

# Série 20

Pour le 28 février 2024

## Exercice 1

On donne une application linéaire  $\alpha : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  par sa matrice  $A$  relativement à la base canonique :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Détermine les valeurs propres éventuelles, les sous-espaces propres associés, ainsi qu'une base de ceux-ci.

Si  $\alpha$  est diagonalisable, déterminer la base dans laquelle la matrice est diagonale, puis la matrice de changement de base  $P$  et la matrice diagonale  $D$  relativement à cette nouvelle base. Calcule  $P^{-1}$  et vérifie que  $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$ .

## Exercice 2

On considère un espace vectoriel  $V$  de dimension 3 muni d'une base  $\mathcal{B} = (e_1; e_2; e_3)$ .

Soit l'application linéaire  $\alpha : V \rightarrow V$  de matrice  $A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$  relativement à la base  $\mathcal{B}$ .

- Déterminer les valeurs propres éventuelles de  $\alpha$ .
- Déterminer une base des espaces propres éventuels.
- $\alpha$  est-elle diagonalisable ?

## Exercice 3

Soit l'application linéaire  $\alpha : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$  définie par  $\alpha(P) = P - (x-1)P'$ , où  $P'$  est le polynôme dérivée de  $P$ .

- Le polynôme  $P = x^2 - 2x + 1$  est-il un vecteur propre de  $\alpha$  ? Si oui, donne la valeur propre correspondante ; sinon, explique pourquoi ce n'est pas un vecteur propre.
- $\alpha$  est-elle diagonalisable ? Si oui, donne la matrice diagonale et une base correspondante. Sinon, explique pourquoi ce n'est pas le cas.

**Exercice 4**

Détermine la nature géométrique des applications linéaires dans  $\mathbb{R}^3$  suivantes :

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{b) } \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

**Exercice 5**

Soit le plan muni d'un repère orthonormé.

Soit la matrice  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$  telle que  $a^2 + b^2 = 1$ . Prouve que  $A$  est la matrice d'une symétrie vectorielle orthogonale dont on donnera, en fonction de  $a$  et  $b$ , une équation cartésienne de l'axe de symétrie.

**Exercice 6**

Dans  $\mathbb{R}^3$ , on considère les sous-espaces vectoriels  $U = \langle (1; 2; 1) \rangle$  et  $W = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y\}$ . Soit  $p$  la projection sur  $W$  parallèlement à  $U$ . Déterminer la matrice de  $p$  relativement à la base canonique.

**Exercice 7**

Relativement à une base orthonormée  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^3$ , on note  $s$  la symétrie vectorielle orthogonale (par rapport à un plan) qui échange les vecteurs  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ .

- Donne une base orthonormée  $\mathcal{B}'$  relativement à laquelle la matrice de  $s$  est diagonale.
- Détermine la matrice de  $s$  relativement à  $\mathcal{B}$ .

**Exercices théoriques****Exercice 8**

On considère une application linéaire  $p : V \rightarrow V$  qui vérifie  $p \circ p = p$ . Montre que les seules valeurs propres possibles sont 0 et 1.

**Exercice 9**

On considère une application linéaire  $s : V \rightarrow V$  qui vérifie  $s \circ s = Id$ . Montre que les seules valeurs propres possibles sont  $-1$  et  $1$ .