Peter Wittwer

Analyse avancée II – Corrigé de la série 2A

Notation: Dans ce corrigé, l'équation quadratique en λ qui apparaît dans le § 1.5.2 du cours est appelée l'*équation caractéristique* de l'équation différentielle correspondante.

Échauffement 1.

i) $\{\forall C \in \mathbb{R},\ y(x) = C, x \in \mathbb{R}\}$

ii) $\{\forall C \in \mathbb{R},\ y(x) = x + C, x \in \mathbb{R}\}$

iii) $\{\forall C \in \mathbb{R},\ y(x) = Ce^{-x}, x \in \mathbb{R}\}$

iv) $\{\forall C \in \mathbb{R},\ y(x) = Ce^{x}, x \in \mathbb{R}\}$

Échauffement 2.

i) $\{\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R},\ y(x) = C_1 x + C_2, x \in \mathbb{R}\}$

ii) $\left\{\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R},\ y(x) = \frac{1}{2}x^2 + C_1 x + C_2,\ x \in \mathbb{R}\right\}$

iii) $\{\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R},\ y(x) = y(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x),\ x \in \mathbb{R}\}$

iv) $\{\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R},\ y(x) = C_1 \cosh(x) + C_2 \sinh(x),\ x \in \mathbb{R}\}$ ou encore
$\{\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R},\ y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x},\ x \in \mathbb{R}\}$

Échauffement 3. La solution recherchée est $y(x) = \frac{1}{2}x\sin(x) + \sin(x)$.

Exercice 1.

Dans cet exercice il s'agit d'équations différentielles linéaires du premier ordre. D'après le cours toute solution $y(x)$ de ce type d'équation s'écrit

$$y(x) = y_{\text{hom}}(x) + y_{\text{part}}(x)\,,$$

où $y_{\text{hom}}(x)$ est la solution générale de l'équation homogène associée (i.e. sans second membre) et $y_{\text{part}}(x)$ est une solution particulière de l'équation initiale.

i) La solution générale de l'équation homogène s'obtient en séparant les variables (cf. cours). On obtient

$$y_{\text{hom}}(x) = Ce^{-\int(-\sin(x))dx} = Ce^{-\cos(x)} \qquad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

Pour trouver une solution particulière de l'équation complète (i.e. avec second membre), on utilise la méthode de variation de la constante, c'est-à-dire on pose

$$y_{\text{part}}(x) = C(x)e^{-\cos(x)}.$$

On a alors
$$y'_{\text{part}}(x) = \big[C'(x) + C(x)\sin(x)\big]e^{-\cos(x)}$$
et on peut écrire l'équation avec second membre pour y_{part} :
$$\begin{aligned} [C'(x) + C(x)\sin(x)]\, e^{-\cos(x)} - \sin(x)C(x)e^{-\cos(x)} &= 4\sin(x)e^{\cos(x)} \\ \Leftrightarrow \qquad C'(x)e^{-\cos(x)} &= 4\sin(x)e^{\cos(x)}\ . \end{aligned}$$

Par conséquent $C'(x) = 4\sin(x)e^{2\cos(x)}$ et en intégrant on trouve $C(x) = -2e^{2\cos(x)}$. Notons qu'une éventuelle constante d'intégration de cette étape serait combinée avec la constante de la solution de l'équation homogène, donc il n'y a pas besoin d'ajouter une constante ici.

Ainsi $y_{\text{part}}(x) = -2e^{\cos(x)}$ et la solution générale de l'équation différentielle complète est
$$y = y_{\text{hom}} + y_{\text{part}} = Ce^{-\cos(x)} - 2e^{\cos(x)}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$
La condition initiale $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ implique que $C - 2 = 1$, d'où $C = 3$. La solution pour la condition initiale donnée est donc
$$y(x) = 3e^{-\cos(x)} - 2e^{\cos(x)}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

