Exercice 1.

a) Vrai. On devine que la limite sera 0, mais montrons-le. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que
$$\left|\tfrac{1}{n}\right| = \left|\tfrac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \quad \text{pour tout } n \geq N.$$
On observe que la quantité à rendre plus petite que ε dans notre cas est $\left|(-1)^n \cdot \frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right|$, qui est exactement celle ci-dessus.

Une autre manière de procéder est d'utiliser le théorème des deux gendarmes, ainsi que le fait que
$$\lim_{n\to\infty} -\tfrac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} (-1 \cdot \tfrac{1}{n}) = -\lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} = 0$$
par des résultats du cours. Comme $-\frac{1}{n} \leq (-1)^n \cdot \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n}$, et que les deux suites $\left(-\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent toutes deux vers 0, on en conclut que $(-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ converge aussi vers 0.

b) Cette assertion est fausse. Prenons par exemple pour (x_n) la suite de terme général $x_n = (-1)^n$ qui n'a pas de limite, et pour (y_n) la suite identiquement nulle ($y_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) qui converge vers 0. Alors la suite $(x_n \cdot y_n)$ et telle que $x_n \cdot y_n = 0$ pour tout n, elle converge donc vers 0.

c) Faux. En effet, pour que l'égalité proposée soit vraie, il faut d'abord s'assurer que les deux suites (x_n) et (y_n) convergent (voir les hypothèses de la proposition sur la limite d'un produit). Par exemple, les suites de terme général $x_n = (-1)^n$ et $y_n = (-1)^{n+1}$ sont telles que ni $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, ni $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ n'existe, mais $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = -1$.

d) Cette assertion est fausse si on prend par exemple $x_n = -n$ et $y_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En effet, dans ce cas, la suite (x_n) tend vers $-\infty$ et la suite (y_n) converge vers 0. Cependant, la suite $(x_n \cdot y_n)$ est identiquement nulle et converge donc vers 0.

e) Cette assertion est fausse en considérant la suite de terme général $x_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 2 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$

f) Cette assertion est fausse en considérant la suite du premier point de cet exercice qui n'est pas monotone mais qui converge vers 0.

Exercice 2.

a) Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Comme la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, elle est bornée (résultat du cours). Il existe donc $A \in \mathbb{R}_+^*$ avec $|x_n| \leq A$. En fait, nous aurons besoin de $B := \max\{A; |y|\}$.

Comme $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2B}$ pour tout $n \geq N_1$. De même, comme $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2B}$ pour tout $n \geq N_2$. Avec $N := \max\{N_1, N_2\}$, on a pour tout $n \geq N$:
$$\begin{aligned} |x_n \cdot y_n - x \cdot y| &\overset{\text{idée!}}{=} |x_n \cdot y_n - x_n \cdot y + x_n \cdot y - x \cdot y| \leq |x_n \cdot y_n - x_n \cdot y| + |x_n \cdot y - x \cdot y| \\ &= |x_n| \cdot |y_n - y| + |x_n - x| \cdot |y| \leq B \cdot \frac{\varepsilon}{2B} + \frac{\varepsilon}{2B} \cdot B = \varepsilon \end{aligned}$$
Ainsi, la suite $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge bien vers $x \cdot y$.

b) La suite constante $(a)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a (résultat du cours), et par hypothèse, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x ; par **a)**, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} (a \cdot x_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} a \cdot \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a \cdot x$. De la même manière, $\lim\limits_{n\to+\infty} (b \cdot y_n) = b \cdot y$. Comme la limite d'une somme est la somme des limites (par un exercice précédent), on a
$$\lim_{n\to+\infty} (a \cdot x_n + b \cdot y_n) = \lim_{n\to+\infty} (a \cdot x_n) + \lim_{n\to+\infty} (b \cdot y_n) = a \cdot x + b \cdot y$$

Exercice 3. Supposons a un réel fixé et posons $P(k) : \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{n^k} = 0$.

