**Exercice 1.** Le problème est que $P(2)$ est utilisée implicitement, une proposition clairement fausse. En d'autres termes : l'initialisation devrait se faire avec $P(2)$.

En effet, récrivons la démonstration proposée de l'hérédité (dont l'idée sera utilisée plus tard en combinatoire) plus explicitement, en supposant que $P(2)$ est vraie(!). Notons $C$ un ensemble de $n+1$ crayons, et formons un sous-ensemble $A$ de $n$ crayons et un sous-ensemble $B$ de 2 crayons tels que $A \cup B = C$. En particulier, $A \cap B$ possède un crayon qui, par $P(n)$, est de la même couleur que tous les crayons de $A$ et, par $P(2)$, est de la même couleur que tous les crayons de $B$. Donc tous les crayons sont bien de la même couleur que celui de $A \cap B$ (remarquez l'importance de $P(2)$, ainsi que de la comparaison de la couleur de chaque crayon à celle du crayon de référence de $A \cap B$).

**Exercice 2.**

**a)** Posons $P(n) : n! \geq 2^{n-1}$

- $P(1)$ : D'un côté, on a $1! = 1$ ; de l'autre, on a $2^{1-1} = 1$. Comme $1 \geq 1$, le cas $n = 1$ est vrai. (Notons en passant que le cas $n = 0$ est vrai.)
- $P(n) \implies P(n+1)$ : Supposons $n! \geq 2^{n-1}$ vrai, et calculons :

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n! \overset{P(n)}{\geq} (n+1) \cdot 2^{n-1} \geq 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$$

  où la dernière inégalité vient du fait que pour $n \geq 1$, on a forcément $n+1 \geq 2$ (mais que cette inégalité n'est pas vraie pour $n = 0$). L'hérédité est vérifiée.

On a donc bien démontré $n! > 2^{n-1}$ pour tout entier $n \geq 1$.

**b)** Posons $P'(n) : n! > 2^n$.

- $P'(4)$ : D'un côté, on a $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ ; de l'autre, on a $2^4 = 16$. Comme $24 > 16$, le cas $n = 4$ est vrai. (Notons en passant que le cas $n = 3$ est faux.)
- $P'(n) \implies P'(n+1)$ : Supposons $n! > 2^n$ vrai, et calculons :

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n! \overset{P'(n)}{>} (n+1) \cdot 2^n > 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

  où la dernière étape vient du fait que pour $n \geq 4$, on a forcément $n+1 > 2$. L'hérédité est vérifiée.

On a donc bien démontré $n! > 2^n$ pour tout entier $n \geq 4$.

**Remarques.**

- En **a)**, l'hérédité serait délicate à vérifier si on commençait en $n = 0$ (puisque $n+1 = 1 \not\geq 2$). Néanmoins, $n! \geq 2^{n-1}$ est vrai pour $n = 0$, puis par **a)** pour $n \geq 1$, donc $n! \geq 2^{n-1}$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Si on avait démontré **b)** avant **a)**, on aurait pu conclure $n! > 2^n \geq 2^{n-1}$ pour tout entier $n \geq 4$. En testant les cas restants $n = 1, 2, 3$ :

$$1! \geq 2^0 \text{ (vrai)}, \quad 2! \geq 2^1 \text{ (vrai)}, \quad 3! \geq 2^2 \text{ (vrai)},$$

  on aurait aussi pu conclure que $n! \geq 2^{n-1}$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

**Exercice 3.**

**a)** On a $\dbinom{n}{0} = \dfrac{n!}{n! \cdot 0!} = 1$, $\dbinom{n}{1} = \dfrac{n!}{(n-1)! \cdot 1!} = n$, $\dbinom{n}{n-1} = \dfrac{n!}{1! \cdot (n-1)!} = n$ et $\dbinom{n}{n} = \dfrac{n!}{0! \cdot n!} = 1$.

