Exercice 1.

a) f_7	**c)** f_1	**e)** f_9	**g)** f_3	**i)** f_2	**k)** f_{11}
b) f_{12}	**d)** f_5	**f)** f_8	**h)** f_{10}	**j)** f_4	**l)** f_6

Exercice 2.

Si $n=0$:	AV en $x=\pm 3$,	AH en $y=0$.	
Si $n=1$:	AV en $x=3$,	AH en $y=0$,	trou en $P=\left(-3;-\frac{1}{6}\right)$.
Si $n=2$:	AV en $x=\pm 3$,	AH en $y=1$.	
Si $n=3$:	AV en $x=\pm 3$	AO en $y=x$.	
Si $n>3$:	AV en $x=\pm 3$,	pas d'AO.	

Exercice 3.

a) • VI(f) :

$$\begin{aligned} 2x^2 &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

$Z(f)$:

$$\begin{aligned} 4-x^2 &= 0 \\ (2-x)(2+x) &= 0 \\ x=2 \quad \text{ou} \quad x &= -2 \end{aligned}$$

Donc $\boxed{D(f)=\mathbb{R}\setminus\{0\}}$ et $Z(f)=\{-2;2\}$. Avec $D(f)$ établi, nous pouvons considérer pour la suite

$$f(x)=\frac{4-x^2}{2x} \qquad (\text{si } x\neq 0)$$

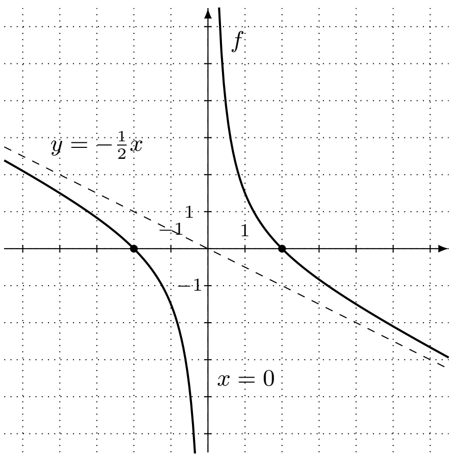
TDS :

		-2		0		2	
$-x^2+4$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
$2x$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$

• AV en $\boxed{x=0}$ car "$f(0)$" de la forme "$\frac{\text{nb. non nul}}{0}$" (voir TDS).
AO : L'équation fondamentale de la division euclidienne donne $-x^2+4=-\frac{1}{2}x\cdot 2x+4$, donc $f(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{4}{2x}=-\frac{1}{2}x+\frac{2}{x}$ (puisque le dénominateur est un monôme, on aurait aussi pu obtenir directement $f(x)=\frac{-x^2+4}{2x}=\frac{-x^2}{2x}+\frac{4}{2x}=-\frac{1}{2}x+\frac{2}{x}$). D'où $\boxed{y=-\frac{1}{2}x}$ est AO, et $\boxed{\delta(x)=\frac{2}{x}}$ avec $Z(\delta)=\emptyset$.
TDP :

		0	
2	$+$		$+$
x	$-$	0	$+$
$\delta(x)$	$-$	‖	$+$
$f(x)$/AO	sous	‖	sur

• Graphe (avec o.o. non définie) :



b) • VI(f) : $(3x-2)^2 = 0$, $3x - 2 = 0$, $x = \frac{2}{3}$ | $Z(f)$: $x^2 = 0$, $x = 0$

Donc $\boxed{D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\}}$ et $Z(f) = \{0\}$.

TDS :

		0		$\frac{2}{3}$	
x^2	$+$	0	$+$		$+$
$(3x-2)^2$	$+$		$+$	0	$+$
$f(x)$	$+$	0	$+$	‖	$+$

• AV en $\boxed{x = \frac{2}{3}}$ car "$f\left(\frac{2}{3}\right)$" de la forme "$\frac{\text{nb. non nul}}{0}$" (voir TDS).

