Algèbre linéaire avancée II
printemps 2026

Série 1 - Corrigé

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Exercice 1. (+) Soit R un anneau et $\alpha \in Z(R)$ un élément du centre de R. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rcl} \Phi\colon R[x] & \to & R \\ f(x) & \mapsto & f(\alpha) \end{array}$$

est un morphisme d'anneaux surjectif.

Soit $R = \mathbb{Z}^{2\times 2}$. Trouver $\alpha \in R$ (qui n'appartient donc pas à $Z(R)$) et deux polynômes $g, h \in R[x]$ tel que

$$g(\alpha) \cdot h(\alpha) \neq (g \cdot h)(\alpha).$$

Solution. *Pour montrer que Φ est un morphisme d'anneaux, il faut vérifier les trois propriétés suivantes.*

- $\Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g)$,
- $\Phi(f+g) = \Phi(f) + \Phi(g)$, *et*
- $\Phi(1) = 1$.

Les deux dernières propriétés se montrent sans difficulté. Montrons donc la première.

Soient $f(x) = \sum_i a_i x^i$ et $g(x) = \sum_j b_j x^j$, où les sommes sont finies et sur des entiers naturels. Alors $(fg)(x) = f(x)g(x) = \sum_{i,j} a_i b_j x^{i+j}$. On a donc $\Phi(fg) = \sum_{i,j} a_i b_j \alpha^{i+j}$. De plus,

$$\Phi(f)\Phi(g) = \sum_i a_i \alpha^i \sum_j b_j \alpha^j = \sum_{i,j} a_i \alpha^i b_j \alpha^j = \sum_{i,j} a_i b_j \alpha^{i+j},$$

où la dernière égalité vient de la commutativité de α avec les éléments de R.

La surjectivité de Φ découle du fait qu'un élément de R (polynôme constant) est envoyé sur lui-même.

Pour la deuxième partie de l'exercice on peut choisir par exemple $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot x$ *et* $g(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot x$ *pour obtenir* $g(\alpha) \cdot h(\alpha) \neq (g \cdot h)(\alpha)$. *On a donc montré qu'avec ce choix* Φ *n'est pas un morphisme d'anneaux.*

Exercice 2. Soient V et W deux espaces vectoriels sur $\mathbb{Z}_3$. On considère les bases

$$B_V = \{V', v_2, v_3, v_4\} \quad \text{et} \quad B_W = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$$

de V et W, respectivement.

Soit $f : V \to W$ une application linéaire définie par

$$\begin{aligned} f(V') &= 1u_1 + 0u_2 + 2u_3 + 2u_4, \\ f(v_2) &= 2u_1 + 1u_2 + 2u_3 + 1u_4, \\ f(v_3) &= 0u_1 + 2u_2 + 0u_3 + 2u_4, \\ f(v_4) &= 1u_1 + 2u_2 + 1u_3 + 2u_4. \end{aligned}$$

Déterminer une base du noyau $\ker(f)$ et une base de l'image $\operatorname{im}(f)$.

Solution. *Calcul.*

Exercice 3. Soit K un corps quelconque.

i) Une matrice $N \in K^{n \times n}$ est appelée *nilpotente* s'il existe un entier $k \in \mathbb{N}_{>0}$ tel que $N^k = 0$.

   Montrer que, pour une telle matrice nilpotente N, on a

$$(I + N)^{-1} = I - N + N^2 - N^3 + \cdots + (-1)^{k-1} N^{k-1}. \tag{1}$$

ii) En utilisant (1), donner une formule pour l'inverse R^{-1} d'une matrice $R \in K^{n \times n}$ triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale.

iii) Donner une formule pour l'inverse R^{-1} d'une matrice $R \in K^{n \times n}$ triangulaire supérieure dont tous les éléments diagonaux sont non nuls.

Solution. *i) Considérons la somme*

$$S := I - N + N^2 - \cdots + (-1)^{k-1} N^{k-1}.$$

On conclut en observant que $(I + N)S = S(I + N) = I$.

ii) Soit R *triangulaire supérieure avec* 1 *sur la diagonale. Alors*

$$R = I + N,$$

où N *est strictement triangulaire supérieure. Une matrice strictement triangulaire supérieure est nilpotente (en effet* $N^n = 0$*).*

On peut donc appliquer le point précédent :

$$R^{-1} = I - N + N^2 - \cdots + (-1)^{n-1} N^{n-1}.$$

iii) Soit maintenant R triangulaire supérieure avec éléments diagonaux non nuls. On écrit

$$R = D(I + N),$$

où

$$D = \operatorname{diag}(r_{11}, \ldots, r_{nn})$$

et

$$N = D^{-1}R - I.$$

Alors N est strictement triangulaire supérieure, donc nilpotente. On a

$$R^{-1} = (I + N)^{-1}D^{-1}.$$

Par la formule du point (1),

$$R^{-1} = \left(I - N + N^2 - \cdots + (-1)^{n-1}N^{n-1}\right) D^{-1}.$$

Cela donne une formule explicite pour l'inverse.