**b)** Pour des entiers $n, k$ avec $n \geq k \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} + \frac{n!}{(n-k+1)! \cdot (k-1)!} \\ &= \frac{n! \cdot (n-k+1) + n! \cdot k}{(n-k+1)! \cdot k!} = \frac{n! \cdot (n+1) - n! \cdot k + n! \cdot k}{(n+1-k)! \cdot k!} = \binom{n+1}{k}.\end{aligned}$$

**c)** La formule du binôme de Newton a été démontrée dans le cours de 1[re] année mais avec les coefficients $\binom{n}{k}$ définis par récurrence. Dans cet exercice, la même notation est utilisée pour une définition explicite (il n'est plus nécessaire d'avoir calculé tous les termes précédents pour obtenir les suivants). Puisque les coefficients binomiaux définis dans cet exercice prennent les mêmes valeurs que ceux définis en 1[re] année pour $k = 0$ et $k = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ par **a)**, *et* qu'ils satisfont la même relation de récurrence par **b)**, les deux définitions, par récurrence et explicite, déterminent bien les mêmes coefficients.

La formule du binôme de Newton est donc aussi( !) démontrée avec les coefficients binomiaux définis ci-dessus.

**d)** Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ correspond au terme $a^k b^{n-k}$ dans le développement de $(a+b)^n$, c'est-à-dire de

$$\underbrace{(a+b)(a+b)\dots(a+b)}_{n \text{ termes}}.$$

On observe que pour obtenir *un* des termes $a^k b^{n-k}$, il faut choisir dans ces $n$ parenthèses $(a+b)$, exactement $k$ fois $a$ (et donc aussi exactement $n-k$ fois $b$). En énumérant toutes ces possibilités, on obtient exactement le nombre possible de combinaison de $k$ éléments dans un ensemble à $n$ éléments.

En appliquant la formule au cas $a = b = 1$, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

et donc le nombre de sous-ensembles d'un ensemble à $n$ élément est $2^n$ ; en effet, on doit additionner toutes les manières de prendre des sous-ensembles à 0 élément parmi $n$ avec toutes les manières de prendre des sous-ensembles à 1 élément parmi $n$, et ainsi de suite jusqu'à $n$.

**Exercice 4.** Au début de la section sur la démonstration par récurrence du cours de 1[re] année, la formule

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

est démontrée. Démontrons maintenant la formule de la somme des cubes, et pour cela, posons

$$P(n) : \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

- $P(1)$ : l'expression de gauche est $\sum_{k=1}^{1} 1^3 = 1$, et celle de droite est $\frac{1^2(1+1)^2}{4} = 1$. On a bien "gauche = droite", l'initialisation est établie.
- $P(n) \implies P(n+1)$ : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 \overset{P(n)}{=} \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$

$$= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2(n^2 + 4(n+1))}{4}$$
$$= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

c'est-à-dire $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2((n+1)+1)^2}{4}$, qui est bien $P(n+1)$. L'hérédité est établie.

Ces deux étapes montrent que $P(n)$ est bien vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En comparant les deux formules de somme, on obtient l'égalité étonnante

$$\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^3$$

**Exercice 5.** On calcule $\frac{1}{1\cdot2} = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{2\cdot3} = \frac{2}{3}$, $\frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{2\cdot3} + \frac{1}{3\cdot4} = \frac{3}{4}$, $\frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{2\cdot3} + \frac{1}{3\cdot4} + \frac{1}{4\cdot5} = \frac{4}{5}$. On conjecture naturellement( !)

$$P(n) : \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

que l'on démontre par récurrence comme suit.

- $P(1)$ : notre conjecture a été établie sur $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ et $P(4)$. En particulier, $P(1)$ est vraie.

- $P(n) \implies P(n+1)$ : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

$$\stackrel{P(n)}{=} \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)}$$
$$= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$$

c'est-à-dire $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n+1}{(n+1)+1}$, qui est bien $P(n+1)$. L'hérédité est établie.

Ces deux étapes montrent que la proposition $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (et n'est donc plus une conjecture !).

**Exercice 6.** Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Comme $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $n \geq N_1$. De même, comme $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $n \geq N_2$.
On pose $N := \max\{N_1, N_2\}$, et alors, pour tout $n \geq N$, on a

$$|x_n + y_n - (x+y)| = |x_n - x + y_n - y| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Ainsi, la suite $x_n + y_n$ converge bien vers $x + y$.

