

## Analyse avancée II – Corrigé de la série 1A

### Échauffement.

i) La fonction  $y(x) = 2$  est solution de l'équation. Pour  $y \neq 2$  on a

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = y - 2 &\quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y - 2} = dx &\quad \Rightarrow \quad \ln(|y - 2|) = x + \tilde{C}, \quad \tilde{C} \in \mathbb{R} \\ &\quad \Rightarrow \quad y - 2 = Ce^x, \quad C \neq 0 &\quad \Rightarrow \quad y = Ce^x + 2. \end{aligned}$$

Avec  $C = 0$ , on a  $y(x) = 2$ . Ainsi la solution générale est  $y(x) = Ce^x + 2$  avec  $C \in \mathbb{R}$  pour  $x \in \mathbb{R}$ .

ii) La fonction  $y(x) = 0$  est une solution. Pour  $y \neq 0$ , on a

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = -xy &\quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -xdx &\quad \Rightarrow \quad \ln(|y|) = -\frac{1}{2}x^2 + \tilde{C}, \quad \tilde{C} \in \mathbb{R} \\ &\quad \Rightarrow \quad y = Ce^{-\frac{1}{2}x^2}, \quad C \neq 0. \end{aligned}$$

Comme le cas  $C = 0$  correspond à  $y(x) = 0$ , la solution générale est  $y(x) = Ce^{-\frac{x^2}{2}}$  avec  $C \in \mathbb{R}$  pour  $x \in \mathbb{R}$ .

iii) La fonction  $y(x) = 0$  est une solution pour  $x \in ]-\infty, 0[$  et pour  $x \in ]0, \infty[$ . Si  $x, y \neq 0$  on a

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = -\frac{3y}{x} &\quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -\frac{3dx}{x} &\quad \Rightarrow \quad \ln(|y|) = -3\ln(|x|) + \tilde{C}, \quad \tilde{C} \in \mathbb{R} \\ &\quad \Rightarrow \quad |y| = \frac{C}{|x|^3}, \quad C \neq 0 &\quad \Rightarrow \quad y = \pm \frac{C}{|x|^3} &\quad \Rightarrow \quad y = \frac{C}{x^3}. \end{aligned}$$

Comme  $C = 0$  mène à  $y(x) = 0$ , la solution générale est  $y(x) = \frac{C}{x^3}$  avec  $C \in \mathbb{R}$  pour  $x \in ]-\infty, 0[$  et pour  $x \in ]0, \infty[$ .

### Exercice 1.

i) En écrivant  $y' = \frac{dy}{dx}$  dans l'équation donnée, celle-ci devient

$$\frac{dy}{dx} = \lambda y \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{y} = \lambda dx.$$

On intègre alors des deux côtés et on obtient pour  $x \in \mathbb{R}$

$$\ln(|y|) = \lambda x + \tilde{C} \quad \text{avec } \tilde{C} \in \mathbb{R},$$

c'est-à-dire

$$|y(x)| = e^{\tilde{C}} e^{\lambda x}, \quad \text{i.e.} \quad y(x) = Ce^{\lambda x} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

Notez qu'on peut avoir  $C = 0$  (même si  $e^{\tilde{C}} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ) parce que la fonction  $y(x) = 0$  est aussi une solution de l'équation.

*Remarque :* Une équation différentielle de cette forme décrit une croissance (si  $\lambda > 0$ ) ou décroissance (si  $\lambda < 0$ ) exponentielle, un phénomène qui apparaît souvent dans la nature.

- ii) En intégrant  $\frac{dy}{\sqrt{y^2+1}} = dx$  des deux côtés on trouve  $\text{Argsh}(y) = x + C$  pour  $C, x \in \mathbb{R}$ .  
Il s'en suit que  $y(x) = \sinh(x + C)$  pour  $C, x \in \mathbb{R}$ .