ii) A cause du logarithme dans l'équation, on a $x > 0$, et donc l'équation donnée est équivalente à
$$y' - \frac{1}{x}\, y = 4\ln(x)\,.$$
Comme solution de l'équation homogène, on trouve
$$y_{\text{hom}}(x) = Ce^{-\int -\frac{1}{x}\,dx} = Ce^{\ln(x)} = C\,x\,, \qquad x > 0,\ C \in \mathbb{R}.$$
Par la méthode de variation de la constante, on pose $y_{\text{part}}(x) = C(x)\,x$ et en mettant cette expression dans l'équation initiale on trouve que $C'(x) = \frac{4\ln(x)}{x}$. En intégrant on trouve
$$C(x) = 4\int \frac{\ln(x)}{x}\,dx = 4\int \big[\ln(x)\big]'\ln(x)\,dx = 2\ln(x)^2\ .$$
Il n'y a de nouveau pas de constante d'intégration à cette étape. Par conséquent
$$y_{\text{part}}(x) = 2x\ln(x)^2,$$
d'où la solution générale
$$y = y_{\text{hom}} + y_{\text{part}} = \big(C + 2\ln(x)^2\big)\,x\,, \qquad x \in]0, \infty[.$$
La solution pour la condition initiale $y(1) = 1$ est
$$y(x) = \big(1 + 2\ln(x)^2\big)\,x\,, \qquad x \in]0, \infty[.$$

Exercice 2.

Dans cet exercice il s'agit d'équations différentielles linéaires du premier ordre. D'après le cours toute solution $y(x)$ de ce type d'équation s'écrit
$$y(x) = y_{\text{hom}}(x) + y_{\text{part}}(x)\,,$$
où $y_{\text{hom}}(x)$ est la solution générale de l'équation homogène associée (i.e. sans second membre) et $y_{\text{part}}(x)$ est une solution particulière de l'équation initiale.

i) La solution générale de l'équation homogène s'obtient en séparant les variables (cf. cours). On obtient

$$y_{\text{hom}}(x) = Ce^{3x}, \qquad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

Comme la fonction $p(x) = -3$ est constante, on peut utiliser la méthode des coefficients indéterminés pour chercher une solution particulière. Cette méthode est souvent plus rapide que la méthode de variation de la constante.

Ici $q(x) = 10\cos(x) + 2e^{3x}$ et $q'(x) = -10\sin(x) + 6e^{3x}$. Les termes à inclure dans y_{part} sont donc $\cos(x)$ et $\sin(x)$ qui ne sont pas solutions de l'équation homogène, ainsi que xe^{3x} car e^{3x} *est* solution de l'équation homogène. Donc on pose

$$y_{\text{part}}(x) = A\cos(x) + B\sin(x) + Dxe^{3x}.$$

En reportant cette expression et sa dérivée dans l'équation complète, on obtient

$$\begin{aligned}\left[A\cos(x) + B\sin(x) + Dxe^{3x}\right]' - 3\big(A\cos(x) + B\sin(x) + Dxe^{3x}\big) &= 10\cos(x) + 2e^{3x} \\ \Leftrightarrow \quad (B - 3A)\cos(x) - (A + 3B)\sin(x) + De^{3x} &= 10\cos(x) + 2e^{3x},\end{aligned}$$

c'est-à-dire,

$$B - 3A = 10, \qquad A + 3B = 0 \qquad \text{et} \qquad D = 2.$$

On a donc finalement $A = -3$, $B = 1$, $D = 2$ et ainsi

$$y_{\text{part}}(x) = -3\cos(x) + \sin(x) + 2x\,e^{3x}.$$

Par conséquent

$$y(x) = y_{\text{hom}}(x) + y_{\text{part}}(x) = Ce^{3x} - 3\cos(x) + \sin(x) + 2x\,e^{3x}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

De plus on a $C = 3$ pour la condition initiale $y(0) = 0$. Donc la solution est

$$y(x) = 3e^{3x} - 3\cos(x) + \sin(x) + 2x\,e^{3x}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

ii) On a $y_{\text{hom}}(x) = Ce^{-x}$ avec $C \in \mathbb{R}$. Pour trouver y_{part}, on utilise encore une fois la méthode des coefficients indéterminés. Les dérivées de $q(x) = x^3$ sont constituées des termes $1, x, x^2$ dont aucun n'est solution de l'équation homogène, de même que $q(x)$ lui-même. Ainsi $y_{\text{part}}(x) = Ax^3 + Bx^2 + Dx + E$ est un polynôme de degré 3 et on a

$$y'_{\text{part}} + y_{\text{part}} = Ax^3 + (3A + B)x^2 + (2B + D)x + D + E = x^3,$$

ce qui mène à

$$\begin{aligned}&A = 1, \quad 3A + B = 0, \quad 2B + D = 0 \quad \text{et} \quad D + E = 0 \\ &\qquad\qquad \Leftrightarrow \quad A = 1, \quad B = -3, \quad D = 6 \quad \text{et} \quad E = -6.\end{aligned}$$