- $P(1)$: Comme $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, on a par le cours (ou l'exercice précédent) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(a \cdot \frac{1}{n}\right) = a \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. $P(1)$ est donc vrai.
- $P(k) \implies P(k+1)$: La suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ converge par le cours, la suite $\left(\frac{a}{n^k}\right)$ converge par $P(k)$, et la limite d'un produit est le produit des limites (par le cours ou l'exercice précédent), donc
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a}{n^{k+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n^k} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \overset{P(k)}{=} 0 \cdot 0 = 0.$$

Donc $P(k)$ est vrai pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 4.

a) $x_2 - x_1 = 1 + \dfrac{1}{2} - 1 = \dfrac{1}{2}$, $x_4 - x_2 = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} - 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4}$, $x_8 - x_4 = \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{8}$.

b) $x_{2n} - x_n = \underbrace{\dfrac{1}{2n}}_{\geq 1/2n} + \underbrace{\dfrac{1}{2n-1}}_{\geq 1/2n} + \cdots + \underbrace{\dfrac{1}{n+1}}_{\geq 1/2n} \geq n \cdot \dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{2}$.

c) On a
$$\begin{aligned} 1 &> 1/2, \\ 1/2 &\geq 1/2, \\ 1/3 + 1/4 &> 1/4 + 1/4 = 1/2, \\ 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 &> 4 \cdot 1/8 = 1/2. \end{aligned}$$
En additionnant termes à termes les deux côtés de l'inégalité on obtient $x_8 \geq 4 \cdot 1/2 = 2$ et donc on peut prendre $K = 8$ (avec $1 \geq 1$ plutôt que $1 > 1/2$, on trouverait que l'on peut même prendre $K = 4$).

d) De la même façon, on peut prouver que $1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{2^t} > (t+1) \cdot \dfrac{1}{2}$ et donc si on veut que $x_n \geq 3$ pour tout $n \geq L$, il faut choisir $L = 2^t$ avec t tel que $(t+1) \cdot \frac{1}{2} \geq 3$. On prend donc $t = 5$ et $L = 2^5 = 32$. (Ou, avec $1 \geq 1$ comme ci-dessus, on trouve $L = 16$. On peut même prendre $L = 11$.)

e) Avec le même raisonnement on prend t tel que $(t+1) \cdot \frac{1}{2} \geq 4$. Ainsi on peut prendre $t = 7$ et $M = 2^7 = 128$. (Ou encore plus efficacement, $M = 64$, voire encore $M = 31$.)

f) Comme on l'a vu aux points précédents, il suffit de prendre $N = 2^t$ avec t tel que $(t+1) \cdot \frac{1}{2} \geq k$. Ainsi les x_n sont arbitrairement grands, et la suite (x_n) tend donc vers $+\infty$.

Exercice 5.

a)
- On pose $P(n) : a_n > 1$.
- $P(0)$: $\left.\begin{array}{ll} \text{Gauche.} & a_0 = \frac{6}{5} \\ \text{Droite.} & 1 \end{array}\right\}$ on a bien Gauche > Droite.
- $P(n) \implies P(n+1)$: on a $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n^2 + \frac{3}{4} \overset{P(n)}{>} \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$. Ceci montre que $P(n)$ est bien vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b)
- On pose $P(n) : a_n \leq 3$.
- $P(0)$: $\left.\begin{array}{ll} \text{Gauche.} & a_0 = \frac{6}{5} \\ \text{Droite.} & 3 \end{array}\right\}$ on a bien Gauche $\leq$ Droite.
- $P(n) \implies P(n+1)$: on a (astuce !) $a_{n+1} - 3 = \frac{1}{4}a_n^2 + \frac{3}{4} - 3 = \frac{1}{4}(a_n^2 - 9)$. Le tableau des signes de la fonction f donnée par $f(x) = \frac{1}{4}(x^2 - 9)$ est

		-3		3	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

  Par $P(n)$ *et* **a)**, on a $a_n \in]1; 3]$, et on déduit $\frac{1}{4}(a_n^2 - 9) \leq 0$. Ceci veut dire $a_{n+1} - 3 \leq 0$, c'est-à-dire $a_{n+1} \leq 3$ comme voulu.

Ceci montre que $P(n)$ est bien vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Attention : dans "$P(n) \implies P(n+1)$", le raisonnement direct "$\frac{1}{4}a_n^2 + \frac{3}{4} \overset{P(n)}{\leq} \frac{1}{4} \cdot 3^2 + \frac{3}{4} = 3$" est incomplet puisque si $a_n = -4$ par exemple, on a bien $a_n \leq 3$ mais pas $\frac{1}{4}a_n^2 + \frac{3}{4} \leq 3$.