### Exercice 2.

- i) On procède par séparation des variables. En écrivant  $y' = \frac{dy}{dx}$  l'équation devient

$$6(y-1)^2 dy = x(3x+4) dx,$$

d'où, par intégration des deux fonctions polynomiales,

$$2(y-1)^3 = x^3 + 2x^2 + \tilde{C}, \quad \tilde{C} \in \mathbb{R}.$$

La forme explicite de la solution  $y$  est donc

$$y(x) = 1 + f^{-1}\left(x^2\left(\frac{1}{2}x + 1\right) + C\right), \quad x \in I, C \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

où  $f^{-1}(u)$  est la fonction réciproque de  $f(x) = x^3$  et  $I$  est un intervalle ouvert à définir. Comme  $f$  est bijective sur  $\mathbb{R}$ , sa fonction réciproque  $f^{-1}$  est aussi définie sur  $\mathbb{R}$ , à savoir par

$$f^{-1}(u) = \text{sgn}(u)|u|^{1/3}.$$

Cette fonction est continue sur  $\mathbb{R}$  mais elle n'est pas dérivable en  $u = 0$ , ce qui fait que l'équation différentielle a plusieurs solutions  $y(x)$  de la même forme (1) qui sont définies sur des intervalles ouverts différents. Ces intervalles  $I$  dépendent des racines réelles du polynôme  $x^2\left(\frac{1}{2}x + 1\right) + C$ , chaque solution étant définie sur un intervalle ouvert sur lequel ce polynôme est du même signe.

La condition initiale  $y(0) = 0$  implique que  $0 = 1 + \text{sgn}(C)|C|^{1/3}$ , c'est-à-dire  $C = -1$ . On obtient donc la solution particulière (maximale)

$$y(x) = 1 - \left|x^2\left(\frac{1}{2}x + 1\right) - 1\right|^{1/3} = 1 - \sqrt[3]{1 - x^2\left(\frac{1}{2}x + 1\right)}, \quad x \in ]-\infty, x_0[,$$

où  $x_0 > 0$  est l'unique solution réelle de l'équation  $x^2\left(\frac{1}{2}x + 1\right) - 1 = 0$ .

(On peut voir que  $x_0$  est l'unique solution et qu'elle est positive par une mini-étude de la fonction  $g(x) = x^2\left(\frac{1}{2}x + 1\right) - 1$ .)

- ii) On applique la même méthode:

$$\begin{aligned} y y' - e^{y^2-4x} &= 0 \quad \Rightarrow \quad y e^{-y^2} dy = e^{-4x} dx \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2}e^{-y^2} = -\frac{1}{4}e^{-4x} + \tilde{C}, \quad \tilde{C} \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow \quad e^{-y^2} &= \frac{1}{2}e^{-4x} + C, \quad C \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad y^2 = -\ln\left(\left(\frac{1}{2}e^{-4x} + C\right)\right), \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

En fait, la constante  $C$  ne peut pas prendre toutes les valeurs dans  $\mathbb{R}$  parce que  $y^2 \geq 0$  et le logarithme doit être définie. Mais comme on ne s'intéresse pas à la solution générale ici, il n'est pas nécessaire de trouver le domaine exact de  $C$ , il suffira de trouver la valeur de  $C$  à partir de la condition initiale et puis le domaine de  $x$  en fonction.

La forme explicite de la solution  $y$  est alors

$$y(x) = \pm \sqrt{-\ln\left(\frac{1}{2}e^{-4x} + C\right)}.$$

La condition initiale  $y(0) = \sqrt{\ln(2)}$  implique que le signe est positif, et, de plus,

$$\sqrt{\ln(2)} = +\sqrt{-\ln\left(\frac{1}{2} + C\right)} \quad \Rightarrow \quad C = 0.$$

La solution particulière pour la condition initiale donnée est donc

$$y(x) = \sqrt{4x + \ln(2)}$$

qui est à priori définie pour  $x \geq -\frac{\ln(2)}{4}$ . Or,  $y'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x + \ln(2)}}$  n'est pas définie en  $x = -\frac{\ln(2)}{4}$ . La solution maximale pour la condition initiale donnée est donc

$$y(x) = \sqrt{4x + \ln(2)}, \quad x \in \left] -\frac{\ln(2)}{4}, \infty \right[.$$