Ainsi $y_{\text{part}}(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 6$ et

$$y = y_{\text{hom}} + y_{\text{part}} = Ce^{-x} + x^3 - 3x^2 + 6x - 6, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Pour la condition initiale $y(0) = -2$, on obtient $C = 4$ si bien que la solution est

$$y(x) = 4e^{-x} + x^3 - 3x^2 + 6x - 6, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3. (V/F : Équations différentielles linéaires du premier ordre)

Q1 : Soit $y(x)$ une solution d'une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre sur un intervalle ouvert I. Alors pour toute constante $C \in \mathbb{R}$, la fonction $y_1(x) = y(x) + C$ est solution de cette même équation différentielle sur l'intervalle I.

Réponse : faux. *Contre-exemple : L'équation $y' - y = 0$ est une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre sur $I = \mathbb{R}$. La fonction $y(x) = \exp(x)$ est une solution de cette équation, mais la fonction $y_1(x) = y(x) + 1 = \exp(x) + 1$ n'est pas solution, car $y_1'(x) - y_1(x) = -1 \neq 0$.*

Q2 : Soient $y_1(x)$ et $y_2(x)$ deux solutions d'une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre sur un intervalle ouvert I. Alors la différence $y(x) = y_1(x) - y_2(x)$ est solution de cette même équation différentielle sur l'intervalle I.

Réponse : vrai. *Une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre est de la forme $y' + p(x)y = 0$. Avec $y(x) = y_1(x) - y_2(x)$ on trouve*

$$\begin{aligned} y'(x) + p(x)y(x) &= (y_1'(x) - y_2'(x)) + p(x)\,(y_1(x) - y_2(x)) \\ &= [y_1'(x) + p(x)y_1(x)] - [y_2'(x) + p(x)y_2(x)] \\ &= 0 - 0 = 0\,. \end{aligned}$$

(Remarque: Avec la notation compacte du cours on a $Ly_1 = 0$ et $Ly_2 = 0$ et donc, puisque L est une application linéaire, $L(y_1 - y_2) = Ly_1 - Ly_2 = 0 - 0 = 0$.)

Q3 : Soient $y_1(x)$ et $y_2(x)$ deux solutions d'une équation différentielle linéaire du premier ordre sur un intervalle ouvert I. Alors la différence $y(x) = y_1(x) - y_2(x)$ est solution de cette même équation différentielle sur l'intervalle I.

Réponse : faux. *Une équation différentielle linéaire du premier ordre est de la forme $y' + p(x)y = q(x)$. Avec $y(x) = y_1(x) - y_2(x)$ on trouve*

$$\begin{aligned} y'(x) + p(x)y(x) &= (y_1'(x) - y_2'(x)) + p(x)\,(y_1(x) - y_2(x)) \\ &= [y_1'(x) + p(x)y_1(x)] - [y_2'(x) + p(x)y_2(x)] \\ &= q(x) - q(x) = 0\,. \end{aligned}$$

Donc $y(x)$ n'est pas solution de l'équation si $q(x)$ n'est pas identiquement zéro. (Remarque: Avec la notation compacte du cours on a $Ly_1 = q$ et $Ly_2 = q$ et donc, puisque L est une application linéaire, $L(y_1 - y_2) = Ly_1 - Ly_2 = q - q = 0 \neq q$.)

Exercice 4.