Exercice 4. Montrer que toute matrice $A \in K^{m\times n}$ peut être factorisée sous la forme

$$UAV = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où $k = \operatorname{rang}(A)$, et où $U \in K^{m\times m}$ et $V \in K^{n\times n}$ sont des matrices inversibles.
Indice : Commencer avec la forme échelonnée de A.

Solution. *Soit $A \in K^{m\times n}$ et soit $k = \operatorname{rang}(A)$.*

Il existe une matrice inversible $U \in K^{m\times m}$ telle que UA soit sous forme échelonnée réduite par lignes. Cette matrice s'obtient comme produit de matrices élémentaires correspondant aux opérations élémentaires sur les lignes.

Les colonnes pivots ne sont pas forcément les k premières. Pour les placer au début de la matrice, on multiplie à droite par une matrice de permutation inversible $P \in K^{n\times n}$.

Ainsi,

$$UAP = \begin{pmatrix} I_k & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où I_k est la matrice identité de taille k et $B \in K^{k\times(n-k)}$.

Nous voulons maintenant éliminer le bloc B. Pour cela, nous effectuons des opérations élémentaires sur les colonnes, ce qui correspond à multiplier à droite par une matrice inversible $V' \in K^{n\times n}$.

On choisit

$$V' = \begin{pmatrix} I_k & -B \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix}.$$

Alors

$$(UAP)V' = \begin{pmatrix} I_k & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_k & -B \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En posant $V = PV'$, qui est une matrice inversible (car produit de deux matrices inversibles), nous avons construit des matrices inversibles $U \in K^{m\times m}$ et $V \in K^{n\times n}$ telles que

$$UAV = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cela montre que toute matrice est équivalente, par multiplication à gauche et à droite par des matrices inversibles, à une matrice diagonale par blocs dont le nombre de 1 sur la diagonale est égal au rang de A.

Exercice 5. Soit R un anneau et $S \subseteq R$. Montrer que S est un anneau si les deux conditions suivantes sont vérifiées:

i) $1 \in S$,

ii) pour $s, t \in S$ alors $s \cdot t \in S$ et $s - t \in S$.

Solution. *Il faut vérifier les conditions (R1) à (R7) de la définition d'anneau en utilisant le fait que R est un anneau et les conditions i) et ii).*

Exercice 6. Pour cet exercice on travaille sur le corps fini $\mathbb{Z}_5$.

i) Trouver le polynôme $f(x) \in \mathbb{Z}_5[x]$ de degré au plus 4 tel que $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(2) = 4$, $f(3) = 0$, $f(4) = 4$. Établir un système d'équations linéaires correspondant.

ii) Soient les polynômes $f(x) = 3x^4 + 2x^2 + x + 1$ et $g(x) = 2x^2 + 3x + 2$ sur le corps $\mathbb{Z}_5$. Trouver deux polynômes q et r sur $\mathbb{Z}_5$ tels que :

- $f = qg + r$ et
- $deg(r) < deg(g)$.

Solution. *i) Soit le polynôme $f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$. On a que*

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ a + b + c + d + e &= 2 \\ a + 2b + 4c + 8d + 16e &= 4 \\ a + 3b + 9c + 27d + 81e &= 0 \\ a + 4b + 16c + 64d + 256e &= 4 \end{aligned}$$

On peut simplifier le système, vu que les coefficients sont dans $\mathbb{Z}_5$. On doit résoudre le système :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

On résout ce système d'équations sur $\mathbb{Z}_5$ et on trouve des valeurs pour a, b, c, d, e. Le système donne comme solution $a = 1, b = 0, c = 3, d = 4, e = 4$. Le polynôme $f(x)$ sera donc $f(x) = 1 + 3x^2 + 4x^3 + 4x^4$.