### Exercice 3.

i) Pour  $\varepsilon = 0$ , la solution maximale est  $y_0(x) = e^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Pour  $\varepsilon > 0$  on utilise la séparation des variables

$$\frac{dy}{dx} = y^{1+\varepsilon} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{y^{1+\varepsilon}} = dx,$$

ce qui donne, après intégration, la solution générale

$$-\frac{1}{\varepsilon y^\varepsilon} = x + C, \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

La condition initiale implique que

$$-\frac{1}{\varepsilon} = C.$$

Ainsi

$$y^{-\varepsilon} = -\varepsilon \left( x - \frac{1}{\varepsilon} \right)$$

et la solution particulière recherchée est donc

$$y_\varepsilon(x) = (1 - \varepsilon x)^{-\frac{1}{\varepsilon}}, \quad x \in \left] -\infty, \frac{1}{\varepsilon} \right[.$$

(L'intervalle de définition pour  $x$  s'obtient à partir du fait que  $1 - \varepsilon x$  doit être positif.)

ii) On a vu que le domaine de définition de  $y_\varepsilon$  pour  $\varepsilon > 0$  est  $\left] -\infty, \frac{1}{\varepsilon} \right[$  et que celui de  $y_0$  est  $\mathbb{R}$ . Donc si  $b \leq 0$ , l'intervalle  $A$  est dans le domaine de définition de  $y_\varepsilon$  pour tout  $\varepsilon \geq 0$  et  $\varepsilon_0 = \infty$ . Si  $b > 0$ , l'intervalle  $A$  est dans le domaine de définition de  $y_\varepsilon$  pour autant que  $b < \frac{1}{\varepsilon}$ , c'est-à-dire pour tout  $\varepsilon < \varepsilon_0 = \frac{1}{b}$ .

iii) Pour montrer que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |y_\varepsilon(x) - y_0(x)| = 0$ , il suffit de montrer que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y_\varepsilon(x) = y_0(x)$ .  
On a que

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y_\varepsilon(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (1 - \varepsilon x)^{-\frac{1}{\varepsilon}} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \exp \left[ -\frac{1}{\varepsilon} \ln(1 - \varepsilon x) \right]. \end{aligned}$$

Comme la fonction exponentielle est continue, on peut échanger l'évaluation de la fonction et la limite et l'on obtient

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y_\varepsilon(x) = \exp \left[ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( -\frac{\ln(1 - \varepsilon x)}{\varepsilon} \right) \right].$$

Puisque  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln(1 - \varepsilon x) = \ln(1) = 0$  et  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon = 0$ , on peut appliquer Bernoulli-l'Hospital<sup>1</sup> pour calculer la limite, ce qui donne

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y_\varepsilon(x) = \exp \left[ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( -\frac{\frac{-x}{1-\varepsilon x}}{1} \right) \right] = \exp \left[ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \varepsilon x} \right] = \exp(x) = y_0(x).$$

#### Exercice 4.

On réécrit l'équation

$$\frac{dy}{dt} = y(a - by) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{y(a - by)} = dt \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{dy}{y(a - by)} = \int dt$$

On décompose le terme de gauche en éléments simples :

$$\frac{A}{y} + \frac{B}{a - by} = \frac{A(a - by) + By}{y(a - by)} \quad \Leftrightarrow \quad 1 = A(a - by) + By = Aa - (Ab - B)y,$$

donc  $A = \frac{1}{a}$  et  $B = \frac{b}{a}$ . Ainsi

$$\int \frac{1}{y(a - by)} dy = \int \frac{1}{ay} dy + \int \frac{b}{a(a - by)} dy = \frac{1}{a} \ln(|y|) - \frac{1}{a} \ln(|a - by|),$$

et donc on a pour  $C > 0$

$$\frac{1}{a} \ln(|y|) - \frac{1}{a} \ln(|a - by|) = t + \ln(C) \quad \Leftrightarrow \quad \left| \frac{y}{a - by} \right|^{1/a} = Ce^t \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y}{a - by} = \pm C^a e^{at}$$