Pour résoudre ces équations homogènes on utilise la méthode avec l'équation caractéristique proposée dans le cours (§1.5.2).

i) L'équation caractéristique $3\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$ admet les racines réelles $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = \frac{1}{3}$, d'où la solution générale

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{\frac{1}{3}x}\,, \qquad x, C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

ii) L'équation caractéristique $3\lambda^2 - 4\lambda + 2 = 0$ admet les racines complexes conjuguées $\lambda_{1,2} = \frac{1}{3}\left(2 \pm \sqrt{2}i\right)$, d'où la solution générale

$$y(x) = \left(C_1 \cos\left(\tfrac{\sqrt{2}x}{3}\right) + C_2 \sin\left(\tfrac{\sqrt{2}x}{3}\right)\right) e^{\frac{2}{3}x}\,, \qquad x, C_1, C_2 \in \mathbb{R}\ .$$

iii) L'équation caractéristique $3\lambda^2 - 4\lambda + \frac{4}{3} = 0$ admet la racine double $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{2}{3}$. Ainsi un terme de la solution générale est $y_1(x) = e^{\frac{2}{3}x}$ mais il faut en trouver un deuxième (comme c'est une équation du deuxième ordre, les solutions générales sont dans un espace vectoriel de dimension 2). On utilise la méthode de la variation de la constante, c.-à-d. on pose

$$y_2(x) = C(x)y_1(x)\,.$$

Comme

$$y_2{}'(x) = C'(x)y_1(x) + C(x)y_1{}'(x) = \big(C'(x) + \lambda C(x)\big)e^{\lambda x}$$
$$y_2{}''(x) = C''(x)y_1(x) + 2C'(x)y_1{}'(x) + C(x)y_1{}''(x) = \big(C''(x) + 2\lambda C'(x) + \lambda^2 C(x)\big)e^{\lambda x}\,,$$

l'équation différentielle pour y_2 s'écrit (en divisant par $e^{\lambda x}$)

$$3\big(C''(x) + 2\lambda C'(x) + \lambda^2 C(x)\big) - 4\big(C'(x) + \lambda C(x)\big) + \tfrac{4}{3}C(x) = 0$$
$$\Leftrightarrow \qquad 3C''(x) + (6\lambda - 4)C'(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad C''(x) = 0\,,$$

où on a d'abord utilisé que $3\lambda^2 - 4\lambda + \frac{4}{3} = 0$ et puis que $\lambda = -\frac{-4}{2\cdot 3} = \frac{2}{3}$. Ainsi $C(x) = x$ (on peut ignorer les constantes d'intégration) et donc $y_2(x) = x\,e^{\frac{2}{3}x}$, d'où la solution générale

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)\,e^{\frac{2}{3}x}\,, \qquad x, C_1, C_2 \in \mathbb{R}\ .$$

Exercice 5.

Ces équations différentielles sont non-homogènes. La solution générale est donc la somme de la solution générale de l'équation homogène associée (1ère étape de résolution) et d'une solution particulière de l'équation complète (2e étape).

i) L'équation caractéristique $\lambda^2 + 4 = 0$ admet les racines complexes $\lambda_{1,2} = \pm 2i$ si bien que la solution générale de l'équation homogène associée est

$$y_{\text{hom}}(x) = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)\ .$$

Cherchons une solution particulière par la méthode des coefficients indéterminés. Comme $q(x) = 3e^{2x}$ n'est pas solution de l'équation homogène et que toutes ses dérivées sont multiples de e^{2x}, on cherche une solution particulière de l'équation complète de la forme $y_{\text{part}} = Ae^{2x}$. Donc

$$y''_{\text{part}} + 4y_{\text{part}} = 3e^{2x} \qquad \Leftrightarrow \qquad (4A + 4A)e^{2x} = 3e^{2x}\ ,$$

c'est-à-dire $A = \frac{3}{8}$ et $y_{\text{part}}(x) = \frac{3}{8}e^{2x}$. La solution générale est donc

$$y(x) = y_{\text{hom}}(x) + y_{\text{part}}(x) = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x) + \tfrac{3}{8}e^{2x}\,, \qquad x, C_1, C_2 \in \mathbb{R}\ .$$

ii) Comme au point *i*), on a $y_{\text{hom}}(x) = C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x)$. Le membre de droite $q(x) = 5\cos(2x)$ est solution de l'équation homogène tandis $xq(x)$ ne l'est pas. On cherche donc un solution particulière de la forme