AO (ici, AH en fait) : L'équation fondamentale de la division euclidienne donne

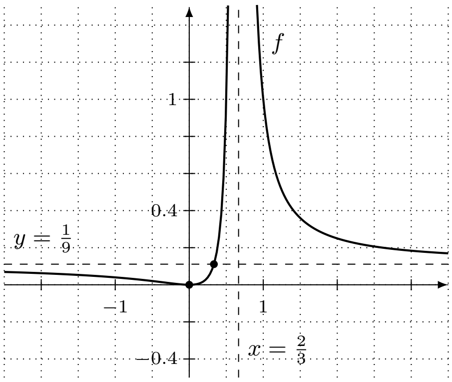
$$x^2 = \frac{1}{9} \cdot (9x^2 - 12x + 4) + \frac{4}{3}x - \frac{4}{9}$$

donc $f(x) = \frac{1}{9} + \frac{\frac{4}{3}x - \frac{4}{9}}{(3x-2)^2} = \frac{1}{9} + \frac{12x-4}{(9x-6)^2}$. D'où $\boxed{y = \frac{1}{9}}$ est AH, et $\boxed{\delta(x) = \frac{12x-4}{(9x-6)^2}}$ avec $Z(\delta) = \left\{\frac{1}{3}\right\}$.

TDP :

		$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$	
$12x-4$	$-$	0	$+$		$+$
$(9x-6)^2$	$+$		$+$	0	$+$
$\delta(x)$	$-$	0	$+$	‖	$+$
$f(x)$/AO	sous	χ	sur	‖	sur

• Graphe (avec $f(0) = 0$) :



c) • VI(f) : $(x-1)(x^2-1) = 0$, $(x-1)(x-1)(x+1) = 0$, $x = 1$ ou $x = -1$ | $Z(f)$: $(x+1)^3 = 0$, $x + 1 = 0$, $x = -1$

Donc $\boxed{D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}}$ et $Z(f) = \emptyset$ (car $x = -1$ est déjà VI). Avec $D(f)$ en tête, on peut considérer pour la suite

$$f(x) = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} \qquad (\text{si } x \neq -1)$$

TDS :

		-1		1	
$(x+1)^2$	$+$	0	$+$		$+$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$(x-1)^2$	$+$		$+$	0	$+$
$f(x)$	$-$	‖	$+$	‖	$+$

• Trou en $(-1; 0)$ (calculé avec la forme simplifiée de $f(x)$.)

AV en $\boxed{x = 1}$ car "$f(1)$" de la forme "$\frac{\text{nb. non nul}}{0}$" (voir TDS).

AO : L'équation fondamentale de la division euclidienne donne

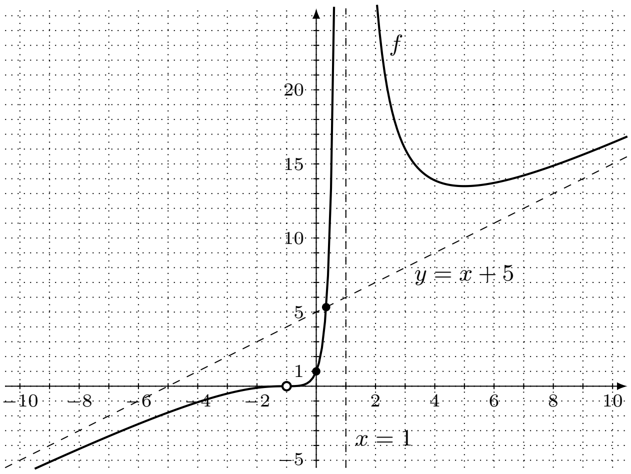
$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x+5)(x^2 - 2x + 1) + 12x - 4$$

donc $f(x) = x + 5 + \frac{12x-4}{(x-1)^2}$. D'où $\boxed{y = x + 5}$ est AO, et $\boxed{\delta(x) = \frac{12x-4}{(x-1)^2}}$ avec $Z(\delta) = \left\{\frac{1}{3}\right\}$.

TDP (il n'est pas nécessaire d'inclure la VI $x = -1$ dans le tableau si on garde en tête $D(f) = D(\delta)$; en effet, la courbe $y = \delta(x)$ n'est qu'un guide pour aider à la représentation du graphe de f)

		$\frac{1}{3}$		1	
$12x-4$	$-$	0	$+$		$+$
$(x-1)^2$	$+$		$+$	0	$+$
$\delta(x)$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$
$f(x)/\text{AO}$	sous	χ	sur	$\Vert$	sur

- Graphe (avec $f(0) = 1$) :



d) • VI(f) : $x^2 + 1$ n'est jamais nul.

$Z(f)$: $x^3 + 1 = 0$

$(x+1)(x^2 - x + 1) = 0$

$x = -1$ est le seul zéro (le Δ de $x^2 - x + 1$ est négatif).

Donc $\boxed{D(f) = \mathbb{R}}$ et $Z(f) = \{-1\}$.

