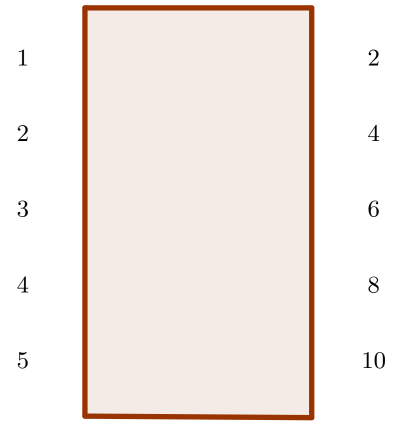
Cours Euler, Première année

Partie III: Les fonctions

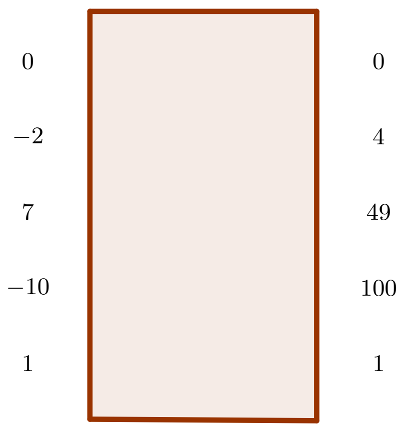
Jérôme Scherer

Introduction

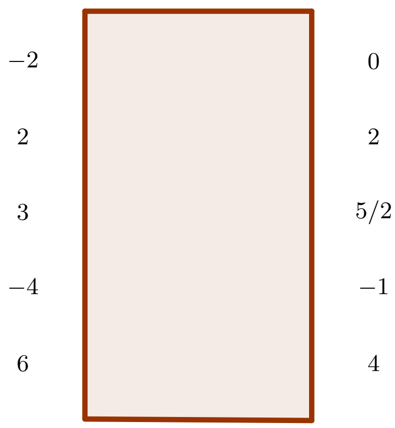
Dans cette troisième partie du cours c'est la notion de fonction autour de laquelle tout tournera. Une fonction se définit dans un cadre très général et peut se voir en quelque sorte comme une “machine” qui transforme des éléments donnés au départ en de nouveaux éléments. Regardons par exemple l'illustration suivante en considérant la boîte comme une machine qui transforme les nombres de gauche en ceux de droite, ligne par ligne :



On reconnaît alors la multiplication par 2, la machine est donc donnée par $n \mapsto 2 \cdot n$. De même, la machine illustrée ci-dessous est donné par $n \mapsto n^2$.



Et quelle est la formule correspondant à la machine suivante ?



Nous avons en fait déjà rencontré des fonctions en géométrie, sous le nom de transformations du plan, et les isométries du plan ont en particulier joué un rôle important. Ici nous nous pencherons surtout sur les fonctions réelles qui associent à tout nombre réel un nouveau nombre réel, comme les exemples numériques vus ci-dessus.

C'est pourquoi nous commençons par approfondir notre connaissance des nombres réels, donner quelques rappels sur l'écriture décimale et étudier les fractions de nombres réels. Nous verrons aussi que la racine carrée de 2 n'est pas un nombre rationnel. Si nous connaissons tous la notion de racine carrée, il n'en va peut-être pas de même pour les racines n-èmes grâce auxquelles nous pourrons introduire les puissances rationnelles (de la forme x^r où r est un nombre rationnel). Ainsi, même avant l'étude formelle des fonctions, nous voici déjà en train d'étudier certaines fonctions réelles particulières et importantes ! La racine cubique par exemple définit bien une fonction qui à chaque nombre réel x associe un nouveau nombre réel $\sqrt[3]{x}$.

En fait pour pouvoir étudier sérieusement les fonctions racines n-èmes, il faut des outils mathématiques qui dépassent le programme de l'école obligatoire. Il existe par contre des fonctions plus accessibles : les fonctions affines et les fonctions quadratiques. Celles-ci sont données par des formules polynomiales qui font intervenir la variable x et son carré x^2, mais rien d'autre ! Notre objectif sera donc de définir précisément ce que l'on entend par *rien d'autre* et nous serons amenés ainsi au calcul littéral et à la manipulation de polynômes. Ce ne sera qu'ensuite que nous étudierons les fonctions, en général d'abord, puis les cas particuliers mentionnés ci-dessus.

Un chapitre sur les équations, principalement affines et quadratiques, et un autre sur les relations clôt cette partie. La notion de relation généralise celle de fonction dans le sens où on permet par exemple à un élément au départ d'être associé à plusieurs éléments à l'arrivée. Cette idée est bien naturelle, mais il ne faut plus penser à une machine qui *transforme* un élément en un autre, mais plutôt à des *liens* qui sont créés entre certains éléments.

Le dernier chapitre est consacré à des éléments de logique qui viennent compléter le chapitre de théorie des ensembles que nous avons étudié au début de l'année scolaire. Nous y découvrirons de nouveaux types de raisonnement mathématique et tout spécialement la récurrence.

Chapitre 1

Les nombres réels

Nous retournons maintenant à l'étude des nombres, les nombres réels pour être précis. Nous démontrerons que le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels a des trous (que l'on bouche en construisant les nombres réels). Nous parlerons aussi de l'écriture décimale bien connue pour définir la notion d'approximation et l'écriture scientifique. Enfin nous effectuerons des calculs à l'aide de fractions de nombres réels.

1. Les lacunes de $\mathbb{Q}$

Il y a des nombres qui apparaissent naturellement dans l'étude de la géométrie du triangle et qui ne sont pas rationnels. Souvenons-nous du Théorème de Pythagore dont nous avons parlé le premier jour de cours. Un triangle rectangle dont les cathètes mesurent chacun 1 cm a une hypoténuse de longueur $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Nous allons voir tout-à-l'heure que ce nombre, et bien d'autres, n'est pas rationnel. Le premier lemme sera prouvé en montrant la contraposée. Rappelons que la contraposée de l'affirmation « A $\Rightarrow$ B » est l'affirmation équivalente « non B $\Rightarrow$ non A ». Pour préparer le calcul que nous allons faire, j'aimerais aussi rappeler la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition : $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ pour tous nombres (réels) a, b et c. Pour le moment tout est simple, mais souvent on peine à appliquer la *double distributivité*, comme dans le calcul suivant.

LEMME 1.1. *Soit n un nombre naturel. Si n^2 est pair, alors n est pair.*

DÉMONSTRATION. Nous démontrons la contraposée.

Grâce à ce préparatif, nous sommes prêts à prouver que la racine carrée de 2 n'est pas rationnelle. Ce résultat date de la Grèce antique, vers la fin V$^{\text{e}}$siècle av. J.-C. Nous démontrons ce théorème par l'absurde.

THÉORÈME 1.2. *Il n'existe pas de nombre rationnel x tel que $x^2 = 2$.*

On voit donc que l'on doit agrandir l'ensemble des nombres si on veut toutes les racines de nombres positifs. Il manque de nombreuses solutions d'équations polynomiales comme $x^2 = 2$ ou $2x^3 - 30x^2 + 162x - 350 = 0$ dont une solution est $\sqrt[3]{10+\sqrt{108}} - \sqrt[3]{-10+\sqrt{108}} + 5$... En fait, il manque aussi des nombres qui ne sont pas solutions d'équations polynomiales. Ces autres nombres réels sont dits *transcendants*. Le nombre π en est un, mais la démonstration a sa place dans un cours de niveau universitaire.

THÉORÈME 1.3 (Lambert, 1761). *Le nombre π n'est pas rationnel.*

Voici une première explication algébrique des « lacunes » de $\mathbb{Q}$. Ces explications seront détaillées en deuxième et troisième années du cours Euler.

REMARQUE 1.4. L'ensemble

$$A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} - \{0\}\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\}$$

est *minoré* dans $\mathbb{Q}$. Par exemple, $-5 \leq \frac{1}{n}$, pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0\}$. On dit que -5 est un *minorant* de l'ensemble A. Parmi les minorants de A, il en existe un qui est plus grand que tous les autres, c'est zéro. On l'appelle la *borne inférieure* de l'ensemble A.

Considérons maintenant l'ensemble $B = \{r \in \mathbb{Q} \mid r \geq 0, r^2 \geq 2\}$. Par exemple, 1,5 $\in B$ parce que $(1,5)^2 = 2,25 \geq 2$. Cet ensemble est minoré, par exemple par 1,4. Mais B n'a pas de borne inférieure dans $\mathbb{Q}$. C'est ce qu'on appelle une *lacune* de $\mathbb{Q}$. Par contre, dans $\mathbb{R}$, cette borne inférieure existe : il s'agit de $\sqrt{2}$. Lorsqu'on passe de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$ on "bouche" *toutes* les lacunes !

2. L'écriture décimale et les approximations

Tout nombre réel x admet une écriture décimale

$$n_k\, n_{k-1} \dots n_1\, n_0, n_{-1}\, n_{-2}\, n_{-3} \dots = n_k \cdot 10^k + n_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + n_1 \cdot 10^1 + n_0 \cdot 10^0 + n_{-1} \cdot \frac{1}{10^1} + n_{-2} \cdot \frac{1}{10^2} + n_{-3} \cdot \frac{1}{10^3} \dots$$

où k est un nombre naturel, les $n_i, i < k$, sont des nombres naturels entre 0 et 9 compris et n_k est un nombre naturel entre 1 et 9 compris, à moins que $k = 0$, auquel cas, n_k peut être nul. (Notons que nous avons a priori à faire à une somme infinie. Cette notion de somme infinie doit être définie, mais pour cela il faudra attendre la deuxième année du cours Euler.)

Inversement, toute écriture décimale de ce type détermine un nombre réel. Un nombre réel est rationnel si et seulement si son écriture décimale est périodique.

Les nombres réels qui ne sont pas rationnels sont dits *irrationnels*. L'ensemble des nombres réels irrationnels est noté $\mathbb{I}$.

Remarque 2.1. Rappelons qu'un nombre qui admet une écriture décimale finie (c'est-à-dire que le nombre de décimales non nulles est fini) est dit *nombre décimal*. Un nombre décimal admet toujours deux écritures décimales, l'une se terminant par $\bar{0}$ et l'autre par $\bar{9}$. La première est dite *écriture standard* et sauf indication contraire, c'est de cette écriture qu'on parlera. Par exemple,

$$5{,}4 = 5{,}4\bar{0} = 5{,}3\bar{9}$$

Dans la pratique, même si un nombre décimal admet une écriture périodique de période 1 et c'est le chiffre 0 qui se répète à l'infini, on n'écrit pas usuellement le nombre 1 comme $1{,}\bar{0}$. On omet le zéro périodique dans l'écriture décimale.

Comme il n'est pas possible de donner l'écriture décimale complète d'un nombre irrationnel (elle est infinie et non périodique), on choisit souvent de l'approximer par un nombre rationnel.

Définition 2.2. Soit r un nombre réel quelconque. La dernière décimale écrite dans l'*approximation au* 10^n*-ième* est la n-ième décimale du nombre réel r si la suivante est inférieure à 5, la n-ième décimale $+1$ si la suivante est supérieure ou égale à 5. De plus, on utilise toujours l'écriture standard des nombres pour approximer.

Par exemple, l'approximation au millième (on dit aussi à 0,001 près) de $\sqrt{2}$ vaut 1,414, alors que son approximation au millionième est 1,414214.

3. Le corps des nombres réels

Si l'ensemble $\mathbb{Z}$ forme ce que l'on appelle un anneau commutatif, les nombres rationnels forment un corps. C'est aussi le cas des nombres réels. On rappelle qu'un *anneau commutatif* est un ensemble A muni de deux opérations $+$ et $\cdot$ telles que :

— L'ensemble A muni de son addition est un *groupe abélien* :

(1) (Associativité) Pour tous $x, y, z \in A$, on a $(x+y)+z = x+(y+z)$.

(2) (Elément neutre) Il existe un élément $0 \in A$ tel que $x+0 = 0+x = x$.

(3) (Opposé) Pour tout $x \in A$, il existe un élément $-x \in A$ tel que

$$x + (-x) = 0 = -x + x$$

(4) (Commutativité) Pour tous $x, y \in A$, on a $x+y = y+x$.

— L'ensemble A muni de sa multiplication est un *monoïde commutatif* :

(1) (Associativité) Pour tous $x, y, z \in A$, on a $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

(2) (Elément neutre) Il existe un élément $1 \in A$ tel que $x \cdot 1 = x = 1 \cdot x$.

(3) (Commutativité) Pour tous $x, y \in R$, on a $x \cdot y = y \cdot x$.

— L'addition et la multiplication sont cohérentes (Distributivité)

Pour tous $x, y, z \in A$, $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Définition 3.1. Un *corps* est un anneau commutatif dans lequel tout élément non nul est inversible.

Ainsi les nombres naturels ne forment pas un anneau commutatif (il manque des opposés, $\mathbb{N}$ n'est pas même un groupe pour l'addition), les nombres entiers relatifs forment un anneau commutatif, mais pas un corps, alors que $\mathbb{Q}$ est un corps. Il n'est par contre pas "complet" et possède des lacunes.

Il existe un (essentiellement) unique *corps ordonné* dont $\mathbb{Q}$ est un « sous-corps » et qui est *complet*, dans le sens où tout sous-ensemble minoré a une borne inférieure. On le note $\mathbb{R}$ et on l'appelle le *corps des nombres réels*. La construction rigoureuse de ce corps nécessite cependant des mathématiques plus avancées.

4. Fractions de nombres réels

Du fait que $\mathbb{R}$ est un corps, on sait que chaque nombre réel non nul admet un inverse. Cet inverse est en fait unique, par la proposition suivante. Ceci justifie la notation $\frac{1}{x}$ ou x^{-1} pour l'inverse de x.

PROPOSITION 4.1. *Dans un anneau* $(A, +, \cdot, 1)$ *(non nécessairement commutatif), si un inverse d'un élément* x *existe, alors il est unique.*

DÉMONSTRATION. Soit x un élément de A. Supposons que $y, z \in A$ sont des inverses de x. Ainsi, puisque z est un inverse de x on obtient

$$y = 1 \cdot y = (z \cdot x) \cdot y \overset{\text{asso.}}{=} z \cdot (x \cdot y) = z \cdot 1 = z$$

car y est un inverse de x également. Par conséquent $y = z$. $\square$

EXEMPLE 4.2. En général l'inverse d'un nombre rationnel étant rationnel, l'inverse d'un nombre irrationnel est irrationnel. Par exemple l'inverse de $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel qui vaut, au millième près, 0,707.

Comme dans $\mathbb{Q}$, « diviser dans $\mathbb{R}$, c'est multiplier par l'inverse. »

PROPOSITION 4.3. *Pour tous nombres réels* x, y *avec* $y \neq 0$*, il existe un unique nombre réel, noté* $x : y$ *et appelé le* quotient *de* x *par* y*, tel que*

$$(x : y) \cdot y = x$$

Ce quotient $x : y$ *est donné par* $x \cdot \frac{1}{y}$.

Pour tous nombres réels x, y avec y non nul, on note

$$\frac{x}{y} := x : y$$

C'est ce qu'on appelle une *fraction de nombres réels.*

EXEMPLE 4.4. Pour tout nombre réel r non nul on a $\dfrac{r}{r^{-1}} = r^2$.

Attention ! En général, le nombre réel $\dfrac{x}{y}$ n'est pas un nombre rationnel. C'est seulement une *notation* pour le quotient de x par y. Les fractions de nombres réels ont cependant les mêmes propriétés par rapport aux opérations que les fractions de nombres entiers (qui représentent des nombres rationnels), comme le montre la proposition suivante. C'est la raison pour laquelle on utilise à la fois la terminologie et la notation des fractions.

PROPOSITION 4.5. *Soient x, y, z, v, w des nombres réels avec y, z et w non nuls.*

(1) simplification : $\dfrac{x \cdot z}{y \cdot z} = \dfrac{x}{y}$.

(2) amplification : $\dfrac{x : z}{y : z} = \dfrac{x}{y}$.

(3) multiplication : $\dfrac{x}{y} \cdot \dfrac{v}{w} = \dfrac{x \cdot v}{y \cdot w}$.

(4) inverse : *Si $x \neq 0$, alors* $\dfrac{x}{y} = \left(\dfrac{y}{x}\right)^{-1}$.

(5) mettre au même dénominateur : $\dfrac{x}{y} + \dfrac{v}{w} = \dfrac{x \cdot y' + v \cdot w'}{z}$, *où $y', w' \in \mathbb{R}$ sont tels que $z = y \cdot y' = w \cdot w'$.*

DÉMONSTRATION. On prouve le premier point, le reste étant similaire. Notons d'abord que comme y et z sont non nuls, les deux membres de l'égalité existent. Montrons que $\dfrac{x \cdot z}{y \cdot z}$ est le quotient de x par y. Par définition du quotient,

$$\frac{x \cdot z}{y \cdot z} \cdot (y \cdot z) = x \cdot z.$$

Par associativité, $(\dfrac{x \cdot z}{y \cdot z} \cdot y) \cdot z = x \cdot z$, puis en multipliant de part et d'autre de l'égalité par $\dfrac{1}{z}$ (z est non nul par hypothèse), on a

$$\frac{x \cdot z}{y \cdot z} \cdot y = x.$$

En multipliant de part et d'autre de l'égalité par $\dfrac{1}{y}$ (y est non nul par hypothèse), on a enfin $\dfrac{x \cdot z}{y \cdot z} = x \cdot \dfrac{1}{y} = \dfrac{x}{y}$. $\square$

On n'aime pas les racines au dénominateur (parce qu'il est plus facile d'avoir une bonne idée de la valeur d'un nombre lorsqu'elles sont au numérateur). On les enlève donc en amplifiant par cette même racine. Ainsi

5. Notation scientifique

Notre compréhension de la signification précise de l'écriture décimale nous amène à définir la notation scientifique sans effort ! Le nombre 0,000009 contient beaucoup de zéros. Il est plus agréable de l'écrire $9 \cdot 10^{-6}$ et on voit mieux quelle taille a ce nombre. Comme 10^6 vaut un million, ce nombre est de l'ordre du millionième.

Définition 5.1. La *notation scientifique* d'un nombre réel x non nul est l'unique manière de l'écrire sous la forme $x = y \cdot 10^a$ où $1 \leq |y| < 10$ est un nombre réel et a est un nombre entier.

