Peter Wittwer

Analyse avancée II – Série 2A

Échauffent 1. (Équations linéaires du premier ordre)

Quelles sont les solutions générales des équations différentielles suivantes ?

i) $y' = 0$ *ii)* $y' = 1$ *iii)* $y' + y = 0$ *iv)* $y' - y = 0$

Échauffent 2. (Équations linéaires du 2e ordre)

Quelles sont les solutions générales des équations différentielles suivantes ?

i) $y'' = 0$ *ii)* $y'' = 1$ *iii)* $y'' + y = 0$ *iv)* $y'' - y = 0$

Échauffent 3. (Résonances)

Quelle est la solution du problème de Cauchy $y'' + y = \cos(x)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$?

Exercice 1. (Équations linéaires)

Résoudre les équations différentielles ci-dessous pour les conditions initiales données.

i) $y' - y\sin(x) = 4\sin(x)\, e^{\cos(x)}$ $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

ii) $xy' - y - 4x\ln(x) = 0$ $y(1) = 1$

Exercice 2. (Équations linéaires, méthode des coefficients indéterminés)

Résoudre les équations différentielles ci-dessous pour les conditions initiales données.

i) $y' - 3y = 10\cos(x) + 2e^{3x}$ $y(0) = 0$

ii) $y' + y = x^3$ $y(0) = -2$

Exercice 3. (V/F : Équations différentielles linéaires du premier ordre)

Q1 : Soit $y(x)$ une solution d'une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre sur un intervalle ouvert I. Alors pour toute constante $C \in \mathbb{R}$, la fonction $y_1(x) = y(x) + C$ est solution de cette même équation différentielle sur l'intervalle I.

Q2 : Soient $y_1(x)$ et $y_2(x)$ deux solutions d'une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre sur un intervalle ouvert I. Alors la différence $y(x) = y_1(x) - y_2(x)$ est solution de cette même équation différentielle sur l'intervalle I.

Q3 : Soient $y_1(x)$ et $y_2(x)$ deux solutions d'une équation différentielle linéaire du premier ordre sur un intervalle ouvert I. Alors la différence $y(x) = y_1(x) - y_2(x)$ est solution de cette même équation différentielle sur l'intervalle I.

Ex. 4 - 7 au verso.

Exercice 4. (Équations linéaires homogènes à coefficients constants)

Résoudre l'équation différentielle
$$3y'' - 4y' + my = 0$$
pour les valeurs indiquées du paramètre m.

i) $m = 1$ *ii*) $m = 2$ *iii*) $m = \frac{4}{3}$

Pour *iii*), montrer que la deuxième solution du problème homogène peut être trouvée par la méthode de la variation de la constante.

Exercice 5. (Équations à coefficients constants)

Résoudre les équations différentielles suivantes :

i) $y'' + 4y = 3e^{2x}$ *ii*) $y'' + 4y = 5\cos(2x)$ *iii*) $y'' + y = \dfrac{1}{\sin(x)}$, avec $x \in]0, \pi[$

Exercice 6. (Problème de Cauchy)

i) Déterminer la solution générale de l'équation différentielle homogène suivante :
$$y'' + 2y' - 3y = 0\,.$$

ii) Trouver une solution particulière de l'équation différentielle suivante :
$$y'' + 2y' - 3y = 5\sin(3x)\ . \tag{1}$$

iii) Donner la solution de (1) pour les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = -\frac{1}{2}$.

Exercice 7. (Oscillateur harmonique amorti)

Considérer l'équation différentielle
$$my'' + \alpha y' + \varepsilon y = H\sin(\omega t) \tag{2}$$
où $m > 0$, $\alpha > 0$, $\varepsilon > 0$ et $\omega \in \mathbb{R}$.

i) Trouver la solution générale pour l'équation homogène associée.

ii) Que se passe-t-il avec cette solution lorsque $t \to \infty$?

iii) Trouver une solution particulière de la forme $y_{\text{part}}(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$.

iv) Quel est le comportement de la solution générale de (2) lorsque $t \to \infty$?

Remarque: Le titre de cet exercice est dû au fait que l'équation différentielle (2) décrit le mouvement d'une masse m suspendue à une extrémité d'un ressort (cf. cours de physique).