c) Pour voir que $a_{n+1} \geq a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ou que $a_{n+1} \leq a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on évalue le signe de $a_{n+1} - a_n$:
$$a_{n+1} - a_n = \tfrac{1}{4}a_n^2 + \tfrac{3}{4} - a_n = \tfrac{1}{4}(a_n^2 - 4a_n + 3) = \tfrac{1}{4}(a_n - 1)(a_n - 3)$$
Comme $a_n - 1 > 0$ par **a)** et $a_n - 3 \leq 0$ par **b)**, on a $a_{n+1} - a_n \leq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire que la suite est décroissante.

d) Par **b)**, la suite est décroissante, et par **c)**, elle est minorée (par 1 — mais cela ne garantit pas encore que 1 est sa borne inférieure) ; donc la suite converge. Pour trouver la limite, il faut chercher les candidats : si $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = a$, alors $a = \frac{1}{4}a^2 + \frac{3}{4}$, c'est-à-dire $\frac{1}{4}(a-1)(a-3) = 0$; donc les candidats à la limite sont $a = 1$ et $a = 3$. Comme la suite commence en $a_0 < 3$ et décroit, elle converge nécessairement vers 1.

Exercice 6.

a) Séparons la démonstration en 2 parties. Première partie :

- On commence par poser $P(n) : u_n \geq 0$.
- $P(0)$: $\left.\begin{array}{ll} \text{Gauche.} & u_0 = 1 \\ \text{Droite.} & 0 \end{array}\right\}$ on a bien Gauche $\geq$ Droite.
- $P(n) \implies P(n+1)$: comme $u_n \geq 0$ par hypothèse, u_{n+1} est une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont positifs, donc $u_{n+1} \geq 0$ comme voulu.

Donc $P(n)$ est bien vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Deuxième partie (qui utilise la première !) :

- Posons maintenant $P'(n) : u_n \leq 2$.
- $P'(0)$: $\left.\begin{array}{ll} \text{Gauche.} & u_0 = 1 \\ \text{Droite.} & 2 \end{array}\right\}$ on a bien Gauche $\leq$ Droite.
- $P'(n) \implies P'(n+1)$: calculons

$$u_{n+1} - 2 = \frac{3u_n + 2}{u_n + 2} - 2 = \frac{u_n - 2}{u_n + 2}$$

Un petit tableau des signes de la fonction $f(x) = \frac{x-2}{x+2}$ donne

		-2		2	
$f(x)$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$

Comme $u_n \in [0; 2]$ par $P(n)$ (toujours vraie) *et* $P'(n)$ (hypothèse de récurrence), on a $u_{n+1} - 2 = f(u_n) \leq 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} \leq 2$, comme voulu.

On a démontré que $P'(n)$ est bien vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Calculons

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n + 2}{u_n + 2} - u_n = \frac{-u_n^2 + u_n + 2}{u_n + 2} = \frac{-(u_n - 2)(u_n + 1)}{u_n + 2}$$

Comme $0 \leq u_n \leq 2$ par **a)**, on a $u_{n+1} - u_n \geq 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: la suite est croissante.

c) La suite est croissante (par la partie **b)**) et majorée (par la partie **a)**) ; elle est donc convergente. Pour trouver les candidats à la limite, il faut résoudre $u = \frac{3u+2}{u+2}$, c'est-à-dire $-(u-2)(u+1) = 0$ (avec $u \neq -2$) ; les candidats sont donc $u = 2$ et $u = -1$. Comme la suite commence en $u_0 = 1$ et est croissante, on obtient $\lim_{n \to +\infty} u_n = 2$.

Exercice 7. Notons (x_n) la suite décroissante des aires des carrés où $x_1 = 1$, et (y_n) la suite décroissante des aires des disques où $y_1 = \frac{\pi}{4}$. La diagonale du deuxième carré vaut 1 et donc son côté vaut $\frac{\sqrt{2}}{2}$, ainsi $x_2 = \frac{1}{2}$ et $y_2 = \pi\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{\pi}{8}$. Etant donné x_n et y_n, calculons x_{n+1} et y_{n+1}. La diagonale du carré d'aire x_{n+1} vaut le diamètre du disque d'aire y_n c'est-à-dire $2\sqrt{\frac{y_n}{\pi}}$. Ainsi le côté du carré d'aire x_{n+1} vaut $2\sqrt{\frac{y_n}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{2y_n}{\pi}}$ et donc $x_{n+1} = \frac{2y_n}{\pi}$. Le rayon du disque d'aire y_{n+1} vaut la moitié du côté du carré d'aire x_{n+1}, c'est-à-dire $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2y_n}{\pi}}$. Ainsi $y_{n+1} = \pi \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2y_n}{\pi}}\right)^2 = \pi \cdot \frac{y_n}{2\pi} = \frac{y_n}{2}$. On obtient donc la définition suivante :

