L'exercice bonus de cette semaine peut être rendu sur Moodle jusqu'au mardi 12 Mars, à 18h.

Exercice 1.
Dans chacun des cas suivants, déterminer si l'ensemble B est un sous-anneau, un idéal à gauche, un idéal à droite, un idéal bilatère de l'anneau A ou s'il ne possède aucune de ces propriétés:

(a) $A = \mathbb{Z}$ et $B = 9\mathbb{Z}$;

(b) $A = \mathbb{F}_{11}$ et $B = \{[0], [2], [4], [6], [8], [10]\}$;

(c) $A = \mathbb{Z}[t]$ et $B = t^2 \cdot \mathbb{Z}[t^2]$;

(d) $A = \mathbb{F}_2[t]$ et $B = t^2 \cdot \mathbb{F}_2[t]$;

(e) $A = \mathbb{Q}$ et $B = \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$;

(f) $A = \mathbb{Q}$ et $B = \mathbb{Z}[i]$;

(g) $A = \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ et $B = \{[0], [5], [10]\}$;

(h) $A = M_n(\mathbb{R})$, $B = \{M \mid m_{ij} = 0 \text{ si } i < j\}$;

(i) $A = \mathbb{Z}_{(p)} = \left\{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid p \text{ ne divise pas } b\right\}$ et $B = p^n\mathbb{Z}_{(p)}$, où p est un premier et $n \in \mathbb{N}$;

(j) $A = M_3(\mathbb{R})$ et $B = \left\{\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\right\}$;

(k) $A = M_3(\mathbb{R})$ et $B = \left\{\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} \mid a, b, c, d, e \in \mathbb{R}\right\}$;

(l) $A = M_3(\mathbb{R})$ et $B = \left\{\begin{pmatrix} a & a & 0 \\ b & b & 0 \\ c & c & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$;

(m) $A = \mathbb{C}[S_3]$ et $B = \left\{\sum_{g \in S_3} \lambda \cdot g \mid \lambda \in \mathbb{C}\right\}$;

(n) $A = \mathbb{C}[S_3]$ et $B = \left\{\sum_{g \in S_3} (-1)^{\mathrm{sgn}(g)} \lambda \cdot g \mid \lambda \in \mathbb{C}\right\}$;

(o) $A = \mathbb{C}[S_3]$ et $B = \left\{\lambda \cdot \mathrm{Id} + \lambda\varepsilon(123) + \lambda\varepsilon^2(132) + \mu(12) + \mu\varepsilon(23) + \mu\varepsilon^2(13) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{C}\right\}$, où ε est une racine cubique primitive d'unité;

(p) $A = \mathbb{C}[S_3]$ et $B = \{\lambda(123) + \lambda(132) \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$.

Exercice 2.
Soit K un corps et $M_n(K)$ l'anneau des matrices carrées de taille $n \times n$.

(a) Soit $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ fixés. Soit I un idéal à gauche de $M_n(K)$ contenant la matrice e_{ij}. Montrer que I contient aussi toutes les matrices "concentrées dans la j-ème colonne", i.e. (b_{rs}) avec $b_{rs} = 0$ si $s \neq j$.

(b) Montrer que le sous-ensemble des matrices concentrées dans la j-ème colonne forme un idéal à gauche de $M_n(K)$.

(c) Montrer que les seuls idéaux bilatères de $M_n(K)$ sont $\{0\}$ et $M_n(K)$.

Exercice 3.
Dans chacun des cas suivants, déterminer si l'affirmation suivante est vraie ou fausse. Justifier la réponse par un raisonnement ou un contre-exemple.

(a) Si A est un anneau intègre, et I et J sont deux idéaux non nuls de A, alors $I \cap J$ est aussi un idéal non nul de A.

(b) Si K est un corps, alors les deux seuls idéaux de K sont $\{0\}$ et K.

(c) Si K est un anneau n'ayant que deux idéaux bilatères, alors tout élément non-nul de K possède un inverse à gauche et à droite.

(d) Si K est un anneau commutatif n'ayant que deux idéaux, alors K est un corps.

(e) Si K est un anneau tel que les seuls idéaux à gauche sont $\{0\}$ et K, alors tout élément non-nul de K possède un inverse à gauche et à droite.

(f) Si K est un anneau tel que les seuls idéaux à droite sont $\{0\}$ et K, alors tout élément non-nul de K possède un inverse à gauche et à droite.

Exercice 4.
Montrer les isomorphismes suivants:

(a) $K[t]/(t-a) \cong K$ si K est un corps et $a \in K$.

(b) $M_n(A)/M_n(I) \cong M_n(A/I)$ si I est un idéal bilatère de A.

(c) $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]/(5+2\sqrt{7}) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ (on pourra commencer par identifier le noyau de l'unique homomorphisme d'anneaux $\varphi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[\sqrt{7}]/(5+2\sqrt{7})$).

Exercice 5.
Soit A un anneau, et $f, g \in A[t]$.

(a) Si A est intègre, alors $\deg(f \cdot g) = \deg(f) + \deg(g)$.

(b) Si f ou g est unitaire, alors $\deg(f \cdot g) = \deg(f) + \deg(g)$.

(c) Est-ce que c'est vrai en général ?

Exercice 6.
Montrer que $\mathbb{Z}[\varepsilon] \cong \mathbb{Z}[t]/(t^2+t+1)$, où ε est une racine cubique primitive de l'unité.

Exercice Bonus.
Est-ce que les paires d'anneaux suivants sont isomorphes ? Justifiez votre réponse.

(a) $\mathbb{Z}_{(2)}$ et $\mathbb{Z}_{(3)}$; (voir l'exercice 1.(d))

(b) $\mathbb{Z}[t]$ et $\mathbb{Z}[x,y]/(xy-2024)$;

(c) Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Pour chaque $p \in \mathcal{P}$, soit t_p une variable. Est-ce que $\mathbb{Q}$ et

$$\mathbb{Z}[\{t_p\}_{p\in\mathcal{P}}]\Big/ (pt_p - 1 | p \in \mathcal{P})$$

sont isomorphes ?