**Exercice 7.**

**a)** Pour montrer que $\left(\sqrt{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{a}$, on sera amené à évaluer $\left|\sqrt{x_n} - \sqrt{a}\right|$ sachant que $|x_n - a|$ est "petit". Comme suggéré par l'indication, on calcule

$$\left|\sqrt{x_n} - \sqrt{a}\right| \stackrel{\text{astuce !}}{=} \left|\sqrt{x_n} - \sqrt{a}\right| \cdot \frac{\sqrt{x_n} + \sqrt{a}}{\sqrt{x_n} + \sqrt{a}} = \frac{|x_n - a|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{a}} \leq \frac{|x_n - a|}{\sqrt{a}}$$

l'inégalité étant vraie car $\sqrt{x_n} \geq 0$ et $\sqrt{a} \neq 0$.
Passons à la démonstration, et posons $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n - a| < \sqrt{a} \cdot \varepsilon$ pour tout $n \geq N$, et donc

$$\left|\sqrt{x_n} - \sqrt{a}\right| \leq \frac{|x_n - a|}{\sqrt{a}} < \frac{\sqrt{a} \cdot \varepsilon}{\sqrt{a}} = \varepsilon$$

pour tout $n \geq N$, ce qui démontre bien que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}$ si $a \in \mathbb{R}_+^*$.

**b)** Supposons $a = 0$, et soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n - a| = x_n < \varepsilon^2$ pour tout $n \geq N$. Donc

$$\left|\sqrt{x_n} - \sqrt{a}\right| = \sqrt{x_n} < \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon$$

pour tout $n \geq N$, et on a bien $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}$ dans ce cas aussi.

**Exercice 8.**

**a)** $\displaystyle\left|\frac{1}{n!} - 0\right| < \frac{1}{100} \iff \frac{1}{n!} < \frac{1}{100} \iff n! > 100 \iff n > 5$, alors on peut choisir $N = 5$ car $5! = 120 > 100$.

**b)** $\displaystyle\left|\frac{3n}{4n+2} - \frac{3}{4}\right| = \left|\frac{-6}{16n+8}\right| < \frac{1}{100} \iff \frac{16n+8}{6} > 100 \iff 16n > 592 \iff n > 37$, ainsi on peut prendre $N = 37$.

**c)** $\displaystyle x_n \geq 1000 \iff \frac{2n^2}{n-1} \geq 1000 \iff 2n^2 - 1000n + 1000 \geq 0$. En étudiant le signe de la fonction quadratique $f(n) = 2n^2 - 1000n + 1000$, on se rend compte qu'elle est positive quand $n < 250 - 20\sqrt{155} \cong 1$ ou quand $n > 250 + 20\sqrt{155} \cong 499$, ainsi on peut choisir $N = 500$. Et alors pour tout $n \geq 500$ on aura $x_n \geq 1000$. Comme 1000 a été choisi arbitrairement, on pourrait prendre une constante plus grande et trouver un autre tel $N$. On a ainsi montré que la suite n'est pas bornée, et comme elle est croissante elle tend vers $+\infty$.

**Exercice 9.**

**a)** Soit $\varepsilon > 0$ fixé. On doit montrer l'existence de $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on a $\displaystyle\left|\frac{2n}{n^2+1} - 0\right| < \varepsilon \iff \frac{2n}{n^2+1} < \varepsilon \iff \varepsilon n^2 - 2n + \varepsilon > 0$. En étudiant le signe la fonction quadratique $f(n) = \varepsilon n^2 - 2n + \varepsilon$, on déduit que si $n > \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}+1}{\varepsilon}$ (on écarte la solution négative), alors $f(n) > 0$ et donc on a gagné. Ainsi on prendra $N = \lfloor \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}+1}{\varepsilon} \rfloor$. Notons encore que si $1 - \varepsilon^2 < 0$, alors notre $N$ n'est pas bien défini mais remarquons que dans ce cas, la fonction quadratique $f(n)$ est toujours positive et on peut prendre $N = 0$; ainsi $N = \begin{cases} \lfloor \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}+1}{\varepsilon} \rfloor & \text{si } 1 - \varepsilon^2 \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