Ainsi, en notation scientifique, on écrira $6{,}\bar{6} \cdot 10^{-1}$ plutôt que $\frac{2}{3}$ ou $2{,}345 \cdot 10^3$ plutôt que 2345. Ce n'est donc pas toujours très utile. Par contre, pour de très grands nombres ou au contraire de très petits nombres, c'est très pratique.

Exemple 5.2. La masse de l'électron vaut $9{,}1093826 \cdot 10^{-31} kg$. C'est bien plus parlant de cette façon que de devoir compter 30 zéros après la virgule dans

$$0{,}00000000000000000000000000000091093826 kg$$

C'est aussi mieux adapté au calcul de puissance, de produits et de divisions. Par exemple

Remarque 5.3. Suivant cette définition, le nombre zéro n'as pas de notation scientifique. Sinon il aurait une infinité de notations scientifiques : $0 = 0 \cdot 10^0 = 0 \cdot 10^1 = 0 \cdot 10^2 = \ldots$. On fixe alors que 0 est la notation scientifique du nombre zéro.

On écrit 2,45 plutôt que $2{,}45 \cdot 10^0$ ou $2{,}45 \cdot 1$. Une autre exception est le nombre $10 = 10^1$. Ainsi on écrira $-4{,}978 \cdot 10$ plutôt que $-4{,}978 \cdot 10^1$.

Terminologie des puissances de 10

téra	10^{12}	(mille milliards ; exemple : un térabyte, 1 TByte = 10^{12} byte)
giga	10^{9}	(un milliard ; exemple : un gigaherz, 1 GHz = 10^{9} Hz)
méga	10^{6}	(un million ; exemple : un mégabyte (mégaoctet en français), 1 Mbyte = 10^{6} byte)
kilo	10^{3}	(exemple : un kilo(gramme), 1 kg = 1 000 g)
hecto	10^{2}	(exemple : un hectomètre, 1 hm = 100 m)
déca	10^{1}	(exemple : un décamètre, 1 dam = 10 m)
déci	10^{-1}	(exemple : un déci(litre), 1 dl = 0,1 l)
centi	10^{-2}	(exemple : un centimètre, 1 cm = 0,01 m)
milli	10^{-3}	(exemple : un millilitre, 1 ml = 0,001 l)
micro	10^{-6}	(un millionième ; exemple : un micron, 1 μm = 10^{-6}m)
nano	10^{-9}	(un milliardième ; exemple : un nanomètre 1 nm = 10^{-9} m)
pico	10^{-12}	(exemple : une picoseconde, 1 ps = 10^{-12} s)
femto	10^{-15}	(exemple : une femtoseconde, 1 fs = 10^{-15} s)

Chapitre 2

Puissances et racines

Dans ce chapitre nous étudierons les puissances entières, puis les racines carrées, cubiques, etc. Tout comme extraire une racine carrée est l'opération inverse d'élever au carré, l'opération de prendre la racine n-ème d'un nombre est l'opération inverse de la puissance n-ème. Pour terminer nous mélangerons joyeusement le tout (puissances et racines) pour introduire la notion de puissance rationnelle. Il faudra porter une attention particulière aux conditions sous lesquelles ces opérations sont définies (on ne peut pas par exemple extraire la racine carrée d'un nombre négatif).

1. Puissances entières

Nous définissons d'abord les puissances de nombres réels et étudions certaines de leurs propriétés.

Définition 1.1. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Si $n = 0$, alors on définit $x^0 = 1$. Si $n > 0$, alors la *puissance n-ème* de x est $x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ termes}}$ et si $x \neq 0$, alors

$$x^{-n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n = \frac{1}{x^n}.$$

La définition fait intervenir "trois petits points", ce qui indique qu'une manière plus formelle de faire devrait reposer sur une récurrence, c'est-à-dire définir $x^n = x^{n-1} \cdot x$. De cette façon, si les puissances petites, $x^0, x^1, \ldots, x^{n-1}$ sont définies, alors nous comprenons aussi x^n.

Remarque 1.2. Toute puissance paire est positive, que le nombre que l'on élève à cette puissance soit positif ou négatif.

Les calculs avec des nombres irrationnels se font de la même façon :

PROPOSITION 1.3. **Propriétés des puissances entières**. *Soient* $x, y \in \mathbb{R}$ *non nuls et* $a, b \in \mathbb{Z}$. *Alors,*

(1) (puissance d'un produit) $(x \cdot y)^a = x^a \cdot y^a$
(2) (puissance d'un inverse) $\dfrac{1}{x^a} = \left(\dfrac{1}{x}\right)^a = x^{-a}$
(3) (puissance d'un quotient) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^a = \dfrac{x^a}{y^a}$
(4) (puissance d'une puissance) $(x^a)^b = x^{a \cdot b}$
(5) (produit de deux puissances) $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$
(6) (quotient de deux puissances) $\dfrac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$

DÉMONSTRATION. Les puissances positives étant définies par récurrence on devrait prouver chaque propriété par récurrence. Nous allons être un peu moins formel. Pour (1) par exemple, lorsque $a = m \in \mathbb{N}$, alors $(xy)^a$ est un produit de m fois xy. Ainsi

$$(xy)^m = (xy) \cdot (xy) \dots (xy) = x^m \cdot y^m$$

Pour (5) les cas où a et b sont de même signe, disons positifs, sont simples car il s'agit de compter le nombre de termes dans une expression $x^a x^b = (x \dots x) \cdot (x \dots x)$ dans laquelle il y a a termes dans la première parenthèse et b termes dans la seconde.

Il y en a donc $a+b$ en tout. Lorsque a et b sont de signes opposés, disons $a = m$ est positif et $b = -n$ est négatif, il faut distinguer les cas $m \geq n$ ou $m < n$.

EXEMPLE 1.4. La calcul de la puissance $(-5 \cdot 2)^3 = (-10)^3 = -1000$ est identique à $(-5)^3 \cdot 2^3 = (-125) \cdot 8 = -1000$. Pour calculer la puissance $\left(\frac{3}{9}\right)^{-2}$ il vaut mieux simplifier

$$\left(\frac{3}{9}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 3^2 = 9$$

plutôt que d'effectuer 3^{-2} et 9^{-2} puis de calculer le quotient ! Les propriétés (4), (5) et (6) permettent de précieux gains de temps :

Attention ! Les puissances ne se distribuent pas sur les sommes et les différences en général. Il est faux de croire que $9 = 1^3 + 2^3$ vaut la même chose que $3^3 = 27$.

PROPOSITION 1.5. **Identités remarquables.** *Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Alors,*

(1) $(x+y)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot y + y^2$,

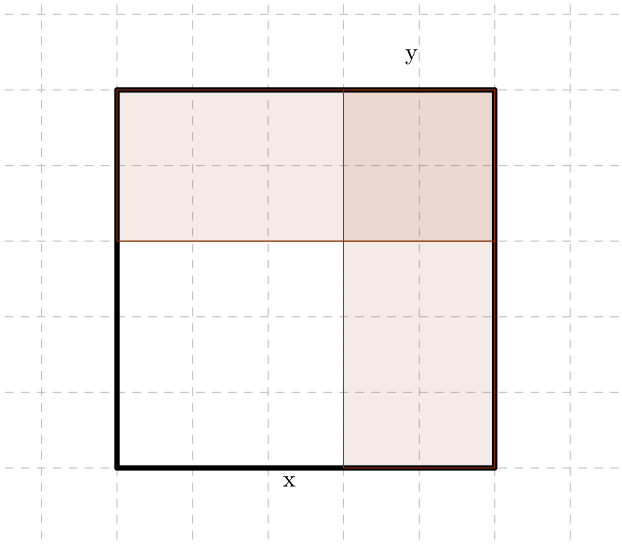
(2) $(x-y)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot y + y^2$,

(3) $(x+y) \cdot (x-y) = x^2 - y^2$.

DÉMONSTRATION. Utiliser la (double) distributivité de la multiplication sur l'addition dans $\mathbb{R}$. La deuxième identité par exemple se démontre en effectuant

On appelle le terme $2xy$ le *double produit*. $\square$

Par exemple $(\pi - 2)^2 = \pi^2 - 4\pi + 4$. Une preuve géométrique des identités remarquables est aussi possible. Peut-être vous souvenez-vous de celle qui montre la première égalité ci-dessus ? Voici une illustration de la deuxième :



On y voit un grand carré de côté x et deux bandes grisées de largeur y. On cherche à calculer $(x-y)^2$, c'est-à-dire à comprendre quelle est l'aire du carré blanc de côté $(x-y)$. On enlève au grand carré d'aire x^2 les deux bandes d'aire xy, mais ce faisant on a enlevé deux fois l'aire du petit carré de côté y^2. Il faut donc encore ajouter y^2. Ainsi $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$.

2. Racines

Nous parlons maintenant des racines carrées, cubiques, et plus généralement de racines n-ème. Prendre la racine n-ème d'un nombre est l'opération inverse de la puissance n-ème, mais il faut dans certains cas restreindre l'ensemble de définition pour que l'on puisse extraire ces racines.

Nous voulons une réponse à la question suivante : Soient $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ fixés. Combien y a-t-il de nombres réels $x \in \mathbb{R}$ tels que

$$x^n = a?$$

Lorsque n est pair, nous remarquons d'abord que si x est une solution de cette équation, alors $-x$ aussi puisque $(-x)^{2k} = (-1)^{2k} \cdot x^{2k} = x^{2k}$. Dans tous les cas, une puissance paire étant toujours positive, il faut que le nombre a soit positif ou nul pour qu'il y ait une solution.

Considérons maintenant n impair. Il y a alors aussi des solutions pour $a < 0$. Par exemple, $(-1)^3 = -1$. Ces considérations suffisent à prouver le résultat suivant :

Proposition 2.1. *Soient $x, a \in \mathbb{R}$ et n un nombre naturel non nul. L'équation*

$$x^n = a$$

possède une unique solution si n est impair. Si n est pair il y a :

- *si $a < 0$, aucune solution,*
- *si $a = 0$, une unique solution $x = 0$,*
- *si $a > 0$, deux solutions opposées.*

Définition 2.2. Lorsque n est pair, la solution positive, lorsqu'elle existe, est notée $\sqrt[n]{a}$. Lorsque n est impair la solution est notée $\sqrt[n]{a}$ également. Ces nombres sont appelés *racine n-ième* de a, ou *racine d'indice n* de a.

Exemple 2.3. On a $\sqrt[1]{x} = x$ pour tout nombre réel x. On n'utilise pas en général la notation de racine pour indiquer la racine "un-ième". De même on simplifie la notation et on notera $\sqrt{x} = \sqrt[2]{x}$. Par exemple

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $n, p \in \mathbb{N}$ des nombres non nuls, $k \in \mathbb{Z}$. Dans les situations où les membres de gauche et de droite sont définis, on a les égalités suivantes (la condition d'existence est précisée pour chaque égalité).

Proposition 2.4. *(1) $\sqrt[n]{x \cdot y} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}$, si $x, y \geq 0$ ou n impair.*

(2) $\sqrt[n]{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$, si $y \neq 0$ et si ($x, y \geq 0$ ou n impair).

(3) $\sqrt[p]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[n \cdot p]{x}$, si $x \geq 0$ ou (n et p impairs).

(4) $\sqrt[n]{x^a} = (\sqrt[n]{x})^a$, *si* $x \geq 0$ *ou* n *impair et il faut* $x \neq 0$ *si* $a < 0$.

(5) $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[p]{x} = \sqrt[n \cdot p]{x^{n+p}}$, *si* $x \geq 0$ *ou (*n *et* p *impairs).*

DÉMONSTRATION. Nous prouvons (1), la preuve des autres points étant similaire.

Attention :

- N'utilise ces formules que lorsque les conditions d'existence des deux membres de l'égalité sont vérifiées. On a $\sqrt{-2 \cdot (-2)} = 2$, mais $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-2}$ n'existe pas.
- $(\sqrt[n]{x})^n = x$ si $\sqrt[n]{x}$ existe, par définition de $\sqrt[n]{x}$. Mais $\sqrt[n]{x^n}$ est *toujours défini et* $\sqrt[n]{x^n} \neq x$ *en général.* En fait, pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ non nul,

— si n pair, $\sqrt[n]{x^n} = |x|$ $(= -x$ si $x < 0\,!)$,
— si n impair, $\sqrt[n]{x^n} = x$.

- Ceci donne un exemple d'application de la formule (4) lorsque x est positif ou n impair, et un contre-exemple lorsque les conditions de cette dernière formule ne sont pas vérifiées.

3. Puissances rationnelles

Nous avons appris à définir et calculer des puissances entières, comme 2^3 ou 3^{-2}, et des racines comme $\sqrt[3]{8}$ ou $\sqrt{1/3}$. Pour terminer ce sujet nous allons mélanger ces deux notions et donc calculer des racines de puissances et vice-versa.

Proposition 3.1. *Soient $a, b \in \mathbb{Z}$, $m, n \in \mathbb{N}$ non-nuls et $x \in \mathbb{Z}$. Supposons que $x \neq 0$ si a ou b est négatif et que si $x < 0$, alors m et n sont impairs. Alors si $\dfrac{a}{m} = \dfrac{b}{n}$, on a $\sqrt[m]{x^a} = \sqrt[n]{x^b}$.*

Définition 3.2. Soient $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ non nul. Si x est positif ou si n est impair ($x \neq 0$ si $a < 0$), on définit la *puissance rationnelle* $x^{\frac{a}{n}} := \sqrt[n]{x^a} = (\sqrt[n]{x})^a$.

Exemple 3.3. La notation en puissance rationnelle d'une racine n-ème est donc $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$. Calculons

(1) $\sqrt[6]{64^3} =$

(2) $\sqrt[7]{2^{28}} =$

(3) $(\sqrt[15]{-27})^5 =$

(4) $\sqrt[25]{4^{100}} =$

(5) $\sqrt[3]{-8} = -2$ n'est pas égal à $\sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[3]{8} = 2$, il faut faire attention aux conditions sur les exposants !

(6) $\sqrt[6]{(-8)^2} = 2$ est défini alors que $(\sqrt[6]{-8})^2$ n'est pas défini !

Les propriétés des puissances rationnelles sont attendues (elles ressemblent à celles que nous connaissons pour les puissances et les racines !).

PROPOSITION 3.4. *Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $r, s \in \mathbb{Q}$. Dans les situations où les membres de gauche et de droite sont définis, on a les égalités suivantes.*

(1) puissance d'un produit : $(x \cdot y)^r = x^r \cdot y^r$ *;*

(2) puissance d'un quotient : $\left(\dfrac{x}{y}\right)^r = \dfrac{x^r}{y^r}$ *;*

(3) puissance d'une puissance : $(x^r)^s = x^{r \cdot s}$ *;*

(4) produit de deux puissances : $x^r \cdot x^s = x^{r+s}$ *;*

(5) quotient de deux puissances : $\dfrac{x^r}{x^s} = x^{r-s}$.

DÉMONSTRATION. Lorsque $x = 0$, les puissances sont définies lorsque les numérateurs des exposants sont positifs. Dans ce cas toutes les puissances valent 1. Supposons donc que $x \neq 0$. Nous allons prouver le point (4).

Pour que le membre de gauche de cette égalité soit défini, il faut et il suffit que x soit positif ou qu'il existe des fractions $\dfrac{a}{m} = r$ et $\dfrac{b}{n} = s$ telles que m et n sont impairs. Mais dans ce cas, le membre de droite est aussi défini. En effet, si m et n sont impairs, alors $m \cdot n$ est aussi impair. Donc $r + s = \dfrac{a \cdot n + b \cdot m}{m \cdot n}$, qui a un dénominateur impair si m et n le sont.

Dans ce cas, par les propriétés des racines et des puissances entières, on a :

$$\begin{aligned} x^{\frac{a}{m}} \cdot x^{\frac{b}{n}} &= x^{\frac{a \cdot n}{m \cdot n}} \cdot x^{\frac{b \cdot m}{n \cdot m}} = \sqrt[m \cdot n]{x^{a \cdot n}} \cdot \sqrt[m \cdot n]{x^{b \cdot m}} \\ &= \sqrt[m \cdot n]{x^{a \cdot n} \cdot x^{b \cdot m}} = \sqrt[m \cdot n]{x^{a \cdot n + b \cdot m}} = x^{\frac{a \cdot n + b \cdot m}{m \cdot n}} = x^{\frac{a}{m} + \frac{b}{n}} \end{aligned}$$

□

EXEMPLE 3.5. On calcule ainsi que $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[6]{2} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = 2^1 = 2$.

Chapitre 3

Les polynômes

Considérons un anneau de nombres $K = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$. Considérons un nombre fini d'objets mathématiques qui sont tels qu'on peut les multiplier entre eux et avec les nombres de K ; on peut aussi les sommer entre eux et avec les nombres de K et le tout forme un anneau commutatif qui « étend » l'anneau de nombres K. Cela pourrait être des nombres, des fonctions, des vecteurs, etc. On pourrait par exemple vouloir faire des calculs avec les nombres entiers relatifs auxquels on ajoute $\sqrt{2}$ (mais pas tous les nombres réels). Les expressions que l'on manipulerait alors sont de la forme $a + b \cdot \sqrt{2}$ pour $a, b \in \mathbb{Z}$. Si on voulait ajouter $\sqrt[3]{5}$ aussi, il faudrait alors faire des calculs avec des expressions tels que

$$a + b \cdot \sqrt{2} + c \cdot \sqrt[3]{5} + d \cdot (\sqrt[3]{5})^2 + e \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{5} + f \cdot \sqrt{2} \cdot (\sqrt[3]{5})^2$$

On aimerait établir des résultats généraux, qui soient valables chaque fois qu'on se retrouve dans cette situation. Pour que nos résultats soient les plus généraux possibles, on ne va supposer aucune relation particulière entre ces objets mathématiques, mis à part les relations d'anneau commutatif. Par exemple, si on veut que nos résultats, disons pour deux objets qu'on notera x, y, s'appliquent aussi bien à l'ensemble de nombres $\{\sqrt{2}; \sqrt[3]{5}\}$ que $\{\sqrt{2}; \sqrt[3]{2}\}$, ou encore $\{\sqrt{2}; \pi\}$ il ne faut pas que je suppose la relation $5 \cdot x^2 = 2 \cdot y^3$ (qui est vraie pour le premier ensemble, mais pas le deuxième ni le troisième), ni la relation $x^2 = y^3$ (qui est vraie pour le deuxième ensemble, mais pas le premier ni le troisième). Par contre, je suppose vraie la relation $x + y = y + x$, car c'est un axiome des anneaux commutatifs.