TDS :

		-1	
$x+1$	$-$	0	$+$
x^2-x+1	$+$		$+$
x^2+1	$+$		$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$

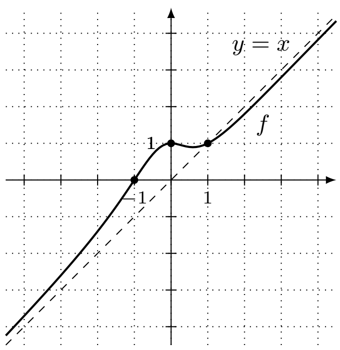
- Pas d'AV (parce que pas de VI).

AO : L'équation fondamentale de la division euclidienne donne $x^3 + 1 = x \cdot (x^2 + 1) - x + 1$, donc $f(x) = x + \frac{-x+1}{x^2+1}$. D'où $\boxed{y = x}$ est AO, et $\boxed{\delta(x) = \frac{-x+1}{x^2+1}}$ (avec $Z(\delta) = \{1\}$).

TDP :

		1	
$-x+1$	$+$	0	$-$
x^2+1	$+$		$+$
$\delta(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)/\text{AO}$	sur	χ	sous

- Graphe (avec $f(0) = 1$) :



Exercice 4.

- **Expression de f.** Comme il n'y a pas de "trou", on peut supposer que $f(x)$ est sous forme irréductible.
  Les deux AV d'équations $x = -3$ et $x = 2$ indiquent que le dénominateur de $f(x)$ aura au moins comme facteurs $(x+3)$ et $(x-2)$. Supposons donc que le dénominateur est bien $(x+3)(x-2)$.
  L'AH d'équation $y = -2$ donne alors $f(x) = -2 + \frac{r(x)}{(x+3)(x-2)}$ où $r(x) = ax + b$ (le degré du numérateur de $\delta(x)$ est nécessairement strictement inférieur au degré du diviseur).
  Donc $f(x) = \frac{-2x^2-2x+12+ax+b}{x^2+x-6}$. Comme $f(0) = 0$, le numérateur de $f(x)$ évalué en 0 est nul, et alors $b = -12$.
  Avec $f(x) = \frac{-2x^2-2x+ax}{x^2+x-6} = \frac{x(-2x-2+a)}{x^2+x-6}$ et le fait que f n'a qu'un seul zéro, on déduit $a = 2$ et
  $$f(x) = \frac{-2x^2}{(x+3)(x-2)}$$
  Une étude succincte du signe de $f(x)$ (par exemple, on remarque que $f(x)$ est négatif si $x < -3$, puis, au vu du degré de chacun de ses facteurs, $f(x)$ change de signe en $x = -3$, en $x = 2$, mais pas en $x = 0$) peut confirmer que le graphe donné correspond bien à cette expression.
- **Expression de g.** Comme dans le cas précédent, on peut supposer que $g(x)$ est sous forme irréductible.
  Les deux AV d'équations $x = -2$ et $x = 0$ suggèrent que le dénominateur est $x(x+2)$.
  L'AO d'équation $y = x$ mène alors à $g(x) = x + \frac{r(x)}{x(x+2)}$ où $r(x) = ax + b$. Comme le graphe de g intersecte l'AO en $x = 1$, on a $r(1) = 0$, c'est-à-dire $b = -a$.
  Donc $g(x) = \frac{x^3+2x^2+ax-a}{x^2+2x}$. Avec $g(-1) = 1$, on obtient $\frac{1-2a}{-1} = 1$, soit $a = 1$, et alors
  $$g(x) = \frac{x^3+2x^2+x-1}{x^2+2x}$$
  Le numérateur de $g(x)$ n'est pas facilement factorisable par les méthodes que nous connaissons : nous ne vérifions pas plus loin cette expression (qui, par ailleurs, est bien l'expression de la fonction représentée !).

Exercice 5. L'ensemble $S := \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$ est majoré par $2 \in \mathbb{Q}$ car pour tout $y \in S$, on a $y \leq \sqrt{2} < 2 \in \mathbb{Q}$ (en effet, si $\sqrt{2} < y$, alors $2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} < \sqrt{2} \cdot y < y \cdot y = y^2$, c'est-à-dire $y \notin S$). Voyons que $\sqrt{2}$ est bien la borne supérieure de S (comme $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, on aura gagné).
Supposons par contradiction que S possède une borne supérieure b avec $b < \sqrt{2}$ (pour l'exercice, on espère trouver un tel $b \in \mathbb{Q}$). Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $b < r < \sqrt{2}$. Cependant, cette dernière inégalité signifie que $r \in S$ or cela n'est pas possible car b était supposé être une borne supérieure, et donc en particulier un majorant de S.

