$

d) $f(t) = 3t^5 + 2t^4 - 1$

e) $f(x) = -\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{2x}{5} - \dfrac{1}{4}$

f) $f(u) = \dfrac{2}{u^3}$

g) $f(t) = \sqrt{t}$

h) $f(t) = (t+3)^3$

i) $f(x) = (3x^2+x)^4(6x+1)$

j) $f(u) = e^{-3u}$

k) $f(t) = \dfrac{1}{3t+1}$

l) $f(t) = \dfrac{\ln^3(|t|)}{t}$

m) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

n) $f(u) = \sin^2(u)\cdot\cos(u)$

o) $f(t) = (2t^2+4t)^2\cdot(t+1)$

Exercice 4

Montre que la fonction $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{\sin^2 t}dt$ a un point d'inflexion en $x = 0$.
(N'essaie pas de calculer la primitive de la fonction $e^{\sin^2 x}$!)

Exercice 5

Vrai ou faux ? Justifie brièvement tes réponses, en construisant un contre-exemple élémentaire lorsque c'est possible.

a) Pour toute fonction continue f, on $\int_a^b f^2(x)dx \leq \left(\int_a^b f(x)dx\right)^2$.

b) Si f est intégrable, alors $|f|$ aussi est intégrable.

c) Si f n'est pas intégrable, alors $|f|$ non plus n'est pas intégrable.

d) Si f est une fonction continue définie sur $[a, b]$ et que $c \in]a, b[$, alors les fonctions $h(x) = \int_a^x f(t)dt$ et $g(x) = \int_c^x f(t)dt$ ont la même dérivée parce que *leur différence est une constante*.

e) La fonction $1/x$ est intégrable au sens de Riemann sur l'intervalle $[1, 2]$.

f) La fonction $1/x$ est intégrable au sens de Riemann sur l'intervalle $[0, 1]$.

g) Soit $f(x) = x$ définie sur $[-1, 1]$. Alors $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)^2dx = \left(\int_{-1}^1 f(x)dx\right)^2$.

h) Si une fonction continue et dérivable est périodique, alors la dérivée est périodique.

i) Si une fonction continue est périodique, alors ses primitives aussi sont périodiques.

Exercice 6

On considère la fonction $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ sur $[0, 1]$.

a) Montre que f est continue et décroissante.

b) Calcule la somme de Darboux inférieure sur la subdivision régulière d'ordre n de l'intervalle $[0, 1]$ et montre que $s_{\sigma_n}(f) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$.

c) Trouve une primitive de $f(x)$ et calcule $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$. (Aide-toi d'un formulaire si besoin...)

d) Conclus que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \pi/4$. Ceci donne une manière d'approximer π !

Exercice 7

Calcule l'aire du domaine $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq 1, \quad x^2 \leq y \leq x\}$. Effectue un dessin de la situation et calcule cette aire comme différence de deux intégrales définies.

Exercices théoriques

Exercice 8

Les fonctions de type $P(x)e^{ax+b}$. Soit $P(x)$ un polynôme à coefficients réels de degré n, $a \neq 0$ et $b \in \mathbb{R}$. On considère la fonction réelle $f(x) = P(x)e^{ax+b}$.

a) Montre que la dérivée de $f(x)$ est encore du même type, c'est-à-dire de la forme $Q(x)e^{ax+b}$ avec $Q(x)$ un polynôme de degré n (exactement !).

b) Déduis de cela de quelle forme sont les primitives de $f(x)$.

c) Calcule les primitives de $f(x) = xe^x$, $g(x) = (5x^2 + 2x - 20)e^{5x+1}$ et $h(x) = (x^8 + 8x^7 - 1)e^x$.

d) Calcule l'aire de la surface comprise entre l'axe Ox, les droites $x = 0$ et $x = 1$, et le graphe de la fonction $h(x) = (x^8 + 8x^7 - 1)e^x$.
Indication : $h(x) = 0 \Leftrightarrow x \cong 0,733741$.

Exercice 9

Démontre que $\displaystyle\int e^{ax} \sin(bx)dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} [a \sin(bx) - b \cos(bx)] + c$.

Exercice 10

Intégrale d'une fonction positive. On suppose que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, positive ou nulle. On pose $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$.

a) Montre que F est croissante et donc que $\displaystyle\int_a^c f(t)dt \leq \int_a^b f(t)dt$ pour tout $a \leq c \leq b$.

b) Montre que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = 0$ si et seulement si $f(t) = 0$ pour tout t.

c) Montre que si $f(x) \geq g(x)$ pour tout $x \in [a, b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \geq \int_a^b g(t)dt$.

d) Déduis de cet exercice que la fonction Arctan est croissante sur $[0, 1]$ (cf. exercice 6).