De plus, avec $K = \mathbb{Z}$, $x = 1$ et $y = -5$ les éléments que l'on forme appartiennent à K, tandis que pour $x = \dfrac{3}{7}$ et $y = 3{,}\bar{3}$ ils sont dans $\mathbb{Q}$. Avec les choix de x et y comme ci-dessus on forme des nombres irrationnels, qui sont même parfois transcendants avec le dernier choix $y = \pi$. On peut dire plus (du fait que π est transcendant). Aucune puissance entière de π, ni aucune puissance entière de π sommée avec un quelconque nombre rationnelle ne sera rationnel. On voit que dans ce cas, le nombre π n'a « aucune relation » avec les nombres de K et les autres indéterminées.

1. Introduction aux polynômes

A. Monômes

On aimerait établir des résultats dans un contexte général, pour ensuite pouvoir appliquer ces résultats à différents ensembles d'objets qui nous intéressent. L'idée est de former des polynômes comme sommes d'expressions obtenues en juxtaposant un nombre de K et des puissances entières positives de x et y.

EXEMPLE 1.1. L'expression $2xy - 4x^2 + 1$ est un polynôme, et $\pi xyxy$ aussi. Par contre $\sqrt{x}$ n'est pas un polynôme et $\dfrac{x+y}{x-y}$ non plus car ni la racine, ni la division par une indéterminée, n'est une opération autorisée. Qu'en est-il des expressions suivantes ?

$$x + 3 \qquad \frac{xy-1}{3} \qquad \pi \qquad \sqrt{2}\, xyzxyz \qquad x^{0,22}$$

Les polynômes forment un anneau commutatif contenant K, on pourra donc les sommer et les multiplier entre eux comme nous allons le voir.

Ainsi, nous allons travailler avec un ensemble fini $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$, dont on appelle les éléments *indéterminées*. Lorsque r est inférieur ou égal à 3, on utilise souvent les lettres x, y et z, pour éviter d'écrire des indices lorsque ce n'est pas nécessaire.

DÉFINITION 1.2. Un *monôme* est une expression obtenue en juxtaposant un nombre, une indéterminée ou un produit de ceux-ci. Il est *réduit* lorsqu'il est écrit sous la forme d'un produit et que chaque indéterminée apparaît au plus une fois dans le produit et avec une puissance non nulle.

Dans un monôme le facteur numérique est appelé *coefficient* et le facteur d'indéterminée (s'il y en a) la *partie littérale*. Le *degré* d'un monôme est la somme des puissances de chaque indéterminée et on a par convention que $\deg(0) = -\infty$.

Deux monômes sont *semblables* s'ils ont la même partie littérale.

EXEMPLE 1.3. Avec une indéterminée tout monôme réduit est de la forme ax^n pour $a \in K$ et $n > 0$.

(1) Lorsque $n = 0$ on écrit simplement a et on dit que le monôme est *constant*. Un tel polynôme dans lequel l'indéterminée n'apparaît pas est donc de degré zéro, sauf si $a = 0$ auquel cas le degré est $-\infty$.

(2) Lorsque $a = 1$ on écrit x^n au lieu de $1x^n$. Le coefficient de x^n vaut 1 et ce monôme est de degré n.

J'aimerais insister sur le fait que l'écriture a indique ici un *paramètre*, un nombre réel typiquement, et ce n'est donc pas une indéterminée parce que je précise qu'il s'agit d'un nombre. Ainsi $2a - 1$ est un nombre réel, c'est-à-dire un polynôme constant, de degré zéro, alors que $2x - 1$ est un polynôme de degré 1. D'habitude les lettres de la fin de l'alphabet indiquent qu'il s'agit d'indéterminées, alors que les premières lettres sont réservées pour des paramètres. Par contre, il ne faut pas prendre cette règle pour une vérité absolue et ce n'est qu'une lecture attentive de la donnée qui permettra de savoir de quoi on parle.

Exemple 1.4. Les expressions $\frac{1}{2}x$ et $\sqrt{2}$ sont des monômes, malgré la présence d'une fraction et d'une racine. Voici encore un monôme qui n'est pas écrit sous forme réduite :

$$2x^2 \cdot 3x^3 \cdot (-1) \cdot x^5$$

Pour le "réduire" nous utilisons la commutativité de la multiplication (après tout les polynômes forment un anneau commutatif) :

Avec deux indéterminées on peut former encore plus de monômes ! Ainsi -3 est un monôme de degré zéro, $4xy$ est de degré

Pour réduire un monôme à plusieurs indéterminées on procède comme ci-dessus, c'est-à-dire qu'on assemble à gauche tous les coefficients et à droite toutes les indéterminées, que l'on ordonne par exemple par ordre alphabétique :

B. Polynômes

Définition 1.5. Un *polynôme* est une somme finie de monômes.

Autrement dit, tout polynôme est une somme finie de produits du type

$$a x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_r^{n_r}$$

où $a \in K, n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}$ (ces puissances peuvent être nulles et on pose $x_i^0 = 1$). Par exemple $1 - xy + xz + 6x^2yz^3$ est un polynôme à trois indéterminées x, y, z. Pour additionner des polynômes on écrit formellement la somme des monômes. Pour simplifier l'écriture on assemble les monômes semblables et on applique la distributivité. Par exemple

$$(1 + xy + 2x^2) + (3xy - x^2 + y^2 - 1) =$$

Il est ainsi toujours possible d'écrire un polynôme comme une somme de monômes réduits non semblables. Cette forme réduite est unique !

Définition 1.6. Un polynôme est *réduit* ou *sous forme réduite* s'il est écrit sous forme de somme de monômes non semblables. Les monômes qui apparaissent dans la forme réduite sont appelés *les termes du polynôme* et on dit que le terme de degré zéro est le *terme constant*. Un *binôme*, respectivement *trinôme*, est un polynôme réduit à deux, respectivement trois, termes.

L'anneau des coefficients de nos polynômes K est ce qu'on appelle un « sous-anneau » des polynômes. Les propriétés suivantes sont valides :

(1) $0 \in K$ est l'élément neutre de l'addition des polynômes et $1 \in K$ est l'élément neutre de leur multiplication.

(2) $0 \cdot f = 0$ pour tout polynôme f.

(3) $(-1) \cdot f = -f$ pour tout polynôme f, où $-f$ dénote l'*opposé* de f, c'est-à-dire son inverse additif.

(4) Soient f, g des polynômes. Il existe un unique $h \in L$ tel que

$$f = g + h.$$

Il est donné par $h = f + (-g)$ et est appelé la *différence* de f et g. On note $h = f - g$. *Soustraire un polynôme c'est additionner son opposé.*

(5) Les identités remarquables sont valables pour les polynômes :

(a) $(f+g)^2 = f^2 + 2 \cdot f \cdot g + g^2$,

(b) $(f-g)^2 = f^2 - 2 \cdot f \cdot g + g^2$,

(c) $(f+g) \cdot (f-g) = f^2 - g^2$.

Exemple 1.7. On calcule $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$. En effet

que celles d'anneau commutatif

Les indéterminées n'ont aucune autre relation entre elles, ni avec K. Autrement dit, un polynôme n'admet qu'une seule forme réduite !

Fixons un ensemble d'indéterminées $\{x_1, \ldots, x_r\}$, $r \in \mathbb{N}_0$. On peut montrer qu'il existe une (essentiellement) unique structure algébrique vérifiant les conditions ci-dessus. Elle s'appelle l'*algèbre de polynômes à coefficients dans K et à r indéterminées.* Elle est notée $K[x_1, \ldots, x_r]$.

Définition 1.8. Le *degré* d'un polynôme est le degré de celui de ses termes qui a le plus haut degré. Un polynôme est *ordonné* (par rapport à une indéterminée) si ses termes sont écrits dans l'ordre de degré croissant ou décroissant (par rapport à cette indéterminée). + Coefficients du polynôme

Exemple 1.9. Par exemple le polynôme $2u-5$ dans $\mathbb{Z}[u]$ est réduit, de degré 1, et ordonné. Ce n'est pas un monôme puisqu'il est écrit sous forme réduite et qu'il a deux termes.

Avec une indéterminée il est facile d'écrire un polynôme sous forme réduite et ordonnée.

Remarque 1.10. Pour pouvoir faire des calculs dans une algèbre de polynômes $K[x_1, \ldots, x_r]$, il suffit de savoir que c'est un anneau commutatif contenant les éléments $x_1, \ldots, x_r$ et dont K est un sous-anneau. Attention ! L'algèbre de polynômes

+ les x_1, …, x_r sont algébriquement indépendants.

$K[x_1, \ldots, x_r]$ n'est pas un corps, même lorsque K est un corps. Par exemple, aucune indéterminée n'a d'inverse multiplicatif quel que soit K puisque x^{-1} n'est pas un monôme, seules les puissances entières naturelles sont admises.

Deux polynômes f et g sont égaux si et seulement s'ils ont la même forme réduite, c'est-à-dire si et seulement si les termes semblables de f et g ont les mêmes coefficients respectivement.

EXEMPLE 1.11. Calculons dans $\mathbb{R}[x, y, z]$. Par commutativité de la multiplication des polynômes :

2. Les opérations des polynômes

Nous travaillons avec un anneau de nombres $K = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$. Nous avons défini dans la section précédente l'anneau commutatif $K[x_1, \ldots, x_r]$ des polynômes à r indéterminées et à coefficients dans K. Un monôme est une juxtaposition de nombres de K et de puissances entières positives d'indéterminées. La juxtaposition représente le produit. Les conventions de simplification d'écriture que nous avons vues sont les suivantes :

$$x^0 = 1 \quad \text{et} \quad x^1 = x \quad \text{et} \quad \pm 1 \cdot x = \pm 1x = \pm x$$

La commutativité de la multiplication permet d'écrire tout monôme sous forme réduite, c'est-à-dire sous une forme où chaque indéterminée n'apparaît qu'une fois, ou pas du tout. Ainsi le monôme

$$\frac{3}{2}xy^2z \in \mathbb{Q}[x, y, z]$$

Un polynôme est une somme finie de monômes. Grâce à la commutativité de l'addition dans $K[x_1, \ldots, x_r]$ il est toujours possible d'écrire un polynôme comme une somme de monômes réduits non semblables. On appelle cette forme la forme réduite du polynôme et elle est unique !

Définition 2.1. Soient $f, g \in K[x_1, \ldots, x_r]$ deux polynômes. La *somme* $f + g$ est le polynôme obtenu en additionnant les termes de f et de g.

Pour additionner deux polynômes il faut donc réduire f et g, puis utiliser l'associativité et la commutativité de l'addition pour regrouper les termes semblables, et enfin réduire l'expression grâce à la distributivité. De plus, « soustraire c'est additionner l'opposé ».

Exemple 2.2. On travaille dans $\mathbb{R}[x, y]$. Soient $f = \pi x^2 - 3xy + x - \sqrt{2}$ et $g = \pi y^2 - \pi x^2 - 3xy + \sqrt{2}$. Alors la somme

$$f + g = (\pi x^2 - 3xy + x - \sqrt{2}) + (\pi y^2 - \pi x^2 - 3xy + \sqrt{2}) = \pi y^2 - 6xy + x$$

La différence se calcule de la même manière

On peut aussi multiplier des polynômes entre eux puisqu'ils forment un anneau. Pour écrire le résultat d'un produit sous forme réduite, on utilise la distributivité pour obtenir une somme de monômes, puis la commutativité de la multiplication pour réduire les monômes, ensuite la commutativité de l'addition pour regrouper les termes semblables, et enfin la distributivité pour réduire le polynôme ! Pour conclure regardons deux exemples, le deuxième est attribué à Gauss :

Exemple 2.3. $(xy - 1)(x^2 + yx^3) =$

$$\frac{1}{2}(x + y + z) \cdot [(x - y)^2 + (y - z)^2 + (x - z)^2] =$$

Ce polynôme est écrit sous forme réduite, mais non ordonnée ! Il est joli quand même....

3. Propriétés des polynômes

Après avoir appris à manipuler les polynômes, nous pouvons établir quelques propriétés théoriques et générales.

THÉORÈME 3.1. *L'anneau $K[x]$ des polynômes à une indéterminée est intègre. Ainsi, si f et g sont deux polynômes non nuls, le produit $f \cdot g$ est non nul.*

DÉMONSTRATION. On écrit $f = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots a_1 x + a_0$ et $g = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ pour ces deux polynômes de degré m et n. Le degré de f vaut m et le coefficient a_m n'est pas zéro. De même le degré de g vaut n et le coefficient b_n n'est pas zéro. Alors le produit

$$f \cdot g = a_m \cdot b_n x^{m+n} + (a_m \cdot b_{n-1} + a_{m-1} \cdot b_n)x^{m+n-1} + \cdots + a_0 b_0$$

Ce polynôme est de degré $m + n$ puisque le coefficient $a_m \cdot b_n$ n'est pas nul. En particulier ce polynôme n'est pas nul. □

PROPOSITION 3.2. *Soit f un polynôme de degré m et g un polynôme de degré n. Alors $f + g$ est de degré au plus* $\max(m, n)$ *et $f \cdot g$ est de degré $m + n$.*

Démonstration. Le cas de la somme est clair puisque le monôme de plus haut degré de $f+g$ sera semblable à celui de plus haut degré de f ou de g en général, sauf si ces deux termes s'annulent, auquel cas le degré de $f+g$ sera plus petit.

Lorsqu'on calcule le produit $f \cdot g$, les "termes de plus haut degré ne peuvent s'annuler". Nous l'avons vu dans le théorème ci-dessus pour des polynômes à une indéterminée. Formellement on pourrait alors le démontrer par induction en remarquant que $(K[x])[y] = K[x, y]$. □

On se souviendra que $\boxed{\deg(f \cdot g) = \deg f + \deg g}$.

Exemple 3.3. Dans $\mathbb{Q}[a, b]$ on pose $f = a^3 - ab + 1$ et $g = 3ab - a^3 + 1$. Ces deux polynômes sont de degré 3

Nous avions dit que $\dfrac{1}{x}$ n'est pas un polynôme. Nous pouvons maintenant démontrer plus !

Proposition 3.4. *Une indéterminée x ne possède pas d'inverse dans $K[x]$.*

De même l'indéterminée x n'admet pas de racine, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de polynôme f tel que $f^2 = x$. En effet, si f est de degré n, alors f^2 est de degré $2n$, donc de degré pair. Or x est de degré 1, qui n'est pas un nombre pair. Par conséquent les polynômes x et f^2 ne peuvent être égaux.

Pour terminer ce sujet, voici deux types de problème que nous n'avons pas encore rencontrés. Le premier s'appuie sur le fait que deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont la même forme réduite.

Exemple 3.5. Trouve les valeurs des nombres réels a, b, c tels que $ax^2 + bx + c = (x+2)(x-3)$.

L'une des utilisations des expressions polynomiales est la suivante. Les polynômes nous permettent d'écrire une formule dépendant d'une ou plusieurs variables indéterminées que nous pourrons ensuite utiliser dans différentes situations.

Exemple 3.6. On considère une brique de lait (un parallélépipède rectangle) dont la base est un rectangle. La hauteur de la brique est égale à la moitié du périmètre de la base. Combien de litres de lait faut-il pour remplir cette brique ?

On nomme x et y les longueurs des côtés de la base (en centimètres).

Chapitre 4

Les fonctions

Les fonctions sont des objets mathématiques qui vont nous accompagner pendant toutes les années du cours Euler. Elles nous aident à comprendre des transformations (du plan en géométrie, de la droite réelle en analyse, etc.). Notre but est ici de poser les bases d'une théorie qui nous permette d'étudier des courbes dans le plan, des transformations géométriques, d'évaluer des formules polynomiales en remplaçant les indéterminées par des nombres, de comparer des ensembles, etc.

1. Introduction aux fonctions

On se donne deux ensembles X et Y. Le premier est notre *ensemble de départ* (aussi appelé "source" ou "domaine"), et le second notre *ensemble d'arrivée* (aussi appelé "but" ou "codomaine"). Nous voulons formaliser mathématiquement une « machine » qui associe à chaque élément de l'ensemble de départ un élément de l'ensemble d'arrivée. On peut penser à X comme étant tous les articles de l'épicerie du coin et Y l'ensemble des prix en francs suisses. Un exemple de fonction associe à chaque article un prix. Plusieurs articles peuvent avoir le même prix, mais chaque article n'a qu'un seul prix !

Définition 1.1. Soient X et Y deux ensembles. Une *fonction* $f : X \to Y$ est la donnée, pour tout élément $x \in X$, d'un élément $f(x) \in Y$. On appelle cet élément $f(x)$ l'*image* de x (par f).

On appelle aussi f une *application* et on dit "f de x" lorsqu'on lit l'expression mathématique $f(x)$. On représente souvent la fonction f sur deux lignes en alignant dans les mêmes colonnes les éléments de x avec l'ensemble X et les éléments de y avec Y :

$$\begin{array}{rccc} f: & X & \longrightarrow & Y \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Exemple 1.2. Soit X l'ensemble des élèves du cours Euler et Y l'ensemble des mets. On définit une application

$$f: X \longrightarrow Y$$

qui associe à chaque élève son plat favori. Si Dominique par exemple adore la choucroute garnie, alors on aura $f(\text{Dominique}) = \text{choucroute garnie}$.

Exemple 1.3. **L'identité.** Soit X un ensemble. Il existe toujours une fonction "identité" $\mathrm{id}_X : X \to X$ qui associe à x le même élément x.

Lorsque X est l'ensemble des points du plan, on retrouve la transformation du plan identité que nous avons déjà rencontrée en géométrie plane !

Exemple 1.4. **Transformations du plan.** Toute transformation du plan (isométrie ou non) est une fonction

$$\begin{array}{rccc} f: & \Pi & \longrightarrow & \Pi \\ & P & \longmapsto & f(P) \end{array}$$

La transformation f "envoie" le point P sur son image $f(P)$.

Exemple 1.5. **Fonctions numériques.** Lorsque X est un ensemble de nombres (naturels, entiers, rationnels ou réels), une formule algébrique définit souvent une fonction. Par exemple

Exemple 1.6. **Fonction constante.** Soient X un ensemble et $b \in Y$ un élément d'un (autre) ensemble Y. La *fonction constante*

$$\begin{array}{rccc} c_b: & X & \longrightarrow & Y \\ & x & \longmapsto & b \end{array}$$

associe à tout élément x la même image b. Si nous reprenons l'analogie avec l'épicerie, celle-ci pourrait afficher des soldes et décider que tous les articles se vendent à 10 francs. La fonction de prix est alors constante puisqu'elle associe à tout article de l'épicerie le même prix de 10 francs.