Exercice 6. Montrons tout d'abord que l'intervalle $]a;b[$ contient un nombre infini de rationnels. Supposons par contradiction que ce n'est pas le cas. Par conséquent, nous pouvons écrire $]a;b[\cap\mathbb{Q} = \{r_1, \ldots, r_n\}$ avec la propriété que $a < r_1 < \cdots < r_2 < b$. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe un nombre $q \in \mathbb{Q}$ tel que $a < q < r_1$. On arrive donc à la contradiction que $q \in]a;b[\cap\mathbb{Q}$ mais pourtant $q \notin \{r_1, \ldots, r_n\}$. Ainsi notre hypothèse de départ est fausse et donc $]a;b[$ contient une infinité de rationnels.
Étant donné qu'entre deux rationnels, il y a toujours un irrationnel (par exemple, si $a, b \in \mathbb{Q}$ avec $a < b$, alors $r = a + \frac{\sqrt{2}}{2}(b-a)$ est un irrationel strictement compris entre a et b), on conclut qu'il y a également une infinité d'irrationels.

Exercice 7.

a) Faux car $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0 \in \mathbb{Q}$.

b) Faux car $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \in \mathbb{Q}$.

c) Vrai, soient $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ deux rationnels alors $\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) = \frac{ad+bc}{2bd} \in \mathbb{Q}$.

d) Faux car $\frac{1}{2}(\sqrt{2} + (-\sqrt{2})) = 0 \in \mathbb{Q}$.

e) Cette assertion est vraie. Supposons le contraire et soit n un entier premier tel que $\sqrt{n} = \frac{p}{q}$, fraction irréductible (c'est-à-dire que p et q sont premiers entre eux). En élevant cette égalité au carré on a $nq^2 = p^2$; donc n divise p^2 et figure forcément dans la décomposition en facteurs premiers de p : $p = np'$. Ceci implique $nq^2 = n^2p'^2$, $q^2 = np'^2$, et donc n divise q^2. Ainsi n figure forcément dans la decomposition en facteurs premiers de q, mais alors p et q ne sont pas premiers entre eux, ce qui est une contradiction.

f) Faux car $\sqrt[3]{8} = 2$.

Exercice 8. Raisonnons par récurrence sur n.

Initialisation. Pour $n=0$, la somme à gauche de l'égalité vaut 1 ; à droite de l'égalité, on a $\dfrac{1-x^{1+0}}{1-x}=1$ pour tout $x\neq 1$. L'égalité est donc vérifiée pour $n=0$.

Hérédité. Supposons que l'égalité est vraie pour n et montrons qu'elle est vraie pour $n+1$:

$$1+x+x^2+\cdots+x^n+x^{n+1}=(1+x+x^2+\cdots+x^n)+x^{n+1}\overset{\text{réc.}}{=}\frac{1-x^{n+1}}{1-x}+x^{n+1}=\frac{1-x^{n+1}+(1-x)x^{n+1}}{1-x}=\frac{1-x^{n+2}}{1-x}.$$

L'égalité est donc vraie pour $n+1$ si elle l'est pour n. Par récurrence, elle est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.
Notons que pour $n=1,2$, cette formule est déjà apparue dans le cadre de la factorisation de polynômes sous la forme :

$$(1-x)\cdot(1+x+x^2+\cdots+x^n+x^n)=1-x^{n+1}.$$

En prenant l'égalité que l'on vient de démontrer avec $x=\frac{1}{2}$, on obtient

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}=\frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}=2\cdot\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}=\frac{2^{n+1}-1}{2^n}=\frac{2^{n+1}}{2^n}-\frac{1}{2^n}=2-\frac{1}{2^n}<2.$$

Exercice 9. Appelons $P(n)$ l'égalité $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Initialisation. Montrons $P(0)$. D'un côté, $\sum_{k=0}^{0}k^2=0$. De l'autre, $\dfrac{0(0+1)(2\cdot 0+1)}{6}=0$. Les deux côtés valent 0, l'égalité est démontrée dans ce cas.

Hérédité. Supposons $P(n)$ vraie, et montrons $P(n+1)$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1}k^2&=\sum_{k=0}^{n}k^2+(n+1)^2\\&\overset{P(n)}{=}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2\\&=\frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}\\&=\frac{(n+1)(n(2n+1)+6(n+1))}{6}\\&=\frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}\\&=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.\end{aligned}$$

L'hérédité est démontrée, et $P(n)$ est donc vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.