$$y_{\text{part}} = Ax\cos(2x) + Bx\sin(2x) \; .$$

En reportant cette expression dans l'équation complète, on obtient

$$\begin{gathered} y''_{\text{part}} + 4y_{\text{part}} = 5\cos(2x) \qquad \Leftrightarrow \\ 4(B - Ax)\cos(2x) - 4(A + Bx)\sin(2x) + 4Ax\cos(2x) + 4Bx\sin(2x) = 5\cos(2x) \\ \Leftrightarrow \qquad 4B\cos(2x) - 4A\sin(2x) = 5\cos(2x) \, , \end{gathered}$$

c'est-à-dire $A = 0$ et $B = \frac{5}{4}$. Ainsi $y_{\text{part}}(x) = \frac{5}{4}x\sin(2x)$ et la solution générale devient

$$y(x) = y_{\text{hom}}(x) + y_{\text{part}}(x) = C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x) + \tfrac{5}{4}x\sin(2x) \, , \qquad x, C_1, C_2 \in \mathbb{R} \; .$$

iii) Comme $\lambda^2+1 = 0$ admet les racines $\lambda_{1,2} = \pm i$, on trouve $y_{\text{hom}}(x) = C_1\cos(x)+C_2\sin(x)$. Cherchons une solution particulière de l'équation avec second membre par la méthode de la variation des constantes:

$$y_{\text{part}} = C_1(x)\cos(x) + C_2(x)\sin(x) \; .$$

Selon le cours, les dérivées C_1' et C_2' satisfont le système linéaire

$$\begin{cases} C_1'\cos(x) + C_2'\sin(x) = 0 \\ -C_1'\sin(x) + C_2'\cos(x) = \dfrac{1}{\sin(x)} \end{cases}$$

dont les solutions sont $C_1' = -1$ et $C_2' = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$. En intégrant ces expressions, on obtient $C_1 = -x$ et $C_2 = \ln(|\sin(x)|)$ et ainsi $y_{\text{part}}(x) = -x\cos(x) + \sin(x)\ln(|\sin(x)|)$.

La solution générale est donc

$$y(x) \;=\; y_{\text{hom}}(x) + y_{\text{part}}(x) \;=\; C_1\cos(x) + C_2\sin(x) \,-\, x\cos(x) + \sin(x)\ln(|\sin(x)|) \; ,$$

avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ et $x \in \,]0, \pi[$.

Remarque 1: $y(x)$ est solution de l'ED sur tous les intervalles $]k\pi, k\pi + \pi[$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Remarque 2: $y(x)$ peut être prolongée par continuité sur tout $\mathbb{R}$, mais elle ne sera pas de classe $C^2(\mathbb{R})$.

Exercice 6.

i) L'équation caractéristique de cette équation est $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$ qui admet les racines $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -3$.

Ainsi la solution générale de l'équation donnée est

$$y_{\text{hom}}(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{-3x} \; .$$

ii) <u>*Méthode 1:*</u> *Coefficients indéterminés*

Le membre de droite est $q(x) = 5\sin(3x)$ qui n'est pas solution de l'équation homogène associée. On cherche donc une solution particulière de la forme

$$y_{\text{part}} = A\sin(3x) + B\cos(3x) \ .$$

En reportant y_{part} dans l'équation différentielle on a

$$y''_{\text{part}} + 2y'_{\text{part}} - 3y_{\text{part}} = (-12A - 6B)\sin(3x) + (6A - 12B)\cos(3x) = 5\sin(3x) \ .$$