Par contre les exemples suivants ne sont pas des fonctions :

(1) Pour x un nombre réel, $f(x) = \pm x$. Une fonction associe à tout élément de l'ensemble de départ un seul élément bien défini de l'ensemble d'arrivée. Ici $f(1)$ vaut 1 ou -1, ou peut-être 1 et -1, ce n'est pas une fonction !

(2) Soit $X = \mathbb{Z}$ et $Y = \mathbb{N}$. On pose $f(a) = a$ lorsque a est positif. Ceci n'est pas une fonction parce que les nombres négatifs n'ont pas d'image !

(3) Définissons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par la formule $f(x) = \sqrt{-x}$. Ceci n'est pas une fonction parce que $\sqrt{-x}$ n'est pas défini pour $x > 0$ Par contre

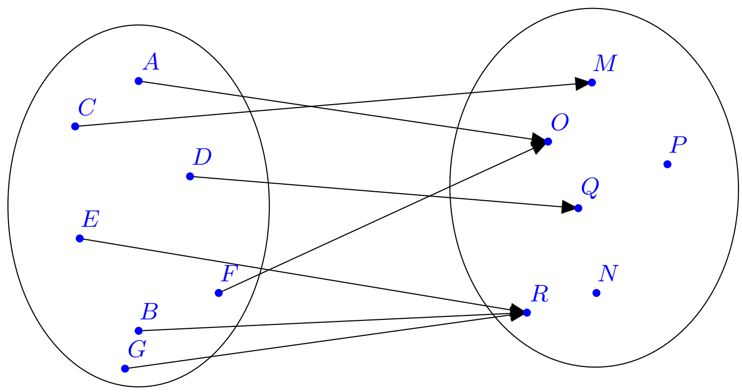
$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

est la fonction "racine carrée".

2. Représentation schématique des fonctions

Lorsque les ensembles de départ et d'arrivée d'une fonction sont "petits", on utilise souvent une représentation basée sur celle des diagrammes de Venn que nous avons vue pour les ensembles.

On lit le schéma de gauche à droite. A gauche se trouve l'ensemble de départ X et à droite l'ensemble d'arrivée Y. Les éléments de chaque ensemble sont indiqués par des points et leur nom, comme dans un diagramme de Venn. La fonction $f : X \to Y$ est indiquée élément par élément : on dessine une flèche issue de l'élément $x \in X$ qui atteint l'image $f(x) \in Y$.



Cet exemple représente une fonction puisque :

Ceci nous amène tout naturellement aux définitions suivantes.

Définition 2.1. Une fonction $f : X \to Y$ est *injective* si, pour toute paire d'éléments distincts $x \neq x'$ de X, les images $f(x)$ et $f(x')$ sont distinctes dans Y.

En d'autres termes deux éléments de X ont la même image dans Y si et seulement si ils sont égaux. En langage mathématique : « $x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$ » pour tous $x, x' \in X$; ou de manière équivalente la contraposée « $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$ » . L'exemple ci-dessus est-il injectif ? Non car $A \neq F$, mais $f(A) = O = f(F)$.

Schématiquement l'injectivité se traduit par le fait qu'il n'y a pas deux flèches qui atteignent le même élément.

Exemple 2.2. Etudions la fonction $\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & n & \longmapsto & n^2+1 \end{array}$

Schématiquement on “voit” que f est injective

Définition 2.3. Une fonction $f : X \to Y$ est *surjective* si tout élément $y \in Y$ est l'image par f d'un élément $x \in X$.

En d'autres termes tous les éléments de Y sont atteints par la fonction f. En langage mathématique : « $\forall y \in Y,\ \exists x \in X$ tel que $f(x) = y$ » . Le premier exemple ci-dessus est-il surjectif ? Non car $P \neq f(x)$ quel que soit x. L'exemple $f(n) = n^2 + 1$ n'est pas surjectif non plus puisqu'il n'existe aucun entier naturel n tel que $f(n) = 0$. Si un tel n existait, $n^2 + 1 = 0$ impliquerait que $n^2 = -1$, une absurdité puisque tous les carrés sont positifs.

Schématiquement la surjectivité se traduit par le fait qu'il y a au moins une flèche qui atteint chaque élément de l'ensemble d'arrivée.

Exemple 2.4. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des pays du monde et $\mathcal{C}$ l'ensemble des continents. La fonction $f : \mathcal{P} \to \mathcal{C}$ associe à chaque pays le continent sur lequel elle se trouve. Ainsi $f(\text{Suisse}) = \text{Europe}$ et $f(\text{Samoa}) = \text{Océanie}$. Cette fonction est surjective, mais non injective puisque $f(\text{Mali}) = f(\text{Sénégal})$ alors que les pays Mali et Sénégal sont distincts.

DÉFINITION 2.5. Une fonction $f : X \to Y$ est *bijective* si elle est à la fois injective et surjective. On dit aussi que f est une *bijection*.

Schématiquement, une fonction bijective se caractérise par le fait que chaque élément de X est relié par une flèche à exactement un élément de Y. Nous avons vu en géométrique que toute isométrie est bijective.

EXEMPLE 2.6. La fonction qui associe à chaque pays sa capitale est une bijection de l'ensemble des pays du monde à l'ensemble des capitales. La fonction

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sqrt[5]{x} \end{array}$$

EXEMPLE 2.7. La fonction suivante est bijective :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 17x+4 \end{array}$$

Pour l'injectivité, supposons que x et y sont deux nombres réels tels que $f(x) = f(y)$. La définition de f nous apprend alors que $17x+4 = 17y+4$. On peut alors soustraire 4 de part et d'autre pour en conclure que $17x = 17y$. Finalement la division par 17 donne $x = y$.

Pour la surjectivité il faut montrer que tout nombre réel a est l'image par f d'un certain nombre réel.

3. Le graphe d'une fonction

Dans le cas des fonctions numériques, en particulier des fonctions réelles (d'une variable réelle) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la représentation schématique n'est pas adaptée. Il est beaucoup plus efficace de dessiner le graphe (ou graphique parfois) de la fonction. Mais avant de parler de graphe, nous devons mettre en place la terminologie adéquate et quelques conventions.

Définition 3.1. Soient X et Y des ensembles. Une *paire ordonnée* (ou un *couple*) d'éléments de X et Y consiste en la donnée d'un élément $x \in X$ et d'un $y \in Y$, dans cet ordre. On la note (x, y). Les éléments x et y s'appellent respectivement la *première composante* et la *deuxième composante* de la paire (x, y). On dit aussi que x et y sont les *coordonnées* de (x, y). L'élément x est la *première coordonnée* ou l'*abscisse* du point et l'élément y est la *deuxième coordonnée* ou l'*ordonnée* du point.

L'ensemble des couples d'éléments de X et Y est appelé le *produit cartésien* de X et Y et est noté $X \times Y$. Si $X = Y$, on note $X^2 = X \times X$.

Remarquons que deux paires ordonnées (x, y) et (x', y') sont égales si et seulement si $x = x'$ et $y = y'$.

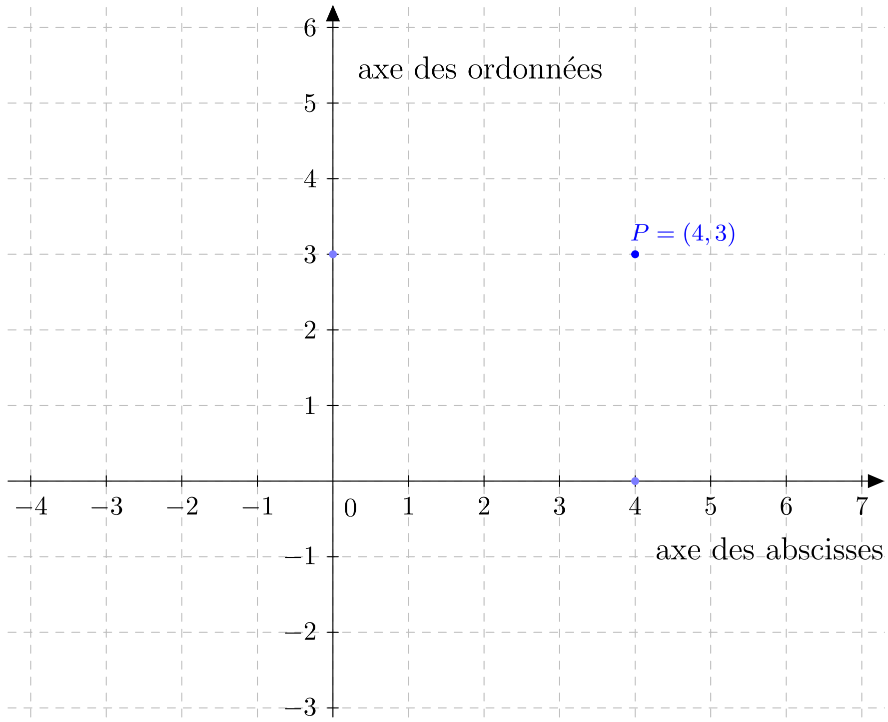
Exemple 3.2. Si X est l'ensemble des villes suisses et Y est l'ensemble des espèces d'arbre, alors (Bâle, chêne), (Sion, épicéa) $\in X \times Y$; par contre (Paris, eucalyptus) $\notin X \times Y$ parce que Paris n'est pas un élément de X.

L'ensemble $\mathbb{R}^2$ est formé des paires de nombres réels. Attention ! $(\pi, 2) \neq (2, \pi)$. L'ensemble $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ est l'ensemble des paires de nombres réels où la deuxième composante est positive ou nulle.

Définition 3.3. Soit $f \colon X \to Y$ une fonction. Le *graphe* de f, noté G_f, est le sous-ensemble du produit cartésien $X \times Y$ des couples de la forme $(x, f(x))$. Ainsi $G_f = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$.

Pour une représentation graphique du graphe, nous introduisons la notion de système d'axes.

Définition 3.4. Un système d'axe est la donnée de deux droites perpendiculaires dans le plan $\mathbb{R}^2$. L'axe horizontal s'appelle l'*axe des abscisses* et l'axe vertical, l'*axe des ordonnées*. Le point de croisement des axes s'appelle l'*origine*. Supposons qu'on ait placé sur l'axe des abscisses les éléments d'un ensemble X et sur l'axe des ordonnées les éléments d'un ensemble Y. Alors une paire (x, y) du produit cartésien $X \times Y$ est représentée par le point (x, y) du plan dont la projection sur l'axe horizontal est x et la projection sur l'axe vertical est y.

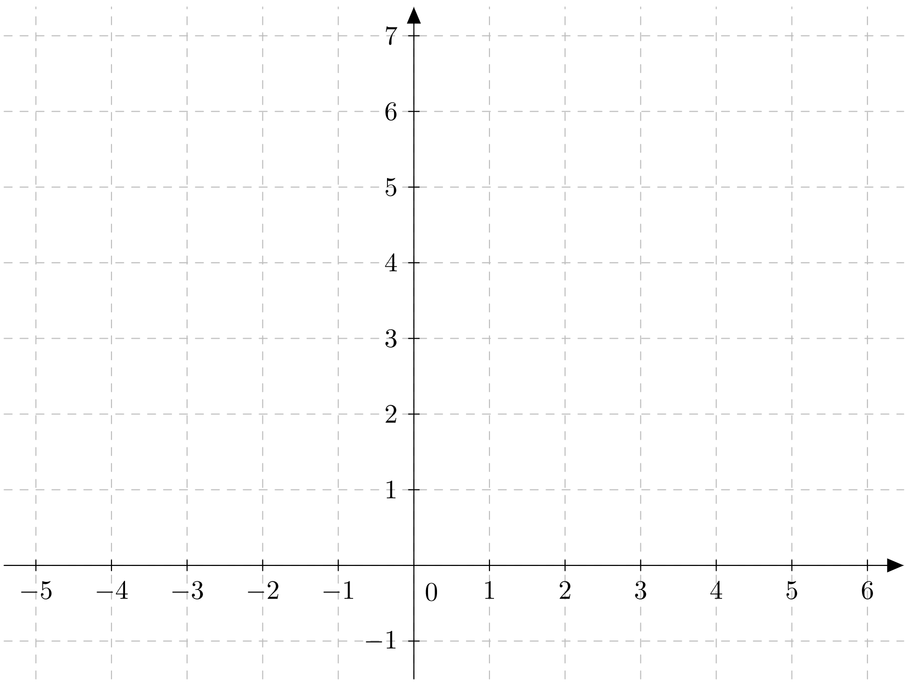


Dans cet exemple nous avons représenté $\mathbb{Z}^2$ et représenté le point $(4; 3)$ dont l'abscisse vaut 4 et l'ordonnée vaut 3. Où se trouvent les points $(-2; 5)$ et $(0; -1)$?

DÉFINITION 3.5. La *représentation graphique* d'une fonction $f : X \to Y$ consiste à représenter dans le système d'axes pour X et Y tous les points du graphe de f.

Autrement dit, on place dans le plan les éléments de l'ensemble de départ X sur l'axe horizontal, ceux de l'ensemble d'arrivée Y sur l'axe vertical et on met en évidence le point (x, y) du plan si $f(x) = y$. Pour une fonction qui associerait à chaque ville suisse un arbre, le graphe n'apporterait pas une information très intéressante. Par contre, une fonction numérique est en général mieux comprise par son graphe que par sa représentation schématique.

EXEMPLE 3.6. On considère la fonction "valeur absolue" $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$.



Saurais-tu représenter, dans le même système d'axes, le graphe de la fonction valeur absolue, mais vu comme une fonction de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Q}_+$? Et comme fonction réelle $|\_|\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$?

4. Critère d'injectivité et surjectivité

La représentation graphique d'une fonction est utile pour visualiser les propriétés d'injectivité et de surjectivité.

Proposition 4.1. *Une fonction $f : X \to Y$ est injective si et seulement si la droite horizontale d'ordonnée y dans le système d'axes coupe le graphe G_f au plus une fois pour tout $y \in Y$. Elle est surjective si et seulement si cette droite coupe le graphe au moins une fois pour tout $y \in Y$.*

Démonstration. Une droite horizontale est donnée par une équation du type $y = a$ où a est un nombre réel fixé. Par définition le graphe de la fonction f est constitué des points du plan de la forme $(x, f(x))$. Si la droite horizontale d'ordonnée a rencontre le graphe G_f, cela veut dire qu'il existe $x \in X$ tel que $(x, a) \in G_f$, en d'autres termes $y = f(a)$. Si cela arrive pour tout a, cela veut dire précisément que f est surjective (tous les points de Y sont atteints par f). Si cette droite coupe le graphe deux fois (ou plus), cela veut dire qu'il existe deux éléments *distincts* $x, x' \in X$ tels que (x, y) et (x', y) appartiennent au graphe de f. Ainsi $f(x) = a = f(x')$, ce qui empêche f d'être injective. $\square$

Regardez la vidéo pour voir des exemples visuels et dessinez les graphes ici !

5. La composition

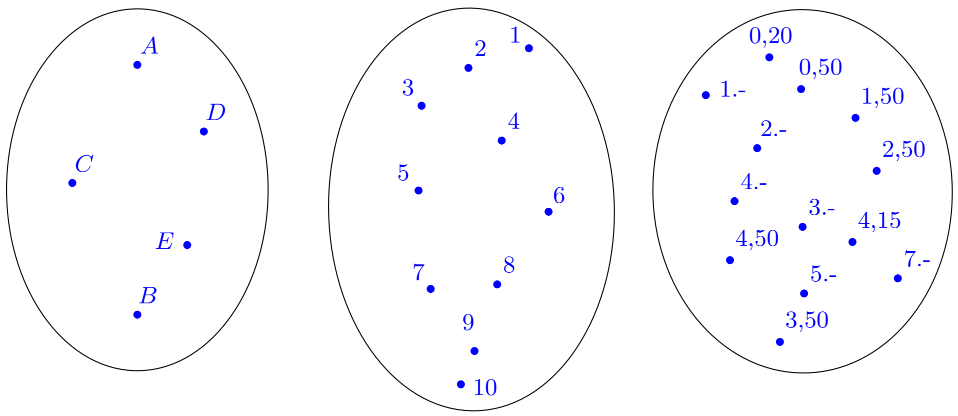
Nous considérons maintenant deux fonctions $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$. Lorsque le but de la première coïncide avec la source de la deuxième, la composition de ces deux fonctions nous permet de construire une nouvelle fonction !

Définition 5.1. La *composition* des fonctions $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ est la fonction $g \circ f : X \to Z$ définie par $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$ pour tout $x \in X$.

Ceci définit bien une fonction de source X et de but Z puisque à tout élément $x \in X$ nous associons l'image par g de l'élément $f(x) \in Y$. Schématiquement nous pouvons penser à un voyage de X à Z qui fait escale en Y.

Remarque 5.2. J'aimerais insister sur le fait que la notation $g \circ f$ désigne la fonction fabriquée en effectuant f d'abord et g ensuite. On compose donc de droite à gauche, contrairement au sens de lecture. Ceci vient du fait que la juxtaposition $g(f(x))$ indique logiquement que l'élément x qui se trouve tout à droite est d'abord "mangé" par f, ce qui nous donne l'élément $f(x)$, puis on passe cet élément par la fonction g. C'est exactement la même convention que celle que nous avons rencontré en géométrie lorsque nous avons composé des isométries.

Exemple 5.3. Considérons l'ensemble Z des prix en francs suisses, $Y = \mathbb{N}$ l'ensemble des nombres entiers naturels et X un ensemble de sacs de pommes Elstar. Il y a cinq sacs dans l'ensemble X, appelons-les A, B, C, D et E. La fonction $f : X \to Y$ compte le nombre de pommes de chaque sac. Il y a 4 pommes dans le sac A, 6 pommes dans le sac B, 9 dans le sac C, 8 dans le sac D et enfin 6 pommes dans le sac E. La fonction $g : Y \to Z$ associe à chaque nombre n le prix obtenu en multipliant n par 50 centimes. La composition est représentée schématiquement ci-dessous :



Exemple 5.4. Soit f la fonction réelle définie par $f(x) = x^2$ et $g(y) = y^3 + 1$. Alors la fonction $g \circ f$ est définie par

Attention, la composition $f \circ g$ n'est pas égale à $g \circ f$.