On pose alors  $C^* := \pm C^a \in \mathbb{R}^*$  et on continue

$$\begin{aligned} \frac{y}{a - by} = C^* e^{at} &\Leftrightarrow y = C^* e^{at} (a - by) \Leftrightarrow y(1 + bC^* e^{at}) = aC^* e^{at} \\ &\Leftrightarrow y = \frac{aC^* e^{at}}{1 + bC^* e^{at}} = \frac{aC^*}{e^{-at} + bC^*} = \frac{a}{\frac{e^{-at}}{C^*} + b} = \frac{\frac{a}{b}}{1 + \frac{e^{-at}}{bC^*}} \end{aligned}$$

On détermine la valeur de  $C^*$  pour condition initiale  $y(0) = y_0$  :

$$y(0) = \frac{\frac{a}{b}}{1 + \frac{1}{bC^*}} = \frac{aC^*}{bC^* + 1} = y_0 \quad \Leftrightarrow \quad aC^* = y_0(bC^* + 1) \quad \Leftrightarrow \quad C^* = \frac{y_0}{a - by_0}$$

---

<sup>1</sup>En général il est préférable d'éviter la règle de Bernoulli-l'Hospital et d'utiliser les développements limités. On a (formule de Taylor avec reste) que  $\ln(1 + z) = z + \mathcal{O}(z)$  autour de  $z = 0$ , ce qui donne que  $\frac{\ln(1 - \varepsilon x)}{\varepsilon} = -x + \frac{\mathcal{O}(\varepsilon x)}{\varepsilon}$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , d'où le résultat. De plus, dans le présent cas, on aurait d'ailleurs aussi pu utiliser directement que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (1 - \varepsilon x)^{-\frac{1}{\varepsilon}} = \left( \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (1 - \varepsilon x)^{-\frac{1}{\varepsilon x}} \right)^x = e^x.$$

La solution cherchée est donc

$$y(t) = \frac{\frac{a}{b}}{1 + \frac{e^{-at}(a-by_0)}{by_0}} = \frac{\frac{a}{b}}{1 + \left(\frac{a}{by_0} - 1\right)e^{-at}}$$

comme vu au cours.

Noter que pour les conditions initiales  $y_0 = 0$  ou  $y_0 = \frac{a}{b}$ , les solutions de l'équation différentielle sont des fonctions constantes, à savoir  $y(t) = 0$  et  $y(t) = \frac{a}{b}$  respectivement.

La croissance de la solution  $y(t)$  est déterminée par le facteur  $\lambda := \frac{a}{by_0} - 1$  devant l'exponentielle. Si  $y_0 > \frac{a}{b}$ , alors  $\lambda < 0$  et donc  $y(t)$  est décroissante. Si  $y_0 < \frac{a}{b}$  on a  $\lambda > 0$  et  $y(t)$  est croissante. Puisque  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \frac{a}{b}$ , la droite  $y = \frac{a}{b}$  est une asymptote horizontale et n'est donc jamais intersectée par  $y(t)$ .

### Exercice 5.

Observons d'abord que les fonctions constantes  $y(x) = 0$  et  $y(x) = 1$  sont des solutions pour  $x \in \mathbb{R}$ .

Si  $x, y \neq 0$  et  $x, y \neq 1$ , l'équation différentielle donnée s'écrit

$$\frac{dy}{y(y-1)} = \frac{dx}{x(x-1)},$$

puis, en décomposant chaque terme en éléments simples:

$$\left(-\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1}\right) dy = \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}\right) dx.$$

En intégrant les deux côtés on obtient

$$\begin{aligned} -\ln|y| + \ln|y-1| &= -\ln|x| + \ln|x-1| + \ln(\tilde{C}), \quad \tilde{C} > 0, \\ \Leftrightarrow \ln\left|\frac{y-1}{y}\right| &= \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + \ln(\tilde{C}) \quad \tilde{C} > 0, \\ \Leftrightarrow \left|\frac{y-1}{y}\right| &= \tilde{C} \left|\frac{x-1}{x}\right| \quad \tilde{C} > 0, \end{aligned} \tag{2}$$

L'équation (2) est équivalente à

$$\frac{y-1}{y} = C \frac{x-1}{x}, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \tag{3}$$

car, si un couple  $(x, y)$  satisfait l'équation (2) pour un certain  $\tilde{C}$ , il satisfait aussi l'équation (3) avec  $C = \tilde{C}$  ou  $C = -\tilde{C}$ , et si un couple  $(x, y)$  satisfait l'équation (3) pour un certain  $C$ , il satisfait aussi l'équation (2) pour  $\tilde{C} = |C|$ .

