Test 4 - Algèbre linéaire. 8 mars 2023

Nom: ______________________ Prénom: ______________________

Le test dure 105 minutes. Les réponses doivent être rédigées de manière claire dans le dossier. Au besoin, il est possible d'utiliser des feuilles supplémentaires. Justifiez tous vos calculs.

Exercice 1. *(9 points)*

On considère l'application $f : \mathbb{R}_1[t] \to \mathbb{R}_2[t]$ par $f(at+b) = (3a-b)t^2 + 2b - 6a$.

a) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$;

b) Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$;

c) Enoncer le théorème du rang et le vérifier sur l'exemple de cet exercice.

Exercice 2. *(12 points)*

Dans $M_2(\mathbb{R})$, on considère les sous-ensembles U des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, V des matrices de la forme $\begin{pmatrix} t+s & r+s \\ 0 & t+s \end{pmatrix}$ et W des matrices de la forme $\begin{pmatrix} w & 0 \\ x & w \end{pmatrix}$.

a) Montrer que U est sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$

b) Déterminer une base de V.

c) Déterminer les sous-espaces $U \cap V \cap W$ et $U + V + W$, en donnant une base de chacun d'eux. Est-ce que $U + V + W$ est une somme directe de $M_2(\mathbb{R})$?

d) Si U et V sont deux sous-espaces dans espace vectoriel E, énoncer la relation entre les dimensions de U, V, $U \cap V$ et $U + V$.

e) Si U, V et W sont trois sous-espaces dans espace vectoriel E, conjecturer une relation entre les dimensions de $U + V + W$, U, V, W, $U \cap V$, $U \cap W$, $V \cap W$ et $U \cap V \cap W$.
Vérifier cette conjecture sur les espaces étudiés dans cet exercice.

Exercice 3. *(15 points)*

On définit les deux applications linéaires

$$\begin{array}{rccl} f\ : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x\,;\,y) & \longmapsto & (2x-y\,;\,x+2y) \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{rccl} g\ : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x\,;\,y) & \longmapsto & (x+y\,;\,3y\,;\,x) \end{array}$$

Soit encore les bases $\mathcal{B} = ((1;1)\,;\,(1;-2))$ de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{C} = \big((0;1;0)\,;\,(0;0;1)\,;\,(\frac{1}{2};0;0)\big)$ de $\mathbb{R}^3$.

a) Déterminer la matrice F représentant f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

b) Déterminer la matrice G représentant g relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

c) Déterminer H la matrice de $g \circ f$ relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

d) Déterminer la matrice de changement de base Q de $\mathcal{B}$ vers la base canonique de $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire la matrice $(Id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}an}$.

e) Calculer la matrice de changement de base P de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathcal{C}$, c'est-à-dire la matrice $(Id)_{\mathcal{C}an}^{\mathcal{C}}$.

f) Calculer la matrice G^* de g par rapport aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ à l'aide de la formule du changement de base qui fait intervenir un produit de trois matrices.

Exercice 4. *(8 points)*

Discuter et résoudre en fonction de k le système $\quad H_k \cdot X = b_k \quad$ où

$$H_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b_k = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ k^2 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ avec } \quad k \in \mathbb{R}.$$

Exercice 5. *(9 points)*

On donne une application linéaire $\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ par sa matrice A relativement à la base canonique :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer les valeurs propres éventuelles de α et les espaces propres associés.

b) Dire pourquoi α est diagonalisable, déterminer une matrice de changement de base P et la matrice diagonale D correspondant à cette nouvelle base.

c) Caractériser géométriquement α.

Exercice 6. *(6 points)*

Soit V un K-espace vectoriel et $\alpha : V \to V$ un isomorphisme.

a) Montrer que l'application réciproque $\alpha^{-1} : V \to V$ est K-linéaire.

b) Pourquoi α^{-1} est-il aussi un isomorphisme ?

Exercice 7. *(5 points)*

On considère une application linéaire $p : V \to V$ qui vérifie $p \circ p = p$.

Montrer que les seules valeurs propres possibles sont 0 et 1.