Ces deux calculs montrent l'importance de la maîtrise des opérations sur les polynômes. La plupart des fonctions que nous étudierons cette année seront polynomiales.

6. Composition et restriction

Quand le but de la fonction f n'est pas tout-à-fait identique à la source de g, la définition de la composition n'a pas de sens.

Exemple 6.1. Soit X l'ensemble des élèves du cours Euler, Y l'ensemble des cantons suisses. On considère la fonction $f : X \to Y$ qui associe à chaque élève son canton de domicile. On considère ensuite la fonction g qui associe à chaque canton la personne responsable du cours Euler au département de l'instruction publique. Cette fonction n'est pas définie pour tous les cantons, nous devons *restreindre* l'ensemble de départ aux cantons de Genève, Jura, Vaud, Valais, Fribourg et Neuchâtel.

Nous avons envie de composer les fonctions f et g pour associer à chaque élève la personne responsable au département. Nous avons maintenant un problème avec x, un élève du canton de Berne qui n'a pas d'accord formel avec le cours Euler. Pour construire $g \circ f$ nous devons restreindre le domaine de f à l'ensemble $X - \{x\}$.

Définition 6.2. Soit $f\colon X \to Y$ une fonction et $A \subset X$. La *restriction* de f au sous-ensemble A est la fonction $f|_A : A \to Y$ définie par $f|_A(a) = f(a)$ pour tout $a \in A$.

Parfois une formule semble définir une fonction $f\colon X \to Y$, mais f n'est pas bien définie sur certains éléments de X. Le plus grand sous-ensemble $A \subset X$ pour lequel $f\colon A \to Y$ est une fonction s'appelle l'*ensemble de définition*, abrégé $\mathrm{ED}(f)$, de la fonction f. Par exemple l'ensemble de définition de la fonction $\sqrt{x}$ est

Quels sont les ensembles de définition des fonctions déterminées par les expressions $\sqrt{-|x|}$ et $\dfrac{x^2}{\sqrt{-|x|}}$?

Nous reviendrons sur ce point lorsque nous parlerons de relation, une notion plus générale que celle de fonction.

Exemple 6.3. Nous voulons composer les fonctions $f(x) = \sqrt{x-1}$ et $g(x) = x^2$.

Chapitre 5

Les fonctions affines et quadratiques

Tout polynôme f à une indéterminée x et à coefficients dans K définit une fonction polynomiale de K dans K. Il s'agit de la fonction déterminée par l'expression polynomiale $f(x)$. Nous allons considérer le cas réel (même quand les coefficients des polynômes sont entiers ou rationnels) et, pour cette année, uniquement les polynômes de degré un ou deux.

1. Les fonctions affines

Un polynôme de degré 1 est toujours de la forme $ax+b$, pour a et b des nombres réels. De tels polynômes nous permettent de construire des fonctions que nous allons définir dans cette section et soigneusement étudier ensuite.

DÉFINITION 1.1. Une fonction *affine* est une fonction réelle associée à un polynôme de degré inférieur ou égal à 1 :

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto ax+b. \end{aligned}$$

où $a, b \in \mathbb{R}$. Le graphe d'une telle fonction s'appelle une *droite*.

REMARQUE 1.2. Le graphe d'une fonction affine est une droite dans le sens de la géométrie euclidienne. Plus précisément, l'ensemble $\mathbb{R}^2$ avec comme droites tous les sous-ensembles

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = a \cdot x + b\}$$

où $a, b \in \mathbb{R}$ et les sous-ensembles de droites verticales

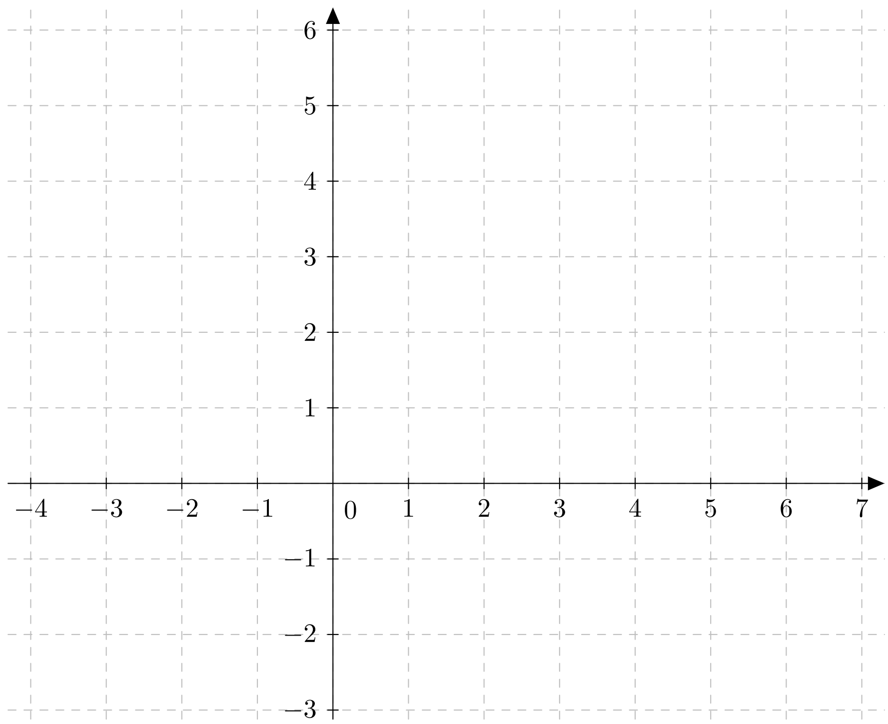
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = a\}$$

où $a \in \mathbb{R}$, muni de la distance donnée par le Théorème de Pythagore

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

vérifie les axiomes de la géométrie euclidienne. En particulier, étant donnés deux points distincts du plan dont les abscisses sont distinctes, il existe une unique fonction affine dont le graphe passe par ces deux points. Lorsque la droite est verticale (l'abscisse est constante), ce n'est pas le graphe d'une fonction. Pourquoi ?

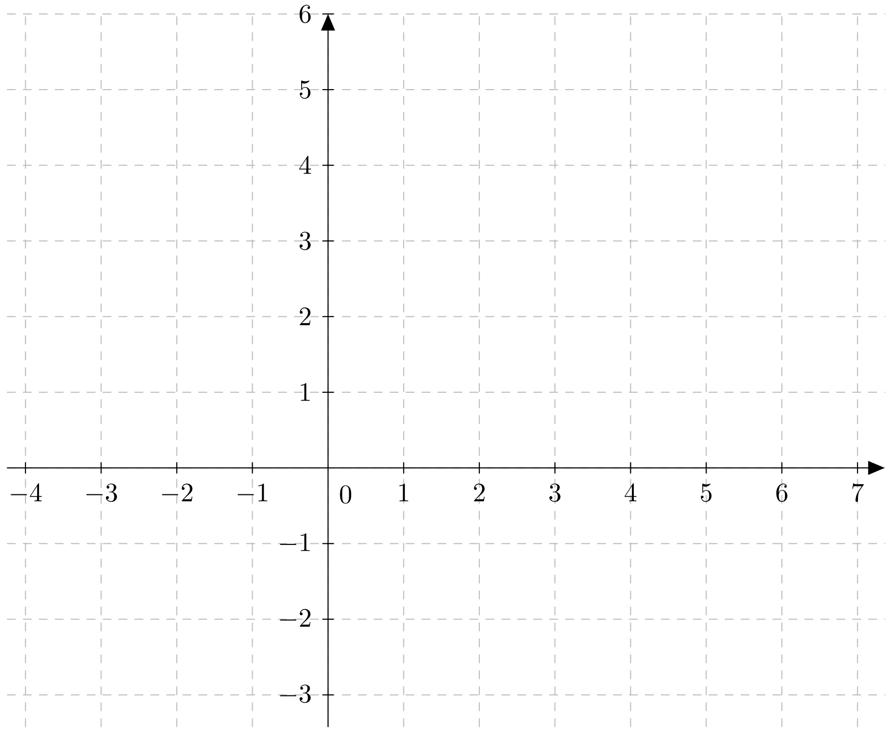
EXEMPLE 1.3. La fonction $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ est la fonction affine associée au polynôme x.



2. La pente et l'ordonnée à l'origine

A toute fonction affine on peut associer deux nombres qui encodent toutes les informations géométriques de cette fonction. Illustrons cela sur un exemple.

EXEMPLE 2.1. Considérons la fonction affine définie par $f(x) = -\dfrac{1}{2}x + 2$. Le graphe de cette fonction est l'ensemble des points



Le graphe de cette fonction ne passe pas par l'origine puisque $f(0) = 2$ – ce qui signifie que le point $(0; 2)$ appartient au graphe de f. On dit que l'ordonnée à l'origine de f vaut 2. J'ai alors tracé la droite en observant simplement que $f(4) = 0$ si bien que $(4, 0) \in G_f$. Ainsi, lorsque j'avance de 4 horizontalement je suis descendu de 2 verticalement, on dit que la pente est de $-2/4 = -0{,}5$.

Définition 2.2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction affine, $f(x) = m \cdot x + h$. Le nombre réel m s'appelle la *pente* de f et le nombre réel h son *ordonnée à l'origine.*

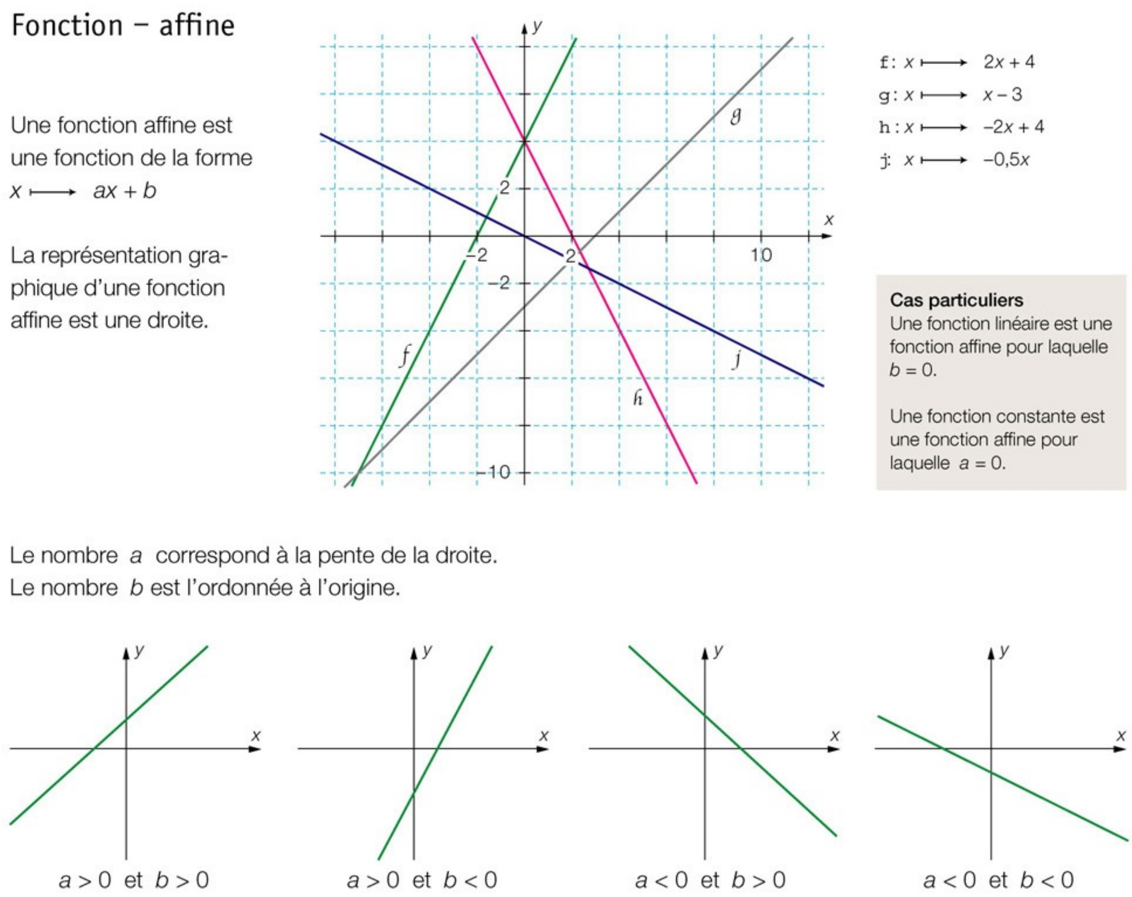
Une fonction *linéaire* est une fonction affine dont l'ordonnée à l'origine est nulle. C'est donc une fonction du type suivant pour un nombre réel m donné :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & mx \end{array}$$

Remarque 2.3. Une fonction *constante* est une fonction affine dont la pente est nulle. C'est en effet une fonction déterminée par le choix d'un nombre réel c et définie par

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & c \end{array}$$

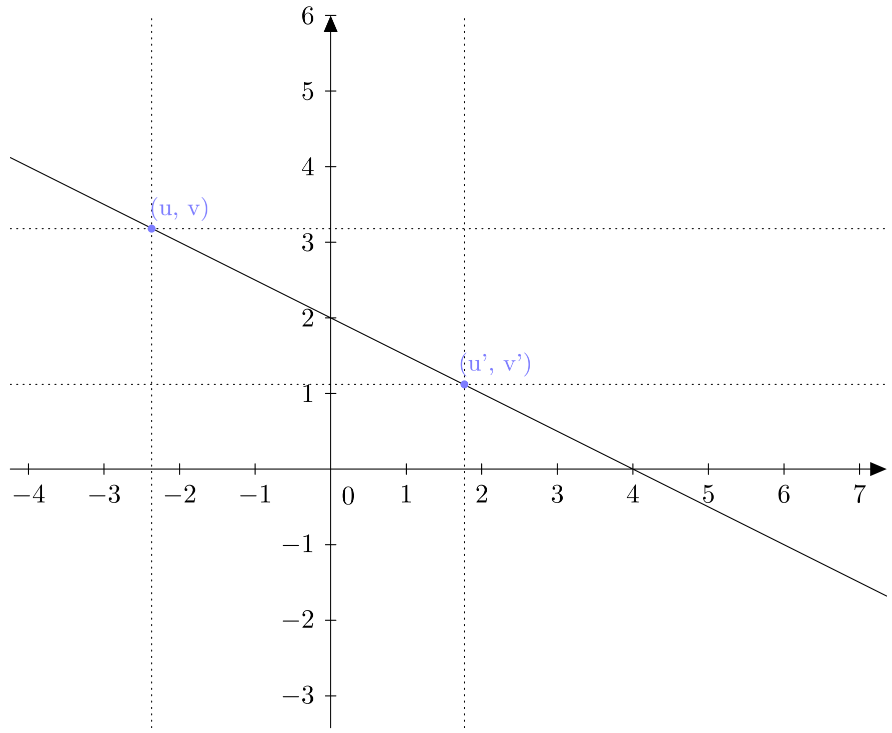
Sauf si cela induit une confusion, on ne distingue plus la notation d'un nombre réel c et de la fonction constante $x \mapsto c$: on dit que c'est la fonction c. Autrement dit, la fonction $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par $c(x) = c$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Notons le cas particulier de la fonction 0, qui est la seule fonction à la fois linéaire et constante.



Nous terminons notre étude des fonctions affines avec une interprétation de la pente en termes de variation. La pente est le rapport de la distance parcourue verticalement et celle parcourue horizontalement (avec signe).

PROPOSITION 2.4. *Soit f une fonction affine dont le graphe passe par les points distincts (u, v) et (u', v'). Alors la pente de la droite est $m = \dfrac{v - v'}{u - u'}$.*

Graphiquement on comprend que la pente mesure la variation de la distance parcourue verticalement par rapport à la distance parcourue horizontalement :



Exemple 2.5. On cherche la fonction affine dont le graphe passe par les points $(6, 2)$ et $(-2, 4)$.

L'origine du mot "linéaire" vient de la propriété suivante. Lorsque nous étudierons l'algèbre linéaire c'est exactement à cela que l'on fait référence.

PROPOSITION 2.6. *Une fonction affine f est linéaire si et seulement si $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.*

DÉMONSTRATION. On commence par le sens le plus facile. Si f est linéaire elle est de la forme $f(x) = mx$. Mais alors, par distributivité,

$$f(x+y) = m(x+y) = mx + my = f(x) + f(y)$$

pour tous nombres réels x et y.

Supposons maintenant que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$. Pour montrer que la fonction affine f est linéaire il suffit de montrer que son ordonnée à l'origine est nulle, autrement dit que $f(0) = 0$. Or

$$f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$$

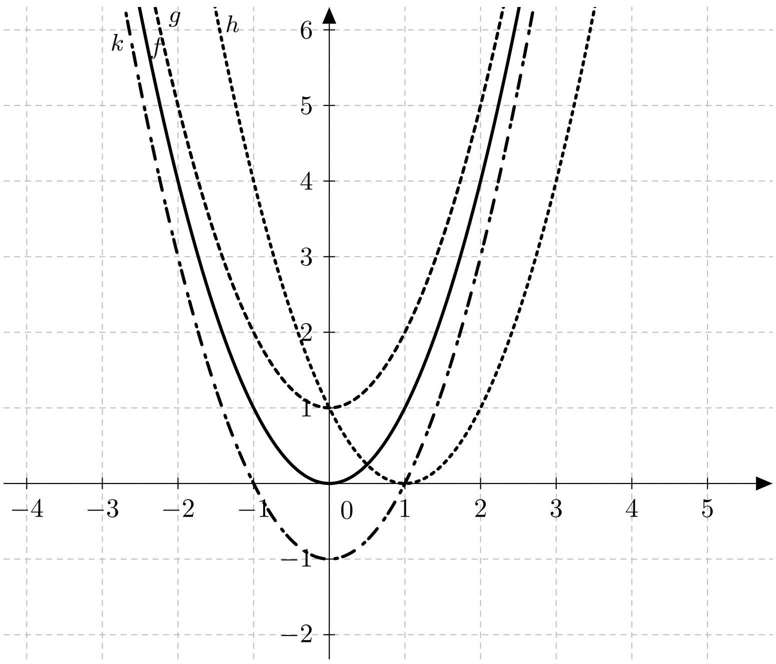
Le seul nombre réel qui est égal à son double est zéro, ce qui conclut la démonstration. $\square$

Observons que si f est linéaire et que l'on définit le nombre $m = f(1)$, alors $f(x) = mx$ pour tout x. Ceci reflète le fait que f est complètement déterminée par l'image de deux points (j'ai choisi 0 et 1), ou encore qu'il y a une seule droite qui passe par les points $(0; 0)$ et $(1; m)$.