A partir de (3) on trouve l'expression explicite de  $y$  en fonction de  $x$ ,

$$Cy(x-1) = x(y-1) \quad \Rightarrow \quad y(Cx - C - x) = -x \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{x}{(1-C)x + C}.$$

Pour  $C \neq 0$  et  $C \neq 1$  la fonction  $y(x)$  définit deux solutions, une sur l'intervalle  $]-\infty, \frac{C}{C-1}[$  et une sur l'intervalle  $]\frac{C}{C-1}, \infty[$ . (Le dénominateur de  $y$  s'annule en  $x = \frac{C}{C-1}$  dans ce cas.)

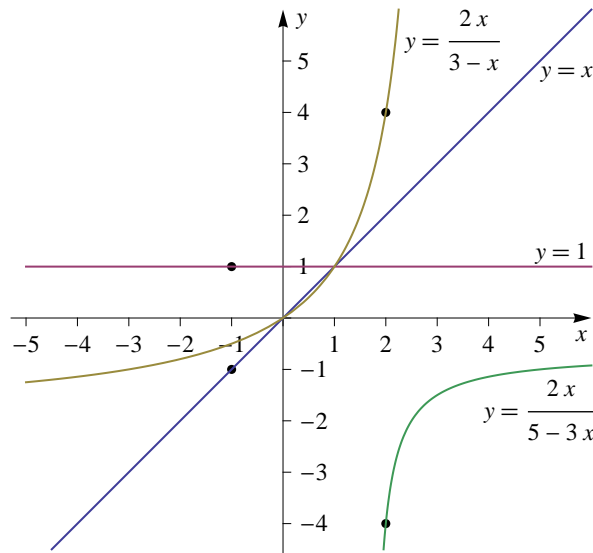
Pour  $C = 0$ , on a  $y(x) = 1$  et pour  $C = 1$ , on a  $y(x) = x$ . Tout comme la solution triviale  $y(x) = 0$ , ces deux solutions sont définies pour  $x \in \mathbb{R}$ . La solution générale de l'équation donnée est donc

$$\begin{aligned}
y(x) &= \frac{x}{(1-C)x+C}, & C \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}, & & x \in ]-\infty, \frac{C}{C-1}[ \text{ ou } x \in ]\frac{C}{C-1}, \infty[, \\
y(x) &= 1, & C = 0, & & x \in \mathbb{R}, \\
y(x) &= x, & C = 1, & & x \in \mathbb{R}, \\
y(x) &= 0, & - & & x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Pour trouver les solutions particulières pour les conditions initiales  $y(x_0) = y_0$  données, on met la condition initiale dans la solution générale et on résout pour  $C$ . Les solutions sont:

$$\begin{aligned}
x_0 = -1, y_0 = -1 & \Rightarrow C = 1 & \Rightarrow y = x, & x \in \mathbb{R} \\
x_0 = -1, y_0 = 1 & \Rightarrow C = 0 & \Rightarrow y = 1, & x \in \mathbb{R} \\
x_0 = 2, y_0 = 4 & \Rightarrow C = \frac{3}{2} & \Rightarrow y = \frac{2x}{3-x}, & x \in ]-\infty, 3[^* \\
x_0 = 2, y_0 = -4 & \Rightarrow C = \frac{5}{2} & \Rightarrow y = \frac{2x}{5-3x}, & x \in ]\frac{5}{3}, \infty[^*
\end{aligned}$$

\*On a choisi l'intervalle qui contient  $x_0$ .



Graph des solutions (les points correspondent aux conditions initiales):

### Exercice 6.

La fonction  $u(t)$  qui satisfait pour  $t \in \mathbb{R}$  l'équation différentielle

$$u' + u^2 \sin(t) = 0$$

avec la condition initiale  $u(0) = \frac{1}{4}$  vérifie aussi :

$u(\pi) = \frac{1}{2}$

$u(\pi) = \frac{e^2}{4}$

$u(\pi) = \frac{1}{6}$

$u(\pi) = \frac{1}{4e^2}$