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{2y_n}{\pi} \\ y_{n+1} = \frac{y_n}{2}, \end{cases} \qquad \text{pour } n \geq 2 \text{ et avec } y_1 = \frac{\pi}{4}$$

On peut vérifier que x_2 et y_2 que calculés plus haut satisfont bien cette définition. Il est de plus possible de simplifier la définition de y_n : en effet, on a $y_n = 1/2 \cdot y_{n-1} = \cdots = (1/2)^{n-1} \cdot y_1$ et donc $x_{n+1} = (2/\pi) \cdot (1/2)^{n-1} \cdot y_1$. Pour une suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on utilise la notation

$$\sum_{k=k_0}^{+\infty} s_k := \lim_{n \to \infty} \sum_{k=k_0}^{n} s_k \qquad \text{et on rappelle que} \qquad \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Ainsi la somme des aires des carrés vaut

$$x_1 + \sum_{k=1}^{+\infty} x_{k+1} = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \cdot y_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2,$$

car $\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2$, et la somme des aires des disques vaut

$$\sum_{k=1}^{+\infty} y_k = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 8.

a) $b = \sqrt{\left(\frac{1}{3}a\right)^2 + \left(\frac{2}{3}a\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}a.$

b) Notons $a = 1 = b_0$, $b_1 = \frac{\sqrt{5}}{3}b_0 = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $b_2 = \frac{\sqrt{5}}{3}b_1 = b_1^2$, $b_3 = \frac{\sqrt{5}}{3}b_2 = b_1^3$. Ainsi on obtient $b_n = b_1^n$. Alors la longueur de la spirale vaut

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3} b_1^k = \frac{1}{3} \lim_{n\to+\infty} \frac{1-b_1^{n+1}}{1-b_1} \overset{|b_1|<1}{=} \frac{1}{3}\frac{1}{1-b_1} = \frac{1}{3-\sqrt{5}}$$

Bonus. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Comme $y \neq 0$, on peut poser $\varepsilon_1 := \frac{|y|}{2} > 0$, et comme $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $|y_n - y| < \varepsilon_1$ pour tout $n \geq N_1$. De plus, $|y| = |y - y_n + y_n| \leq |y - y_n| + |y_n|$ implique $|y| < \varepsilon_1 + |y_n|$, et donc $\frac{|y|}{2} = |y| - \varepsilon_1 < |y_n|$ pour tout $n \geq N_1$. Ceci nous permet d'écrire (en prévision de la conclusion !) :

$$\frac{1}{|y \cdot y_n|} = \frac{1}{|y| \cdot |y_n|} < \frac{2}{|y| \cdot |y|} = \frac{2}{|y|^2} \quad \text{pour tout } n \geq N_1$$

Considérons maintenant $\varepsilon_2 := \frac{|y|^2}{2\cdot(|x|+|y|)} \cdot \varepsilon > 0$. Comme $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n - x| < \varepsilon_2$ pour tout $n \geq N_2$, et comme $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, il existe $N_3 \in \mathbb{N}$ tel que $|y_n - y| < \varepsilon_2$ pour tout $n \geq N_3$. En prenant $N := \max\{N_1; N_2; N_3\}$, on déduit que pour tout $n \geq N$,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{x}{y}\right| &= \left|\frac{x_n \cdot y - x \cdot y_n}{y_n \cdot y}\right| \overset{\text{idée !}}{=} \left|\frac{x_n \cdot y - x \cdot y + x \cdot y - x \cdot y_n}{y_n \cdot y}\right| \\
&\leq \left|\frac{x_n \cdot y - x \cdot y}{y_n \cdot y}\right| + \left|\frac{x \cdot y - x \cdot y_n}{y_n \cdot y}\right| = \frac{1}{|y_n \cdot y|} \cdot (\,|y| \cdot |x_n - x| + |x| \cdot |y_n - y|\,) \\
&< \frac{2}{|y|^2} \cdot (\,|x| + |y|\,) \cdot \varepsilon_2 = \varepsilon
\end{aligned}$$

Ainsi la suite $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge bien vers $\frac{x}{y}$.