ii) On trouve que $3x^4 + 2x^2 + x + 1 = (2x^2 + 3x + 2)(4x^2 + 4x + 1) + 4$.
Les détails:

$$
\begin{array}{c|c}
3x^4 + 2x^2 + x + 1 & 2x^2 + 3x + 2 \\
\cline{2-2}
3x^4 + 2x^3 + 3x^2 & 4x^2 + \dots \\
\cline{1-1}
3x^3 + 4x^2 + x + 1 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|c}
3x^4 + 2x^2 + x + 1 & 2x^2 + 3x + 2 \\
\cline{2-2}
3x^4 + 2x^3 + 3x^2 & 4x^2 + 4x + \dots \\
\cline{1-1}
3x^3 + 4x^2 + x + 1 & \\
3x^3 + 2x^2 + 3x & \\
\cline{1-1}
2x^2 + 3x + 1 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|c}
3x^4 + 2x^2 + x + 1 & 2x^2 + 3x + 2 \\
\cline{2-2}
3x^4 + 2x^3 + 3x^2 & 4x^2 + 4x + 1 \\
\cline{1-1}
3x^3 + 4x^2 + x + 1 & \\
3x^3 + 2x^2 + 3x & \\
\cline{1-1}
2x^2 + 3x + 1 & \\
2x^2 + 3x + 2 & \\
\cline{1-1}
4 &
\end{array}
$$

Exercice 7. Soit K un corps. Montrer que le déterminant de $A = V_{r_0,\dots,r_n} \in K^{(n+1)\times(n+1)}$ est

$$\det(V_{r_0,\dots,r_n}) = \prod_{0 \le i < j \le n} (r_j - r_i).$$

Solution. *On montre que $\det(A) = \prod_{0\le i<j\le n}(x_j - x_i)$ par récurrence :*
Pour $n = 1$: $A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{pmatrix}$ et clairement $\det(A) = x_1 - x_0$.
Pour $n > 1$: On modifie A par l'addition de $(-x_0)$ fois la colonne j à la colonne

$j+1$ pour $j = n, n-1, \dots, 1$ et on obtient la matrice suivante

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_1 - x_0 & x_1^2 - x_1 x_0 & \dots & x_1^n - x_1^{n-1}x_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} - x_0 & x_{n-1}^2 - x_{n-1}x_0 & \dots & x_{n-1}^n - x_{n-1}^{n-1}x_0 \\ 1 & x_n - x_0 & x_n^2 - x_n x_0 & \dots & x_n^n - x_n^{n-1}x_0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_1 - x_0 & (x_1 - x_0)x_1 & \dots & (x_1 - x_0)x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} - x_0 & (x_{n-1} - x_0)x_{n-1} & \dots & (x_{n-1} - x_0)x_{n-1}^{n-1} \\ 1 & x_n - x_0 & (x_n - x_0)x_n & \dots & (x_n - x_0)x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Alors $\det(A) = \det(A') = \prod_{i=1}^n (x_i - x_0) \det(B')$ *où B' est la matrice donnée par*

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \dots & x_{n-1}^n \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Par l'hypothèse de récurrence, $\det(B') = \prod_{1 \le i < j \le n}(x_j - x_i)$*, et donc* $\det(A) = \det(A') = \prod_{0 \le i < j \le n}(x_j - x_i)$.

Exercice 8. Soit K un corps et $a_0, a_1, \dots, a_n \in K$ des éléments distincts ($n \ge 1$). On définit

$$c_k(x) = \frac{\prod_{i \neq k}(x - a_i)}{\prod_{i \neq k}(a_k - a_i)}$$

et soit $f(x) \in K[x]$ un polynôme tel que $\deg(f(x)) \le n$. Montrer que

$$f(x) = f(a_0)c_0(x) + f(a_1)c_1(x) + \dots + f(a_n)c_n(x).$$

Solution. *Remarquons que les polynômes c_k sont tous de degré n et valent 1 en $x = a_k$ et 0 en a_i pour $i \neq k$.*

On a donc, par construction des c_k, que la somme

$$g(x) := f(a_0)c_0(x) + f(a_1)c_1(x) + \dots + f(a_n)c_n(x)$$

est un polynôme de degré n vérifiant $g(a_k) = f(a_k)$ pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$.

De plus, d'après le cours, pour que deux polynômes de degrés n soient égaux il faut et il suffit qu'ils soient égaux en $n+1$ valeurs distinctes. D'où $g \equiv f$.