3. Fonctions polynomiales

Nous étudions ici les fonctions quadratiques (associées à des polynômes de degré 2). Soient $K = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$ et $K[x]$ l'algèbre de polynômes à coefficients dans K à une indéterminée x. Puisque $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, on peut faire correspondre à chaque polynôme $f = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, une *fonction polynomiale*

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ r &\longmapsto a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \ldots + a_1 r + a_0 \end{aligned}$$



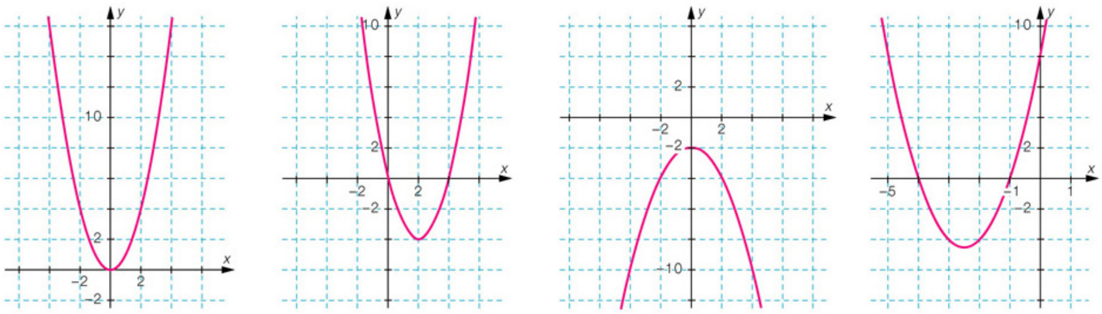
DÉFINITION 3.1. Une fonction *quadratique* est une fonction réelle associée à un polynôme de degré 2, pour $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto ax^2 + bx + c. \end{aligned}$$

Fonction – quadratique

quadratique
quadratus (latin) : le carré

Une fonction quadratique est une fonction de la forme $x \longmapsto ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$.
La représentation graphique d'une fonction quadratique est une parabole.



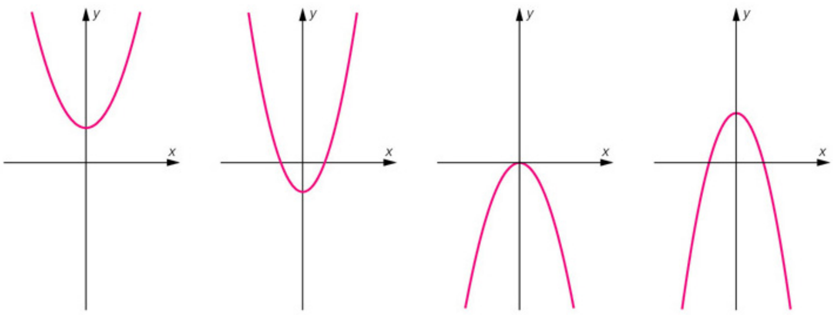
$x \longmapsto x^2$ $(a = 1\ ;\ b = 0\ ;\ c = 0)$

$x \longmapsto x^2 - 4x$ $(a = 1\ ;\ b = -4\ ;\ c = 0)$

$x \longmapsto -0{,}5x^2 - 2$ $(a = -0{,}5\ ;\ b = 0\ ;\ c = -2)$

$x \longmapsto 2x^2 + 10x + 8$ $(a = 2\ ;\ b = 10\ ;\ c = 8)$

Le sommet de la parabole est un minimum de la fonction si $a > 0$
et un maximum de la fonction si $a < 0$.



$a > 0$, $b = 0$, $c > 0$

$a > 0$, $b = 0$, $c < 0$

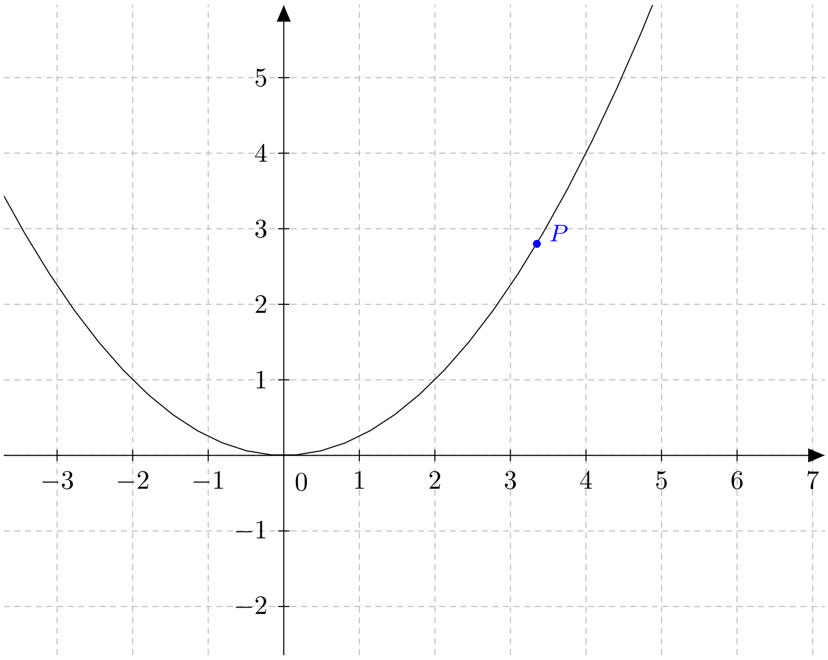
$a < 0$, $b = 0$, $c = 0$

$a < 0$, $b = 0$, $c > 0$

Attention !
Il y a d'autres cas de figures.

Remarque 3.2. Le graphe d'une fonction quadratique est une *parabole*. En géométrie une parabole est le lieu géométrique des points se trouvant à la même distance d'un point et d'une droite donnée. Nous reviendrons à ce sujet l'année prochaine, mais pouvons étudier le graphe de la fonction $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ à titre d'exemple.

Considérons le point $F = (0, 1)$, appelé *foyer* de la parabole, et la droite horizontale d d'équation $y = -1$, appelée *directrice*. Soit $P = (x, \frac{1}{4}x^2)$ un point arbitraire du graphe de notre fonction quadratique. Nous allons montrer que la distance $\overline{PF}$ est égale à la distance de P à d.



Chapitre 6

Les équations

Nous rencontrons nos premières équations dans ce chapitre. C'est historiquement un sujet central des mathématiques puisque bien souvent, l'utilisation de méthodes mathématiques devait permettre de trouver une solution numérique à un problème donné. Nous étudierons principalement les équations dites linéaires, mais nous verrons aussi de nombreux exemples de nature plus complexe. Ils illustreront la théorie générale et nous permettront aussi d'avoir un aperçu du type d'équations que nous étudierons en deuxième année.

1. Définitions et exemples

DÉFINITION 1.1. Soit X un ensemble et $f, g\colon X \to Y$ des fonctions. L'*équation dans X à valeurs dans Y*

$$f(x) = g(x)$$

consiste en le problème de trouver tous les $x \in X$ tels que f et g ont la même valeur. Les éléments $x \in X$ vérifiant cette condition sont appelés *solutions* de l'équation. On appelle *résoudre l'équation dans X* le fait de trouver ses solutions.

DÉFINITION 1.2. L'*ensemble des solutions* d'une équation $f(x) = g(x)$ dans X est l'ensemble $S = \{x \in X | f(x) = g(x)\}$. Une *racine* (ou *zéro*) d'une fonction $f\colon X \to Y$ avec $Y \subset \mathbb{R}$ est une solution de l'équation $f(x) = 0$ dans X.

Une *racine* (ou *zéro*) d'un polynôme $f \in K[x]$ est un zéro de la fonction polynomiale associée. Le polynôme $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$ a pour seule racine le nombre -2. Pour tous les autres nombres réels, $x + 2 \neq 0$ et son carré est donc strictement positif.

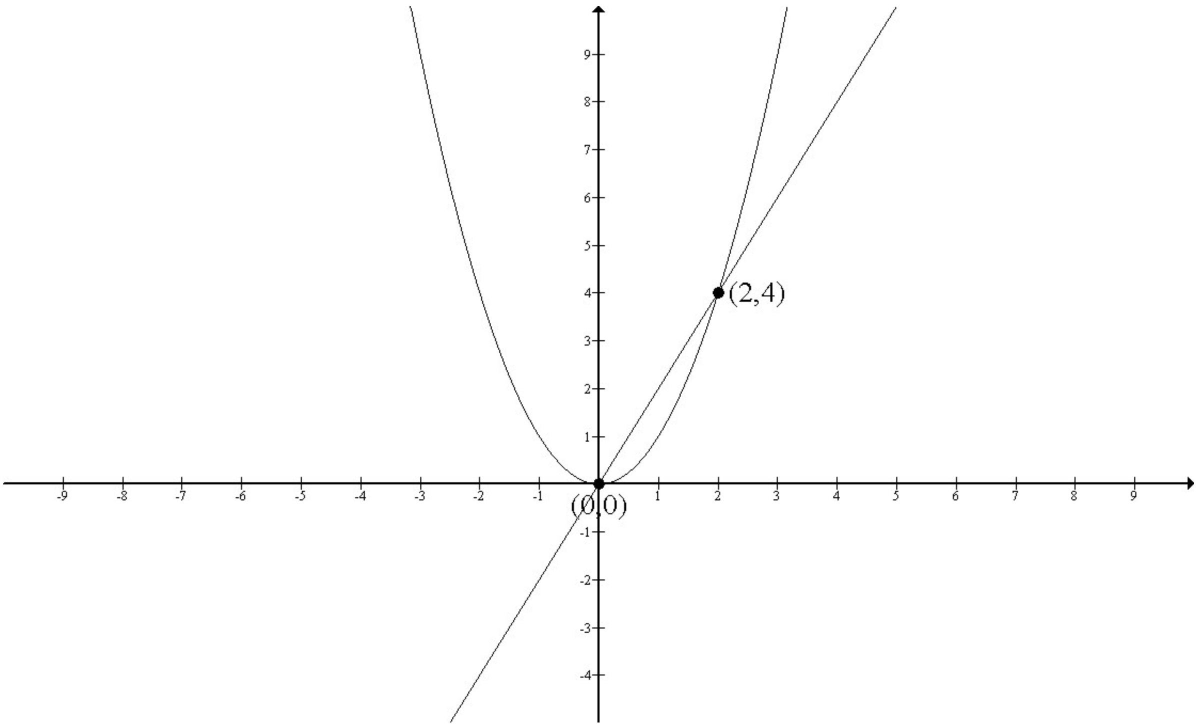
DÉFINITION 1.3. Soit $K = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$. Une *équation polynomiale* à coefficients dans K et à une inconnue est une équation

$$f(x) = g(x)$$

où $f, g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont les fonctions polynomiales associées à des polynômes f et g de $K[x]$.

Ainsi $x^2 - x - 6 = x^2 + 4x + 4$ est une équation polynomiale.

Les graphes suivants illustrent l'équation polynomiale $x^2 = 2x$. On y voit les graphes des fonctions $f(x) = x^2$ (une parabole) et $g(x) = 2x$ (une droite de pente 2). Ils se coupent en $(0,0)$, ce qui veut dire que $f(0) = 0 = g(0)$ et en $(2,4)$ ce qui veut dire que $f(2) = 4 = g(2)$. Les solutions sont donc $x = 0$ et $x = 2$.



Définition 1.4. Deux équations dans X à valeurs dans Y

$$f(x) = g(x) \quad \text{et} \quad h(x) = k(x)$$

sont dites *équivalentes* si elles ont le même ensemble de solutions.

Exemple 1.5. Essayons de résoudre l'équation polynomiale

$$x^2 - x - 6 = x^2 + 4x + 4$$

2. Equivalence d'équations

Nous voyons maintenant quelques règles importantes qui permettent de modifier (simplifier si possible !) une équation pour en obtenir une autre, équivalente à la première.

PROPOSITION 2.1. *Soient $f, g\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions à valeurs réelles. Alors les équations suivantes sont équivalentes :*

(1) $f(x) = g(x)$

(2) $f(x) + h(x) = g(x) + h(x)$ *où $h\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction.*

(3) $f(x) \cdot h(x) = g(x) \cdot h(x)$ *où $h\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction telle que $h(x) \neq 0$ pour tout $x \in X$.*

DÉMONSTRATION. Nous montrons par exemple que toute solution r de l'équation (2) est solution de l'équation (1).

De même toute solution de (1) est aussi solution de (2). On montrera en exercice que toute solution de (1) est solution de (3) et vice-versa. $\square$

Corollaire 2.2. *Soient $f, g\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions à valeurs réelles. L'équation $f(x) = g(x)$ est équivalente à*

(1) $f(x) + a = g(x) + a$ pour une constante $a \in \mathbb{R}$,

(2) $f(x) \cdot a = g(x) \cdot a$ pour une constante non nulle *$a \in \mathbb{R}$.*

(3) $f(x) - h(x) = g(x) - h(x)$ où $h\colon X \to \mathbb{R}$ est une fonction.

Démonstration. Les équations (1) et (2) sont équivalentes car on peut additionner ou multiplier par la fonction constante $c_a\colon X \to \mathbb{R}$.

L'équation (3) est équivalente puisqu'on peut additionner la fonction $-h\colon X \to \mathbb{R}$ définie par $(-h)(x) = -h(x)$. $\square$

En particulier, toute équation à valeurs réelles est équivalente à une équation du type $h(x) = 0$, car on peut soustraire $g(x)$ de part et d'autre :

$$f(x) = g(x) \Longleftrightarrow f(x) - g(x) = g(x) - g(x) \Longleftrightarrow (f - g)(x) = 0$$

On pose donc $h = f - g$ où $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$.

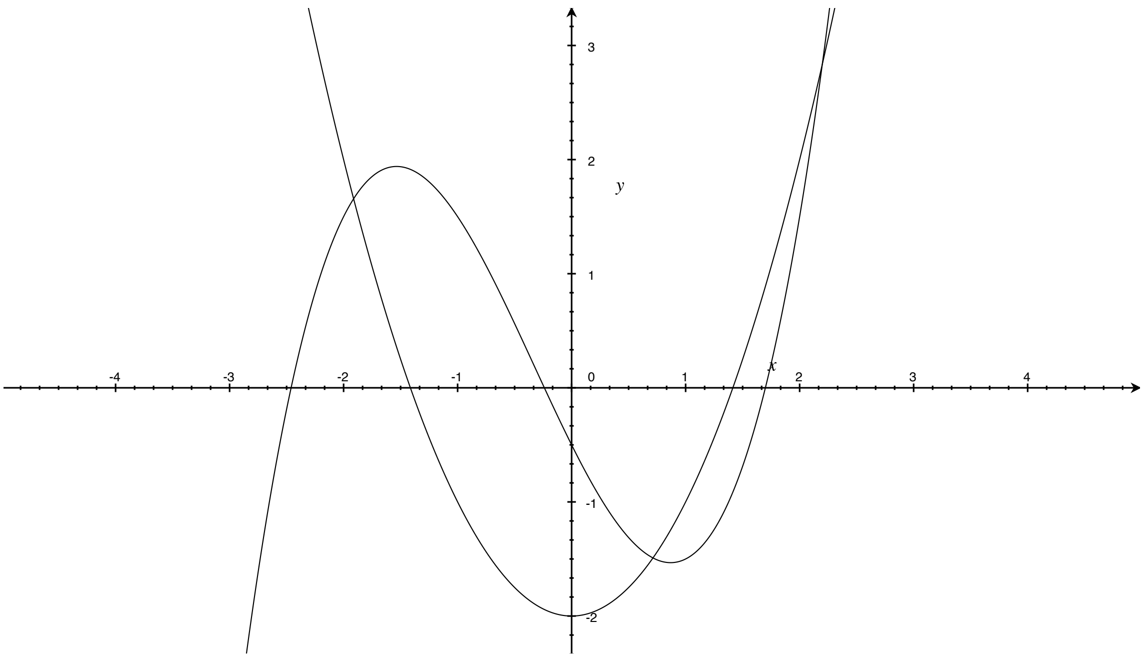
Exemple 2.3. L'équation

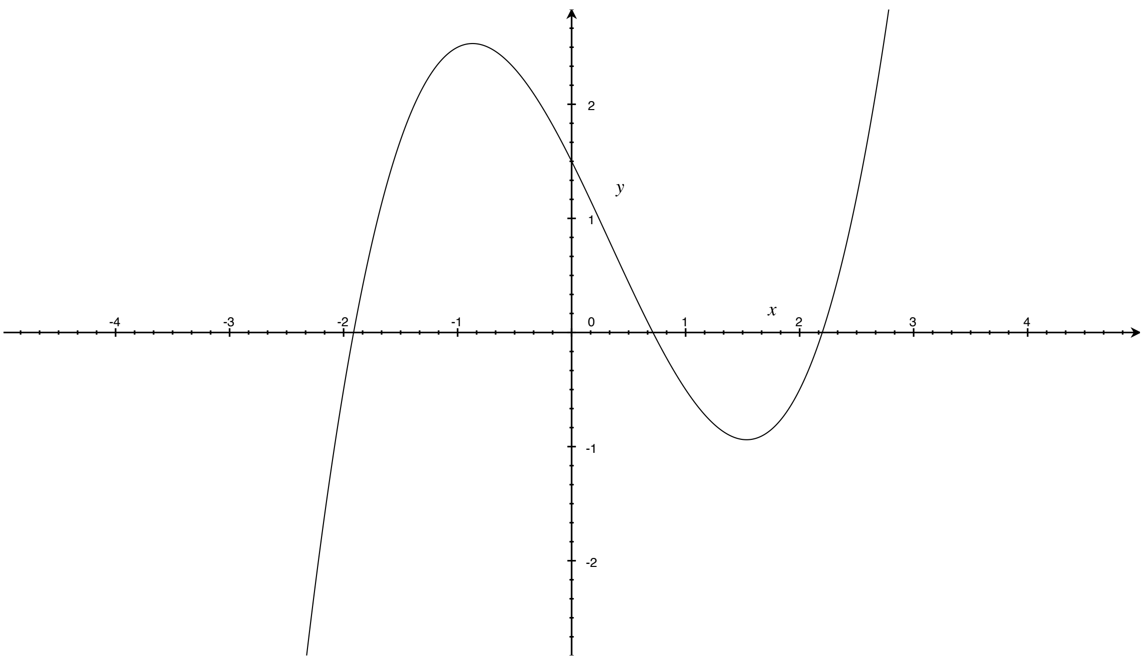
$$(x^2 + 12)(2x - 1) = (x^2 + 12)(x + 1)$$

Exemple 2.4. Voici les graphes des fonctions polynomiales

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 - 2$$

L'équation polynomiale $f(x) = g(x)$ a pour solution les abscisses des points d'intersection des graphes :





En soustrayant $g(x)$ on obtient l'équation $\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} - 2x + \dfrac{3}{2} = 0$ dont on voit les solutions aux points d'intersection du graphe avec l'axe horizontal.