Les solutions du système linéaire

$$\begin{aligned} -12A - 6B &= 5 \\ 6A - 12B &= 0 \end{aligned}$$

sont $A = -\frac{1}{3}$ et $B = -\frac{1}{6}$, et la solution particulière de l'équation donnée est donc

$$y_{\text{part}}(x) = -\frac{1}{3}\sin(3x) - \frac{1}{6}\cos(3x) \ .$$

<u>*Méthode 2:*</u> *Variation des constantes*

On pose

$$y_{\text{part}} = C_1(x)\, e^x + C_2(x)\, e^{-3x}$$

D'après le cours, les fonctions C_1 et C_2 satisfont le système

$$\begin{cases} {C_1}'(x)e^x + {C_2}'(x)e^{-3x} = 0 \\ {C_1}'(x)e^x - 3{C_2}'(x)e^{-3x} = 5\sin(3x) \end{cases}$$

qui a comme solution

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} {C_1}'(x) \\ {C_2}'(x) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e^x & e^{-3x} \\ e^x & -3e^{-3x} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 5\sin(3x) \end{pmatrix} = \frac{e^{2x}}{4} \begin{pmatrix} 3e^{-3x} & e^{-3x} \\ e^x & -e^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 5\sin(3x) \end{pmatrix} \\ &= \frac{5}{4} \begin{pmatrix} e^{-x}\sin(3x) \\ -e^{3x}\sin(3x) \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Ainsi

$$C_1(x) = \frac{5}{4}\int e^{-x}\sin(3x)\, dx \qquad \text{et} \qquad C_2(x) = -\frac{5}{4}\int e^{3x}\sin(3x)\, dx \, . \tag{1}$$

On calcule $\int \sin(3x)e^{ax}\, dx$ en intégrant deux fois par parties :

$$\begin{aligned} \int \sin(3x)e^{ax}\, dx &= \frac{1}{a}\, e^{ax}\sin(3x) - \frac{1}{a}\int 3\cos(3x)e^{ax}\, dx \\ &= \frac{1}{a}\, e^{ax}\sin(3x) - \frac{3}{a^2}\, e^{ax}\cos(3x) - \frac{3}{a^2}\int 3\sin(3x)e^{ax}\, dx \, , \end{aligned}$$

d'où, en isolant l'intégrale,

$$\left(1 + \frac{9}{a^2}\right)\int \sin(3x)e^{ax}\, dx = \frac{1}{a}\, e^{ax}\sin(3x) - \frac{3}{a^2}\, e^{ax}\cos(3x) \, ,$$

et finalement

$$\int \sin(3x)e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+9}\Big(a\sin(3x) - 3\cos(3x)\Big)\,. \tag{2}$$

En combinant (**??**) et (**??**), on trouve

$$C_1(x) = -\frac{1}{8}\,e^{-x}\big(\sin(3x) + 3\cos(3x)\big) \qquad (a=-1)$$

$$C_2(x) = -\frac{5}{24}\,e^{3x}\big(\sin(3x) - \cos(3x)\big) \qquad (a=3)$$

et la solution particulière est donc

$$y_{\text{part}}(x) = -\frac{1}{3}\sin(3x) - \frac{1}{6}\cos(3x)\,.$$

iii) La solution générale de l'équation avec second membre est donc

$$y(x) = y_{\text{hom}}(x) + y_{\text{part}}(x) = C_1e^{x} + C_2e^{-3x} - \frac{1}{3}\sin(3x) - \frac{1}{6}\cos(3x)\,, \qquad x, C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Pour satisfaire les conditions initiales on doit avoir

$$y(0) = C_1 + C_2 - \frac{1}{6} = 1$$

$$y'(0) = C_1 - 3C_2 - 1 = -\frac{1}{2}$$

Les solutions de ce système sont $C_1 = 1$ et $C_2 = \frac{1}{6}$ si bien que

$$y(x) = e^{x} + \frac{1}{6}e^{-3x} - \frac{1}{3}\sin(3x) - \frac{1}{6}\cos(3x)\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Exercice 7.

i) L'équation caractéristique associée à l'équation homogène est $m\lambda^2 + \alpha\lambda + \varepsilon = 0$ qui a comme racines

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4m\varepsilon}}{2m} = -\frac{\alpha}{2m} \pm \frac{\sqrt{\alpha^2 - 4m\varepsilon}}{2m}$$

On doit distinguer trois cas selon le signe du discriminant:

