Série 19

Pour le 21 février 2024

Exercice 1

Calcule l'inverse de la matrice suivante à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes. Ecris explicitement quelle opération tu effectues à chaque pas.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

Calcule toutes les solutions du système linéaire suivant en fonction des valeurs du paramètre a :

$$\begin{cases} x + ay = -1 \\ x - y = a. \end{cases}$$

Exercice 3

Calcule toutes les solutions du système linéaire suivant en fonction des valeurs du paramètre a :

$$\begin{cases} ax + (1-a)y + (1-a)z = a^2 \\ ax + (1+a)y + (1+a)z = a - a^2 \\ x + y + z = 1 - a. \end{cases}$$

Exercice 4

Soit $\alpha : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ l'application $\mathbb{C}$-linéaire définie par $\alpha(x, y, z) = (-3x+14y+2z, 3y, -3x+17y+2z)$. Calcule la matrice de α par rapport à la base canonique, puis toutes les valeurs propres et les espaces propres associés. Détermine la base dans laquelle la matrice est diagonale et donne la matrice diagonale.

Exercice 5

Soit $\alpha : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ l'application $\mathbb{C}$-linéaire définie par $\alpha(x, y, z) = (x + 2y, 3y, 2x - 4y + 2z)$. Calcule la matrice de α par rapport à la base canonique, puis toutes les valeurs propres et les espaces propres associés. Détermine la base dans laquelle la matrice est diagonale et donne la matrice diagonale.

Exercice 6

Vrai ou faux ? Justifie brièvement tes réponses, en construisant un contre-exemple élémentaire lorsque c'est possible.

a) Si A et B sont semblables, alors elles ont le même rang.

b) Si A et B ont même rang, alors elles sont semblables.

c) Les matrices de rotation d'angle $\pi/4$ et d'angle $\pi/8$ sont équivalentes.

d) Si A et I_n sont semblables, alors $A = I_n$.

Exercice 7

On considère la matrice à coefficients réels

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a & a \\ b & b & b \end{pmatrix}.$$

Calcule ses valeurs propres et les espaces propres correspondants en fonction des paramètres a et b.

Exercice 8

Soit V l'espace vectoriel réel, de dimension infinie, de toutes les suites de nombre réels $(x_1, x_2, x_3, \dots)$. On considère l'application $\alpha : V \to V$ définie par $\alpha(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, x_4, \dots)$. Montre que α est linéaire et calcule toutes les valeurs propres et les vecteurs propres de α.

Exercice 9

Calcule toutes les valeurs propres et tous les vecteurs propres de la matrice $A \in M_n(K)$ dont tous les coefficients valent 1.

Exercices théoriques

Exercice 10

Soit $\alpha, \beta : V \to V$ deux applications linéaires. Montre que $\alpha\beta$ et $\beta\alpha$ ont les mêmes valeurs propres (mais pas forcément les mêmes vecteurs propres).
Indication. Si v est vecteur propre de $\alpha\beta$, observe attentivement le vecteur $\beta(v)$...

Exercice 11

Les matrices scalaires. Une matrice est dite *scalaire* si elle est de la forme $aI_n = \mathrm{diag}(a, \ldots, a)$. Soit $\alpha : K^n \to K^n$ une application linéaire pour laquelle il existe une base de vecteurs propres $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ telle que $A = (\alpha)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ est scalaire, $A = aI_n$.

a) Montre que tout vecteur $v \in K^n$ est un vecteur propre de α pour la valeur propre a.

b) Montre que toute base de K^n est une base de vecteurs propres de α.

c) Montre que pour tout choix de base $\mathcal{C}$ de K^n, on a $(\alpha)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = aI_n$.

d) Déduis des parties précédentes que si $A \approx aI_n$, alors $A = aI_n$.

e) Démontre matriciellement, sans passer par les applications linéaires, que si $A \approx aI_n$, alors $A = aI_n$.