EXEMPLE 2.5. Attention ! Toutes les solutions de l'équation $x = 2$ sont solutions de l'équation $x^2 = 2x$, mais ces équations ne sont pas équivalentes ! Dans le premier cas $S = \{2\}$, dans le deuxième $S = \{0; 2\}$.

Par contre la deuxième équation est équivalente à l'équation $x^2 + 5 = 2x + 5$ et aussi à l'équation $x^4 + x^2 = 2x^3 + 2x$.

3. Opérations sur les fonctions

Nous avons vu qu'il est pratique d'ajouter une fonction à une équation pour en faciliter la résolution. Nous expliquons ici comment on additionne et multiplie des fonctions réelles. On utilise l'addition et la multiplication dans l'ensemble d'arrivée !

DÉFINITION 3.1. Soit X un ensemble et $f, g : X \to \mathbb{R}$ deux fonctions. La *somme* des deux fonctions f et g est la nouvelle fonction

$$\begin{array}{rccc} f+g: & X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x)+g(x) \end{array}$$

De même la *différence* $f - g$ est la fonction qui associe à tout $x \in X$ le nombre $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$.

Par exemple si $f(x) = 2x^2 - 1$ et $g(x) = 1 - x^2$ sont deux fonctions polynomiales, alors leur somme $f + g$ est donnée par

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = (2x^2 - 1) + (1 - x^2) = x^2$$

DÉFINITION 3.2. Soit X un ensemble et $f, g : X \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Le *produit* des deux fonctions f et g est la nouvelle fonction

$$\begin{array}{rccc} f \cdot g: & X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) \cdot g(x) \end{array}$$

Si $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in X$, on définit la *fonction quotient*

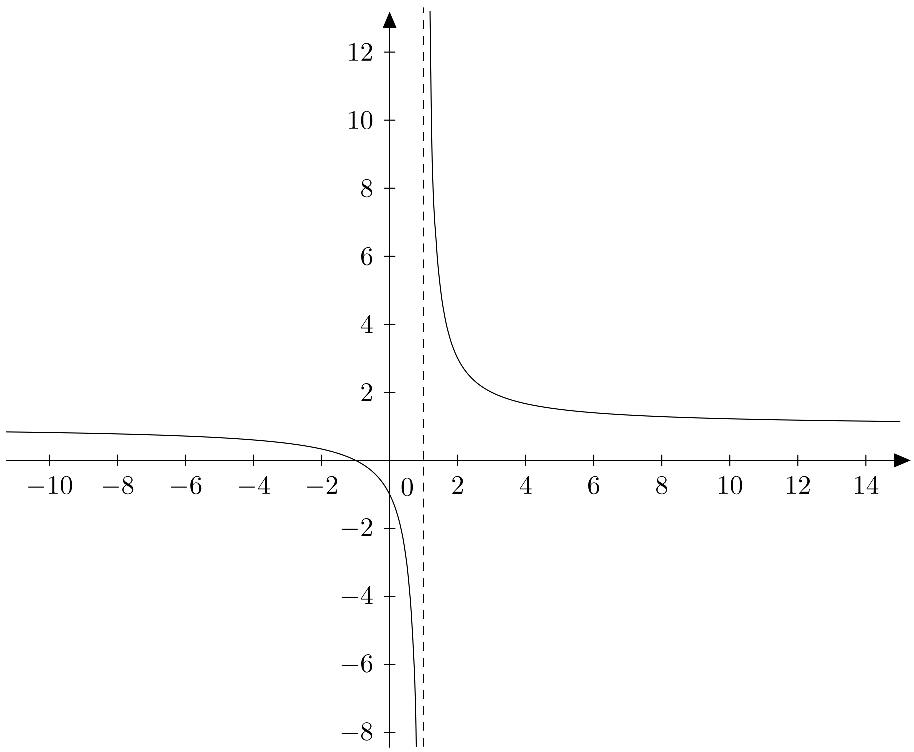
$$\begin{array}{rccc} \dfrac{f}{g}: & X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{f(x)}{g(x)} \end{array}$$

On remarque que $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$. Comme pour la composition de deux fonctions, il faut parfois restreindre l'ensemble de définition pour pouvoir définir le quotient. En effet si la fonction g s'annule parfois, alors il faut choisir $X' \subset X$ le sous-ensemble de X des éléments x pour lesquels $g(x) \neq 0$.

EXEMPLE 3.3. Nous voulons étudier le quotient de la fonction réelle $f(x) = x+1$ par $g(x) = x - 1$. Comme $g(1) = 0$ mais que $g(x) \neq 0$ pour tout $x \neq 1$, ce quotient est défini sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Appelons $h = \frac{f}{g}$. La fonction h associe à tout nombre réel différent de 1 le quotient $\frac{x+1}{x-1}$. Le graphe de h est constitué des points de $\mathbb{R}^2$ de la forme $(x, \frac{x+1}{x-1})$. Autrement dit l'ordonnée y vérifie l'équation

$$y = \frac{x+1}{x-1} \quad \Leftrightarrow \quad yx - y = x + 1$$

C'est une équation polynomiale du deuxième degré en x et y. Nous verrons l'année prochaine que le graphe d'une telle équation est une hyperbole. Le fait que la fonction n'est pas définie en 1 se traduit ici par une *asymptote verticale* en $x = 1$:



REMARQUE 3.4. Nous pouvons additionner et multiplier les fonctions entre elles. Quelle structure se cache derrière ces opérations ? Les fonctions réelles munies de

l'addition forment un groupe abélien et le produit lui donne une structure d'anneau. Ce n'est pas un corps car $1/f$ n'existe que pour les fonctions qui ne s'annulent jamais.

4. Les équations polynomiales

Nous continuons notre étude des équations et effectuerons en détail celle des équations dites linéaires (on devrait plutôt dire affines). Nous avons déjà parlé de l'équivalence de certaines équations : on peut modifier une équation sans en changer les solutions en ajoutant une fonction ou en multipliant par une fonction (qui ne s'annule pas). Nous savons en particulier que toute équation de la forme $f(x) = g(x)$ est équivalente à l'équation $(f - g)(x) = 0$. Autrement dit, toute équation se résout en cherchant les zéros d'une fonction.

Définition 4.1. Soit $f(x) = g(x)$ une équation polynomiale. Le *degré de l'équation* est le degré du polynôme $f - g$.

Exemple 4.2. Trouve le degré et résous l'équation polynomiale

$$x^5 - 3x^2 + 9 = x^5 - 4x^2 + 2x + 9$$

Définition 4.3. Si f et g sont des fonctions à valeurs dans Y, alors l'*ensemble de définition ED* de l'équation $f(x) = g(x)$ est l'intersection de $ED(f)$ et $ED(g)$.

Observons que l'équation $f(x) = g(x)$ n'a simplement pas de sens en dehors de ED, puisque $f(x)$ ou $g(x)$ n'est pas défini.

Exemple 4.4. Trouve l'ensemble de définition de l'équation $\sqrt{x^5} = \sqrt{4x^3}$ et résous-la !

5. Les équations linéaires (ou affines)

Les seules équations que nous apprenons cette année à résoudre de manière systématique sont les équations polynomiales de degré ≤ 1. Elles sont donc, après réduction, de la forme

$$\boxed{ax + b = 0}$$

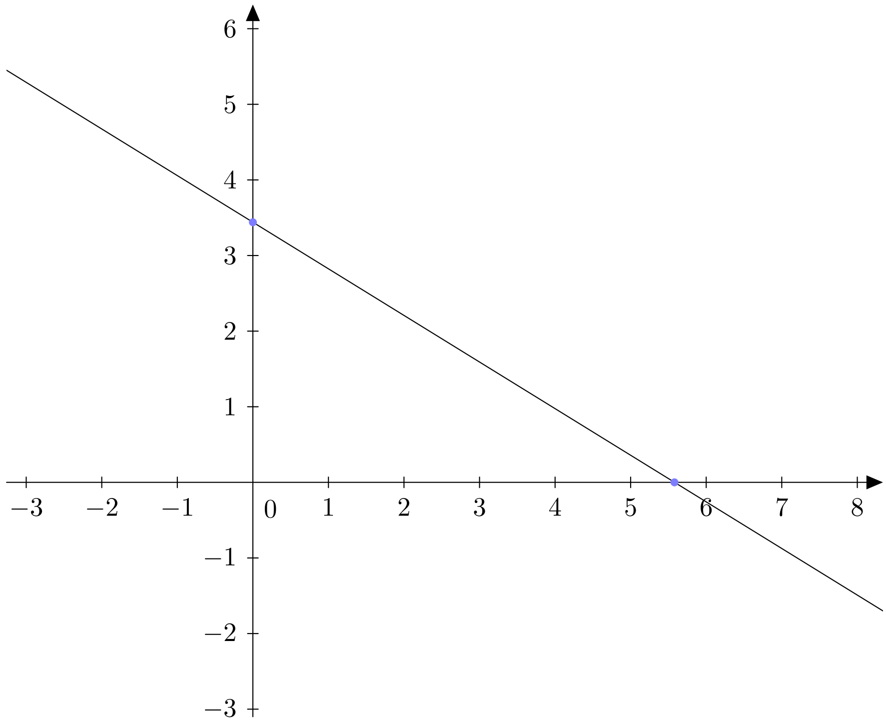
où $a, b \in \mathbb{R}$ et x est l'inconnue que l'on cherche.

L'équation est de degré zéro si $a = 0$. Dans ce cas l'équation est de la forme $b = 0$.

(1) si $b = 0$, alors $S = \mathbb{R}$. Tout nombre réel est solution de l'équation $0 = 0$.

(2) si $b \neq 0$, alors $S = \emptyset$. Il n'y a pas de solution.

Par exemple l'équation $1 = 0$ n'a aucune solution. Sinon, $a \neq 0$ et notre équation est de degré 1. Les solutions de l'équation $ax + b = 0$ sont donc les nombres réels x pour lesquelles la fonction affine $f(x) = ax + b$ s'annule. Le graphe d'une telle fonction est une droite dont la pente vaut a et l'ordonnée à l'origine vaut b. La solution de l'équation se lit graphiquement sur l'axe horizontal des x, à l'endroit où la droite coupe cet axe.



La solution générale de $ax + b = 0$ s'obtient en deux pas.

Exemple 5.1. Une jeune renarde met au monde un renardeau la première année, deux la suivante, puis trois chaque année. Au bout de combien d'années aura-t-elle mis au monde 20 renardeaux ou plus ?

6. D'autres équations

L'année prochaine nous apprendrons à résoudre systématiquement les équations quadratiques (de de degré 2) et des systèmes d'équations linéaires à plusieurs inconnues. Pour terminer le chapitre des équations cette année nous verrons certaines équations quadratiques simples que l'on peut résoudre grâce aux méthodes de factorisation et/ou des identités remarquables. Nous verrons aussi un problème à deux inconnues pour nous mettre l'eau à la bouche !

EXEMPLE 6.1. On cherche à résoudre l'équation $4x^2 - 12x + 9 = 0$.

EXEMPLE 6.2. Trouver les solutions de l'équation $(2x+5)(x^2+x-1) = 2x^2+5x$.

EXEMPLE 6.3. Trouver les solutions de l'équation

$$\frac{x^2 - 5x}{x + 10} = \frac{-6}{x + 10}$$

EXEMPLE 6.4. Problème : Aujourd'hui mon père a le triple de mon âge, mais dans 12 ans il en aura le double. Quels sont nos âges aujourd'hui ?

Chapitre 7

Les relations

Nous avons souvent rencontré des objets mathématiques qui ressemblaient à des fonctions, mais qui n'en étaient pas, soit parce que l'image d'un élément n'était pas bien définie, soit parce qu'elle n'existait même pas. Il s'agissait en fait de relations. Nous généralisons donc dans ce chapitre la notion de fonction. Elle est nécessaire puisque l'on rencontre dans la vie de tous les jours des exemples de paires d'objets qui sont en relation naturellement, mais ne proviennent pas d'une fonction.

Les méthodes que nous utiliserons pour étudier et comprendre les relations seront les mêmes que celles que nous avons développées pour les fonctions. Nous représenterons donc certaines relations sous forme schématique, d'autres sous forme graphique.

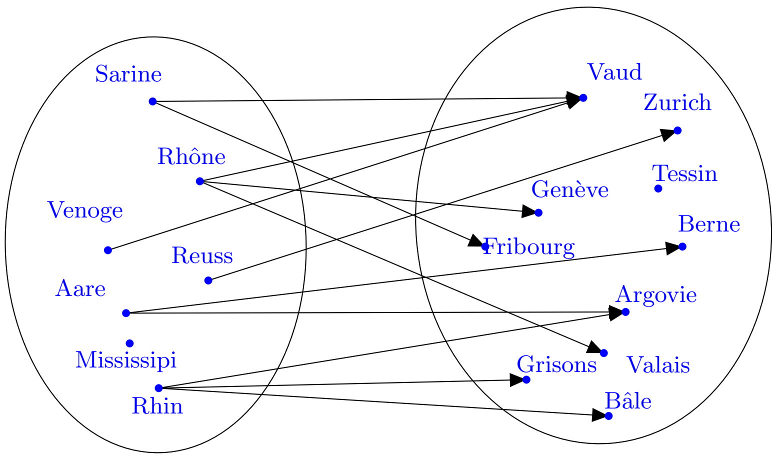
1. Définitions et exemples

Dans cette première section nous introduisons immédiatement la représentation schématique d'une relation et verrons de nombreux exemples qui motivent l'étude de ce sujet.

DÉFINITION 1.1. Une *relation* entre deux ensembles X et Y (ou de X vers Y) est la donnée, pour chaque paire $(x, y) \in X \times Y$, d'une affirmation $x\mathcal{R}y$ qui peut être vraie ou fausse. Lorsqu'elle est vraie, on écrit « $x\mathcal{R}y$ » et on dit que « x est en relation avec y ». Une relation donnée sous cette forme est dite en *représentation logique*.

On note $\mathcal{R}\colon X \rightsquigarrow Y$ pour une relation $\mathcal{R}$ entre X et Y. L'ensemble X est appelé l'*ensemble de départ* et Y l'*ensemble d'arrivée* de la relation, exactement comme pour les fonctions.

On peut donner une *représentation schématique* d'une relation en représentant les ensembles X et Y et en reliant par une flèche les paires (x, y) telles que $x\mathcal{R}y$ est vraie. Considérons par exemple la relation “traverse” : $\{\text{Fleuves}\} \rightsquigarrow \{\text{Cantons suisses}\}$:



Le relation entre un fleuve et un canton est vraie si ce fleuve traverse ce canton.

Voici maintenant quelques exemples importants. La représentation schématique n'est pas forcément la meilleure....

Exemple 1.2. **La relation d'égalité.** Sur un ensemble X, on définit une relation de X vers lui-même

$$=: X \rightsquigarrow X$$

C'est donc une relation qui porte sur les paires $(x, y) \in X \times X$. Elle est donnée par les affirmations $x = y$ pour tous $x, y \in X \times X$. La relation n'est par conséquent vraie que si x et y sont égaux. La relation $1 = 2$ est fausse bien sûr.

Exemple 1.3. **Relation d'ordre partiel.** Sur $X = \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$, on définit une relation de X vers lui-même

$$\leq: X \rightsquigarrow X$$

Elle est donnée par les affirmations $x \leq y$ pour tous $(x, y) \in X \times X$. La relation n'est par conséquent vraie que si x est plus petit ou égal à y.

Il existe des relations d'ordre partiel sur d'autres ensembles que les ensembles de nombres $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$.

DÉFINITION 1.4. Une relation $\mathcal{R}$ s'appelle une *relation d'ordre partiel* si elle est

(1) *réflexive* : $x\mathcal{R}x$ pour tout $x \in X$;

(2) *transitive* : si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, alors $x\mathcal{R}z$;

(3) *antisymétrique* : si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$, alors $x = y$.

Il y a de nombreuses relations qui apparaissent naturellement dans les sujets mathématiques que nous avons étudié cette année : la relation d'isométrie pour les figures géométriques du plan, la relation d'être divisible par 3, d'être le carré d'un nombre, celle d'être contenu pour des parties d'un ensemble, etc.

Par exemple, considérons la relation $\mathcal{R} =$ « est le triple de »: $\mathbb{N} \rightsquigarrow \mathbb{N}$.

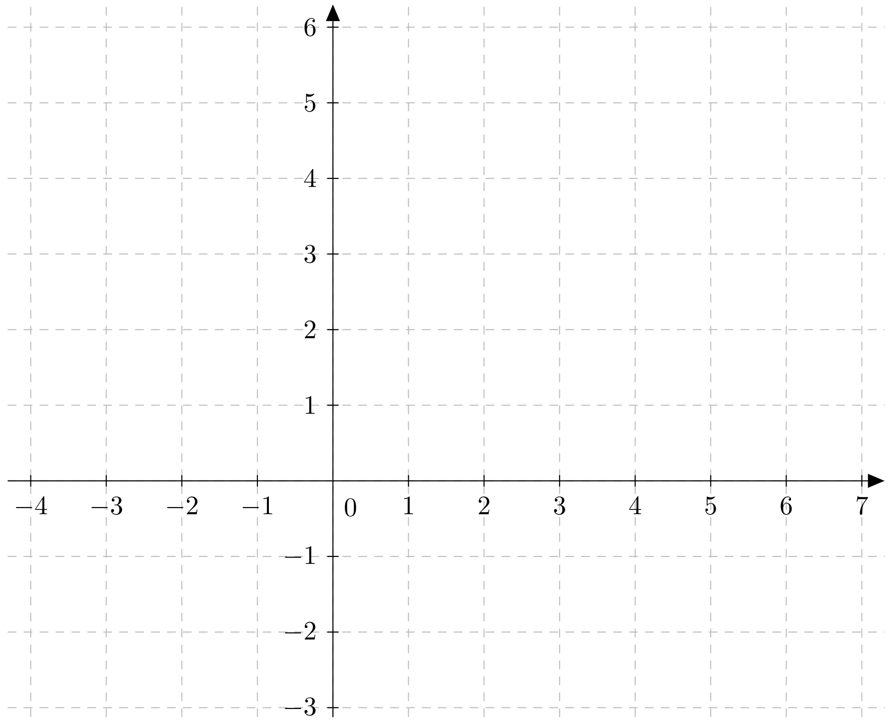
2. Représentation graphique

Comme pour les fonctions, la représentation graphique est souvent meilleure pour représenter une relation, surtout si elle concerne des nombres.