Exercice 9. Soit $f(x) \in \mathbb{R}[x] \setminus \{0\}$, $\deg(f) \ge 2$.

i) Si $\deg(f)$ est impair, alors $f(x)$ n'est pas irréductible.

ii) Si $f(x)$ est irréductible, alors $\deg(f) = 2$.

iii) Montrer comment ii) implique que chaque polynôme $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, $\deg(f) \geq 1$ possède une racine complexe.

Pour le point ii), utiliser le théorème fondamental de l'algèbre[1].

Solution. *Comme ii) implique i) il suffit de démontrer ii) et iii).*

ii) *Soit $f(x) = a_0 + \cdots a_n x^n \in \mathbb{R}[x]$ irréductible et soit $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine de f (théorème fondamental de l'algèbre). On a $\alpha \notin \mathbb{R}$ car $\deg(f) \geq 2$ et f est irréductible par hypothèse (f ne possède pas de racines réelles). Soit $\overline{\alpha}$ le conjugué complexe de α. Alors*

$$\begin{aligned} 0 &= \overline{0} \\ &= \overline{a_0 + a_1\alpha + \cdots a_n\alpha^n} \\ &= \overline{a_0} + \overline{a_1} \cdot \overline{\alpha} + \cdots \overline{a_n} \cdot \overline{\alpha}^n \\ &= a_0 + a_1 \cdot \overline{\alpha} + \cdots a_n \cdot \overline{\alpha}^n \\ &= f(\overline{\alpha}). \end{aligned}$$

Ainsi $(x-\alpha) \mid f(x)$ et $(x-\overline{\alpha}) \mid f(x)$ (sur $\mathbb{C}$). Les deux polynômes $(x-\alpha) \neq (x-\overline{\alpha})$ sont irréductibles, alors $g(x) = (x-\alpha)\cdot(x-\overline{\alpha}) \mid f(x)$. On observe que $g(x) \in \mathbb{R}[x]$. Il existe alors $h(x) \in \mathbb{C}[x]$ tel que $g(x)h(x) = f(x)$.

Si $g(x)$ ne divise pas $f(x)$ sur $\mathbb{R}$, alors la division avec reste donne $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$ où $q(x), r(x) \in \mathbb{R}[x]$ $r(x) \neq 0$ et $\deg(r) < \deg(g) = 2$. Mais $r = f - qg = gh - qg = (h-q)g$ et $r \neq 0$ implique $\deg(r) \geq \deg(g)$. Alors $g \mid f$ sur $\mathbb{R}$. Comme f est irréductible, on obtient $f(x) = a \cdot g(x)$ où $a \in \mathbb{R}$. On a montré que $\deg(f) = 2$.

iii) *Il faut montrer que l'assertion suivante*

Tout polynôme $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ irréductible satisfait $\deg(f) \leq 2$.

implique que tout polynôme réel de degré au moins 1 possède une racine complexe.

Soit $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ de degré au moins 1. On écrit la factorisation

$$f = a \prod_i p_i,$$

en polynômes irréductibles et unitaires $p_i \in \mathbb{R}[x]$ avec $a \in \mathbb{R}$. On supposant l'assertion, alors $\deg(p_i) \leq 2$ pour tout i. S'il existe un i tel que $\deg(p_i) = 1$, alors $p_i(x) = x - \alpha$ pour un $\alpha \in \mathbb{R}$ et f possède la racine $\alpha \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

Autrement $p_1(x) = x^2 + bx + c$ où $b, c \in \mathbb{R}$. Le polynôme p_1 possède les racines $\alpha_\pm = -b/2 \pm \sqrt{b^2/4 - c} \in \mathbb{C}$. Comme p_1 est un facteur dans la factorisation de f, ce sont des racines de f.

[1] Chaque polynôme $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, $\deg(f) \geq 1$ possède au moins une racine complexe.

Exercice 10. (*) Soit R un anneau.

i) Montrer que l'élément 1 est unique.

ii) Montrer qu'un élément inversible $r \in R^*$ n'est pas un diviseur de zéro.

iii) Montrer que deux polynômes

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \quad \text{et} \quad q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots \in R[x]$$

sont égaux si et seulement si $a_i = b_i$ pour tous i.

iv) Soit $R^{n \times n}$ l'anneau des matrices $n \times n$ sur R. Montrer que le centre de $R^{n \times n}$ est $Z(R^{n \times n}) = \{aI_n \colon a \in Z(R)\}$.

Solution.