Algèbre linéaire avancée II
printemps 2026

Série 1

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Exercice 1. (+) Soit R un anneau et $\alpha \in Z(R)$ un élément du centre de R. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rcl} \Phi\colon R[x] & \to & R \\ f(x) & \mapsto & f(\alpha) \end{array}$$

est un morphisme d'anneaux surjectif.

Soit $R = \mathbb{Z}^{2\times 2}$. Trouver $\alpha \in R$ (qui n'appartient donc pas à $Z(R)$) et deux polynômes $g, h \in R[x]$ tel que

$$g(\alpha) \cdot h(\alpha) \neq (g \cdot h)(\alpha).$$

Exercice 2. Soient V et W deux espaces vectoriels sur $\mathbb{Z}_3$. On considère les bases

$$B_V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \quad \text{et} \quad B_W = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$$

de V et W, respectivement.

Soit $f : V \to W$ une application linéaire définie par

$$\begin{aligned} f(v_1) &= 1u_1 + 0u_2 + 2u_3 + 2u_4, \\ f(v_2) &= 2u_1 + 1u_2 + 2u_3 + 1u_4, \\ f(v_3) &= 0u_1 + 2u_2 + 0u_3 + 2u_4, \\ f(v_4) &= 1u_1 + 2u_2 + 1u_3 + 2u_4. \end{aligned}$$

Déterminer une base du noyau $\ker(f)$ et une base de l'image $\mathrm{im}(f)$.

Exercice 3. Soit K un corps quelconque.

i) Une matrice $N \in K^{n\times n}$ est appelée *nilpotente* s'il existe un entier $k \in \mathbb{N}_{>0}$ tel que $N^k = 0$.

Montrer que, pour une telle matrice nilpotente N, on a

$$(I + N)^{-1} = I - N + N^2 - N^3 + \cdots + (-1)^{k-1}N^{k-1}. \tag{1}$$

ii) En utilisant (1), donner une formule pour l'inverse R^{-1} d'une matrice $R \in K^{n\times n}$ triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale.

iii) Donner une formule pour l'inverse R^{-1} d'une matrice $R \in K^{n\times n}$ triangulaire supérieure dont tous les éléments diagonaux sont non nuls.

Exercice 4. Montrer que toute matrice $A \in K^{m\times n}$ peut être factorisée sous la forme

$$UAV = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où $k = \text{rang}(A)$, et où $U \in K^{m\times m}$ et $V \in K^{n\times n}$ sont des matrices inversibles.
Indice : Commencer avec la forme échelonnée de A.

Exercice 5. Soit R un anneau et $S \subseteq R$. Montrer que S est un anneau si les deux conditions suivantes sont vérifiées:

i) $1 \in S$,

ii) pour $s, t \in S$ alors $s \cdot t \in S$ et $s - t \in S$.

Exercice 6. Pour cet exercice on travaille sur le corps fini $\mathbb{Z}_5$.

i) Trouver le polynôme $f(x) \in \mathbb{Z}_5[x]$ de degré au plus 4 tel que $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(2) = 4$, $f(3) = 0$, $f(4) = 4$. Établir un système d'équations linéaires correspondant.

ii) Soient les polynômes $f(x) = 3x^4 + 2x^2 + x + 1$ et $g(x) = 2x^2 + 3x + 2$ sur le corps $\mathbb{Z}_5$. Trouver deux polynômes q et r sur $\mathbb{Z}_5$ tels que :

- $f = qg + r$ et
- $deg(r) < deg(g)$.

Exercice 7. Soit K un corps. Montrer que le déterminant de $A = V_{r_0,\ldots,r_n} \in K^{(n+1)\times(n+1)}$ est

$$\det(V_{r_0,\ldots,r_n}) = \prod_{0\le i<j\le n} (r_j - r_i).$$

Exercice 8. Soit K un corps et $a_0, a_1, \ldots, a_n \in K$ des éléments distincts ($n \geq 1$). On définit

$$c_k(x) = \frac{\prod_{i\neq k}(x - a_i)}{\prod_{i\neq k}(a_k - a_i)}$$

et soit $f(x) \in K[x]$ un polynôme tel que $\deg(f(x)) \leq n$. Montrer que

$$f(x) = f(a_0)c_0(x) + f(a_1)c_1(x) + \cdots + f(a_n)c_n(x).$$

Exercice 9. Soit $f(x) \in \mathbb{R}[x] \setminus \{0\}$, $\deg(f) \geq 2$.

i) Si $\deg(f)$ est impair, alors $f(x)$ n'est pas irréductible.

ii) Si $f(x)$ est irréductible, alors $\deg(f) = 2$.

iii) Montrer comment ii) implique que chaque polynôme $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, $\deg(f) \geq 1$ possède une racine complexe.

Pour le point ii), utiliser le théorème fondamental de l'algèbre[1].

Exercice 10. (*) Soit R un anneau.

i) Montrer que l'élément 1 est unique.

ii) Montrer qu'un élément inversible $r \in R^*$ n'est pas un diviseur de zéro.

iii) Montrer que deux polynômes

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \quad \text{et} \quad q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots \in R[x]$$

sont égaux si et seulement si $a_i = b_i$ pour tous i.

iv) Soit $R^{n\times n}$ l'anneau des matrices $n \times n$ sur R. Montrer que le centre de $R^{n\times n}$ est $Z(R^{n\times n}) = \{aI_n \colon a \in Z(R)\}$.

[1] Chaque polynôme $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, $\deg(f) \geq 1$ possède au moins une racine complexe.