**b)** Soit $\varepsilon > 0$ fixé. On doit montrer l'existence de $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on a $\left| \dfrac{2n^2+1}{7n^2+n+5} - \dfrac{2}{7} \right| < \varepsilon \iff \left| \dfrac{7(2n^2+1)}{7(7n^2+n+5)} - \dfrac{2(7n^2+n+5)}{7(7n^2+n+5)} \right| < \varepsilon \iff \left| \dfrac{-2n-3}{49n^2+7n+35} \right| < \varepsilon \iff \dfrac{2n+3}{49n^2+7n+35} < \varepsilon \iff 2n+3 < \varepsilon(49n^2+7n+35) \iff 49\varepsilon n^2 + (7\varepsilon - 2)n + 35\varepsilon - 3 > 0$. Ainsi en raisonnant comme au point précédent, on obtient

$$N = \begin{cases} \lfloor \frac{\sqrt{-6811\varepsilon^2+560\varepsilon+4}-7\varepsilon+2}{98\varepsilon} \rfloor & \text{si } -6811\varepsilon^2 + 560\varepsilon + 4 \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Exercice 10.** Grâce à cette inégalité on a $\frac{n^2}{2^n} \leq \frac{24n^2}{n^3} = \frac{24}{n}$ (pour $n$ entier et $n \geq 4$). Nous avons vu au cours que la suite $1/n$ tend vers 0 et la proposition sur le produit de limites nous dit que la suite $24 \cdot 1/n$ tend vers $24 \cdot 0 = 0$. Comme $0 \leq \frac{n^2}{2^n} \leq \frac{24}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on voit que la suite $(\frac{n^2}{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 (pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $N \in \mathbb{N}$ avec $|\frac{n^2}{2^n} - 0| = \frac{n^2}{2^n} \leq \frac{24}{n} = |\frac{24}{n} - 0| < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$).

**Exercice 11.** Remarquons que $x_{n+1} = \dfrac{x_n+4}{3} = \dfrac{x_n}{3} + \dfrac{4}{3}$. Ainsi $x_n$ est positif quelque soit $n$, et de plus si la la limite existe, alors elle sera plus grande que $\dfrac{4}{3}$. En faisant tendre $n$ vers l'infini dans la relation de récurrence et en observant les règles d'une proposition du cours, on a qu'un candidat $x$ à la limite doit satisfaire l'équation

$$x = \frac{x+4}{3},$$

dont la seule solution est $x = 2$. Montrons que c'est bien la limite de la suite, pour ceci estimons la différence

$$|x_{n+1} - x| = \left| \frac{x_n+4}{3} - \frac{x+4}{3} \right| = \left| \frac{x_n - x}{3} \right|.$$

On itère ce procédé et on trouve finalement que

$$|x_{n+1} - x| = \frac{|x_0 - x|}{3^{n+1}} = \frac{2}{3^{n+1}}.$$

Or pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N$ tel que $\dfrac{2}{3^{N+1}} < \varepsilon$. Alors pour tout $n \geq N+1$ on a

$$|x_n - x| \leq \frac{2}{3^n} \leq \frac{2}{3^{N+1}} < \varepsilon$$

ce qui montre bien que la suite $x_n$ tend vers 2.

**Exercice 12.** En raisonnant comme dans l'exercice précédent, on doit avoir que la limite, si elle existe, vérifie $x = \sqrt{1+x} \iff x^2 = 1+x \iff x^2 - x - 1 = 0$. Ainsi les candidats potentiels sont $\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, or comme tous les termes $x_n$ sont positifs, on peut écarter la solution négative et donc le seul candidat potentiel est $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Montrons que ce $x$ est bien la limite de la suite en estimant la différence

$$|x_{n+1} - x| = \left|\sqrt{1+x_n} - \sqrt{1+x}\right| = \left| \frac{(1+x_n) - (1+x)}{\sqrt{1+x_n} + \sqrt{1+x}} \right| = \left| \frac{x_n - x}{x_{n+1} + x} \right| \leq \frac{|x_n - x|}{2}$$

où on a utilisé dans la deuxième égalité la multiplication par $\frac{\sqrt{1+x_n}+\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x_n}+\sqrt{1+x}}$ et une identité remarquable pour enlever les racines, et dans la dernière inégalité on a utilisé le fait que $x_n$ et $x$ sont plus grands que $x_1 = 1$. Ainsi en itérant ce procédé on trouve finalement que

$$|x_{n+1} - x| = \frac{|x_0 - x|}{2^{n+1}} < \frac{2}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n}.$$

Comme $\frac{1}{2^n}$ est aussi petit que l'on veut (en prenant $N$ assez grand, et $n \geq N$), la suite $(x_n)$ converge vers $x$.