- Si $\alpha^2 - 4m\varepsilon > 0$, c.-à-d. si $\alpha > 2\sqrt{m\varepsilon}$ la solution générale est

  $$y_{\text{hom}}(t) = C_1e^{\lambda_1 t} + C_2e^{\lambda_2 t} = \exp\!\big(-\tfrac{\alpha}{2m}\,t\big)\,\Big(C_1\exp\!\Big(\tfrac{\sqrt{\alpha^2-4m\varepsilon}}{2m}\,t\Big) + C_2\exp\!\Big(-\tfrac{\sqrt{\alpha^2-4m\varepsilon}}{2m}\,t\Big)\Big)$$

- Si $\alpha^2 - 4m\varepsilon < 0$, c.-à-d. si $0 < \alpha < 2\sqrt{m\varepsilon}$ les racines sont complexes

  $$\lambda_{1,2} = -\frac{\alpha}{2m} \pm i\,\frac{\sqrt{4m\varepsilon - \alpha^2}}{2m} = x \pm i\,y$$

  et donc la solution générale est

  $$\begin{aligned} y_{\text{hom}}(t) &= C_1\,e^{xt}\,\cos(yt) + C_2\,e^{xt}\,\sin(yt) \\ &= \exp\!\big(-\tfrac{\alpha}{2m}\,t\big)\,\Big(C_1\cos\!\Big(\tfrac{\sqrt{4m\varepsilon-\alpha^2}}{2m}\,t\Big) + C_2\sin\!\Big(\tfrac{\sqrt{4m\varepsilon-\alpha^2}}{2m}\,t\Big)\Big) \end{aligned}$$

- Si $\alpha = 2\sqrt{m\varepsilon}$, on a une racine double $\lambda = -\frac{\alpha}{2m} = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{m}}$. La solution générale de l'équation homogène est alors

$$y_{\text{hom}}(t) = C_1 e^{-\sqrt{\frac{\varepsilon}{m}}\,t} + C_2\,t\,e^{-\sqrt{\frac{\varepsilon}{m}}\,t} = (C_1 + C_2\,t)\,e^{-\sqrt{\frac{\varepsilon}{m}}\,t}$$

ii) Lorsque $t \to \infty$ on a $y_{\text{hom}}(t) \longrightarrow 0$ pour les trois cas. En effet,

- Dans le premier cas on a $\frac{\alpha}{2m} > \frac{\sqrt{\alpha^2-4m\varepsilon}}{2m} > 0$, si bien que le premier facteur de y_{hom} domine le terme croissant qui multiplie C_1.
- Evident car les fonctions cos et sin sont bornées.
- Comme la fonction exponentielle grandit plus vite que les polynômes, on a $t\,e^{-\lambda t} \longrightarrow 0$ pour tout $\lambda > 0$.

iii) On met y_{part} dans l'équation non-homogène. Comme

$$\begin{aligned} y_{\text{part}}{}'(t) &= A\omega\cos(\omega t) - B\omega\sin(\omega t) \\ y_{\text{part}}{}''(t) &= -A\omega^2\sin(\omega t) - B\omega^2\cos(\omega t) \end{aligned}$$

on trouve

$$\Big[-mA\omega^2 - \alpha B\omega + \varepsilon A\Big]\sin(\omega t) + \Big[-mB\omega^2 + \alpha A\omega + \varepsilon B\Big]\cos(\omega t) = H\sin(\omega t)$$

$$\Leftrightarrow \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon - m\omega^2 & -\alpha\omega \\ \alpha\omega & \varepsilon - m\omega^2 \end{pmatrix}}_{=:J} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(J)} \begin{pmatrix} \varepsilon - m\omega^2 & \alpha\omega \\ -\alpha\omega & \varepsilon - m\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(J)} \begin{pmatrix} H(\varepsilon - m\omega^2) \\ -H\alpha\omega \end{pmatrix}$$

et donc (on ne s'amuse pas à calculer $\det(J)\ldots$)

$$y_{\text{part}}(t) = \frac{H}{\det(J)}\Big((\varepsilon - m\omega^2)\sin(\omega t) - \alpha\omega\cos(\omega t)\Big)$$

iv) Comme la solution générale est $y(t) = y_{\text{hom}}(t) + y_{\text{part}}(t)$ et qu'on a $y_{\text{hom}}(t) \to 0$ lorsque $t \to \infty$, le mouvement de la masse s'approche de la solution particulière si le système est maintenu assez longtemps.