DÉFINITION 2.1. Soit $\mathcal{R}$ une relation entre X et Y. Le *graphe* de $\mathcal{R}$ (ou *représentation ensembliste* de $\mathcal{R}$), noté $G_{\mathcal{R}}$, est le sous-ensemble du produit cartésien $X \times Y$ des couples (x, y) tels que $x\mathcal{R}y$. Autrement dit,

$$G_{\mathcal{R}} = \{(x, y) \in X \times Y \mid x\mathcal{R}y\} \subset X \times Y$$

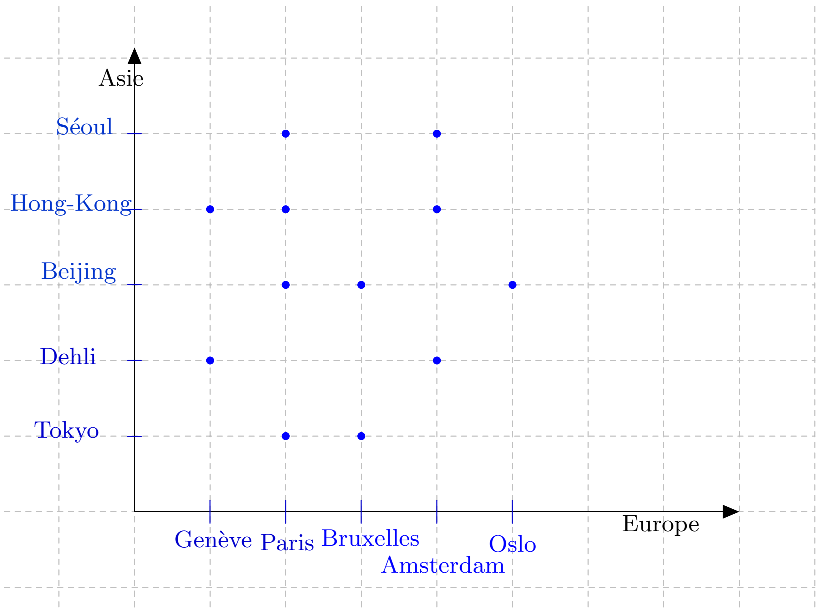
EXEMPLE 2.2. Le graphe de la relation $\leq$ sur $\mathbb{R}$ est le suivant. Le point $(2; 4)$ par exemple appartient au graphe puisque $2 \leq 4$:



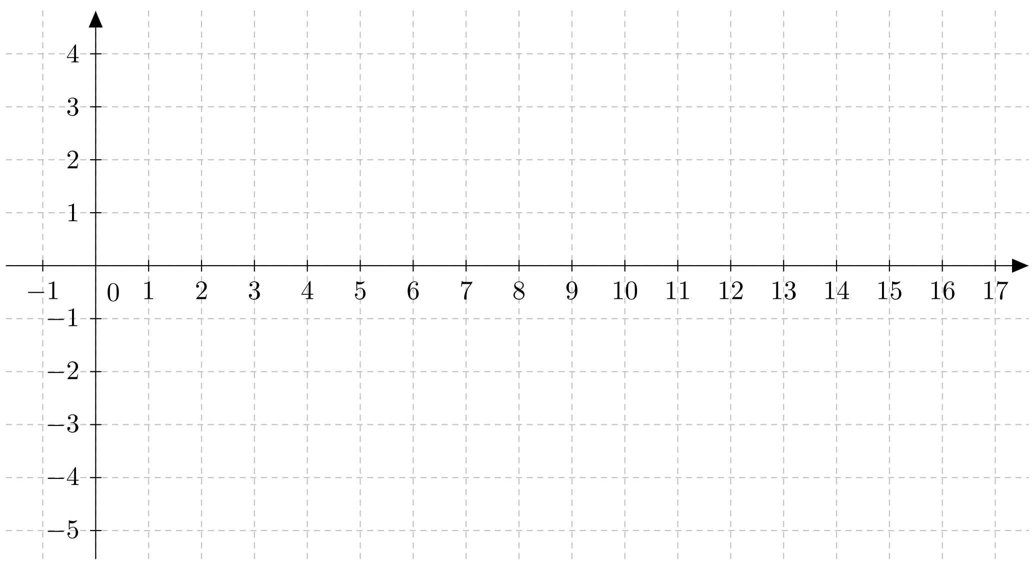
Remarque 2.3. Etant donné un sous-ensemble $G \subset X \times Y$, il existe une relation « canonique » dont c'est le graphe. On la note $\mathcal{R}_G \colon X \rightsquigarrow Y$ et elle est définie comme suit : Pour $(x, y) \in X \times Y$, on a $x \mathcal{R}_G y$ si et seulement si $(x, y) \in G$. Ainsi, tout sous-ensemble de $X \times Y$ est le graphe d'une relation, alors que les graphes de fonctions ont la propriété bien particulière de ne comporter, pour un x fixé dans X, qu'un élément de la forme (x, y).

A toute relation de X vers Y correspond un sous-ensemble de $X \times Y$ et réciproquement, à tout sous-ensemble de $X \times Y$ correspond une relation de X vers Y. Si on ne s'intéresse qu'à connaître les paires (x, y) telles que $x \mathcal{R} y$ est vraie, mais pas à la forme spécifique de la phrase $x \mathcal{R} y$, la donnée des ensembles X, Y et du graphe $G_{\mathcal{R}}$ contient la même information que la relation $\mathcal{R}$. Dans la suite, par abus de langage, on ne différencie plus les notations d'une relation $\mathcal{R} \colon X \rightsquigarrow Y$ et de son graphe $\mathcal{R} \subset X \times Y$.

EXEMPLE 2.4. On définit la relation « il existe une compagnie aérienne qui relie » de l'ensemble des villes européennes vers l'ensemble des villes d'Asie. Le graphe est ici moins bien adapté qu'une représentation schématique :



En revanche, la relation « être le carré de » : $\mathbb{N} \rightsquigarrow \mathbb{Z}$ admet une représentation graphique intéressante, qu'on dessine par de gros points dans l'illustration suivante :



Pour obtenir le graphe de la relation « être le carré de » : $\mathbb{N} \rightsquigarrow \mathbb{R}$, il faut

3. Composition et relation réciproque

Considérons les ensembles $A = \{\text{auteurs de livres}\}$, $B = \{\text{manuscrits}\}$ et $C = \{\text{maisons d'édition}\}$ et les relations

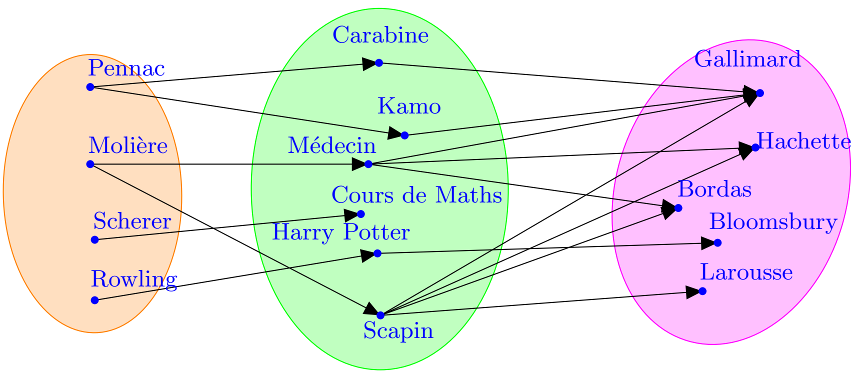
$$\mathcal{R}_1 \colon A \rightsquigarrow B \quad a\mathcal{R}_1 b \iff a \text{ est l'auteur de } b,$$
$$\mathcal{R}_2 \colon B \rightsquigarrow C \quad b\mathcal{R}_2 c \iff b \text{ a été édité par } c.$$

Considérons la relation $\mathcal{R}_3$ définie par $\mathcal{R}_3 \colon A \rightsquigarrow C \quad a\mathcal{R}_3 c$ si et seulement si a a été édité chez c. Etant donné les relations $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$, on peut obtenir la relation $\mathcal{R}_3$ de la manière suivante :

$$a\mathcal{R}_3 c \iff \text{il existe un } b \in B \text{ tel que } a\mathcal{R}_1 b \text{ et } b\mathcal{R}_2 c.$$

$\mathcal{R}_3$ est la relation « composée » des relations $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$.

Schématiquement on peut se représenter la situation comme ceci :



Définition 3.1. Soient A, B et C des ensembles, $A \overset{\mathcal{R}}{\rightsquigarrow} B \overset{\mathcal{S}}{\rightsquigarrow} C$ des relations. La *relation composée* $\mathcal{S} \circ \mathcal{R} \colon A \rightsquigarrow C$ est définie par

$$a(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})c \Leftrightarrow \text{ il existe } b \in B \text{ tel que } a\mathcal{R}b \text{ et } b\mathcal{S}c.$$

On pourrait illustrer cette définition de manière graphique, mais nous préférons parler du dernier concept de ce chapitre, celui de relation réciproque.

DÉFINITION 3.2. Soit $\mathcal{R}\colon X \rightsquigarrow Y$ une relation. La *relation réciproque* (ou *inverse*) de $\mathcal{R}$ est la relation de Y vers X notée $\mathcal{R}^{-1}\colon Y \rightsquigarrow X$ et définie par

$$y\mathcal{R}^{-1}x \Leftrightarrow x\mathcal{R}y.$$

EXEMPLE 3.3. Soit $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. On définit une relation $\mathcal{R}$ en donnant son graphe $\mathcal{R} = \{(2, 3), (3, 3), (5, 4), (6, 5), (6, 7)\}$. On observe

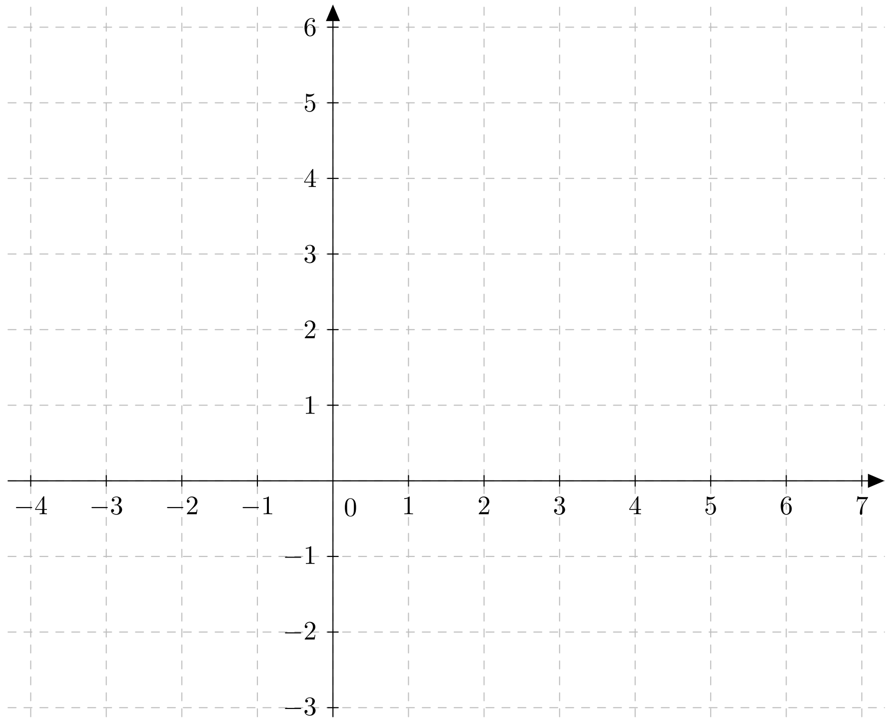
DÉFINITION 3.4. Soit $\mathcal{R}\colon X \rightsquigarrow Y$ une relation. La *restriction* de $\mathcal{R}$ au sous-ensemble $A \subset X$ est la relation $\mathcal{R}_A\colon A \rightsquigarrow Y$ définie par

$$x\mathcal{R}_Ay \iff x\mathcal{R}y, \text{pour tous } (x, y) \in A \times Y.$$

De même, on définit la restriction $\mathcal{R}^A$ de $\mathcal{R}$ au sous-ensemble $A \subset Y$. Le plus grand sous-ensemble $A \subset X$ tel que $\mathcal{R}_A$ soit une fonction s'appelle l'*ensemble de définition* (abrégé ED) de la relation $\mathcal{R}$.

Une relation $\mathcal{R}\colon \emptyset \rightsquigarrow Y$ est toujours une fonction (injective, non surjective à moins que $Y = \emptyset$). Donc l'ensemble de définition existe toujours : au pire il est vide.

EXEMPLE 3.5. Considérons la relation $\mathbb{R} \rightsquigarrow \mathbb{R}$ où x est en relation avec son carré x^2. Quel est l'ensemble de définition de la relation réciproque ? Regardons les graphes pour commencer.



PROPOSITION 3.6. *Soit $f\colon A \longrightarrow B$ une fonction. Les affirmations suivantes sont alors équivalentes :*

(1) La relation réciproque de f est une fonction.

(2) Il existe une fonction $g\colon B \longrightarrow A$ telle que

$$g \circ f = \mathrm{Id}_A \text{ et } f \circ g = \mathrm{Id}_B$$

(3) La fonction f est une bijection.

DÉMONSTRATION. Nous montrons uniquement (1) $\Rightarrow$ (3) : si la relation réciproque $\mathcal{S}$ de f est une fonction, alors f est bijective. Pour montrer l'injectivité, considérons deux éléments x et x' de X tels que $f(x) = y = f(x')$. Alors y est en relation avec x et x' par la relation réciproque $\mathcal{S}$. Comme $\mathcal{S}$ est une fonction, alors $x = x'$, ce qui montre l'injectivité. Quant à la surjectivité, considérons $y \in Y$. Comme $\mathcal{S}$ est une fonction y est en relation avec un (seul) $x \in X$. Ainsi $y\mathcal{S}x$, ce qui signifie que $y = f(x)$.

Pour montrer (2) on choisira bien sûr $g = f^{-1}$ la relation réciproque de f. □

Lorsque l'une, et donc toutes !, les propriétés de la proposition sont vérifiées, on dit que f est *inversible* ou *admet une inverse*. On note $f^{-1}\colon B \longrightarrow A$ l'inverse de f lorsqu'elle existe (c'est-à-dire lorsque sa relation réciproque est une fonction).

EXEMPLE 3.7. On considère la fonction affine $f(x) = 3x - 5$. On montre d'abord que f est une bijection.

En fait on peut montrer que l'inverse d'une fonction affine de pente m a pour pente l'inverse m^{-1} de m.

Chapitre 8

Eléments de logique

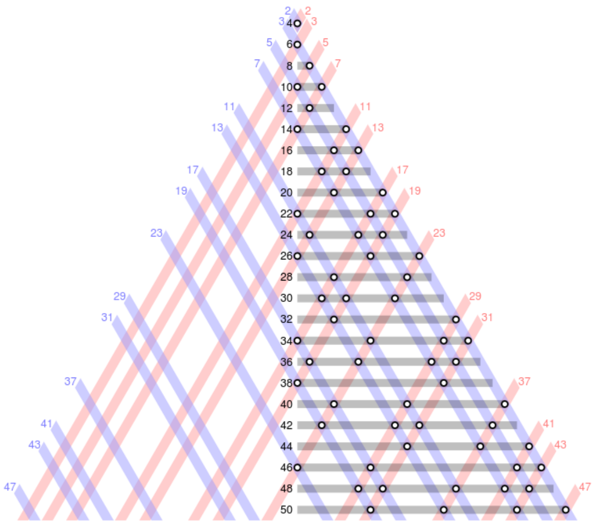
C'est le moment de faire une petite pause et de s'intéresser à nouveau à notre manière de raisonner. Nous avons maintenant des bases solides de théorie des ensembles et avons démontré de nombreux résultats par différents types de démonstrations. Nous avons mis cela en pratique en géométrie plane avec des démonstrations basées sur les axiomes, et dans ce fascicule également. Nous revenons d'abord sur la terminologie, puis sur la démonstration par contraposée. Nous terminerons le cours avec le raisonnement par récurrence (que nous avons déjà rencontré dans certains exercices).

1. Les affirmations

Définition 1.1. Une *affirmation* est une phrase pour laquelle il fait sens de demander si elle est vraie ou fausse, et qui est soit vraie, soit fausse.

Exemple 1.2. **Sophisme.** Un sophisme est un raisonnement fallacieux, les raisons peuvent être multiples. Par exemple, la phrase « La deuxième partie de cette phrase est vraie et la première partie de cette phrase est fausse » est-elle vraie ou fausse ? Si elle est vraie, alors la première partie de la phrase est fausse. Or celle-ci affirme que la deuxième partie est vraie. Comme elle est fausse, c'est que la deuxième partie est fausse. Contradiction ! Il est impossible que la phrase soit vraie ou fausse. Ce n'est pas une affirmation !

Exemple 1.3. **La conjecture de Goldbach.** La phrase « Tout nombre entier pair supérieur à 3 est somme de deux nombres premiers » est une affirmation. Elle est soit vraie, soit fausse, même si aujourd'hui encore on ne connaît pas la réponse... Formulée en 1742 par Christian Goldbach, c'est l'un des plus vieux problèmes non résolus de la théorie des nombres. Voici une jolie illustration tirée de Wikipédia pour les nombres pairs ≤ 50 :



Définition 1.4. La *disjonction* de deux affirmations A et B est notée $A \cup B$. Elle est vraie si A ou B est vraie. La *conjonction* de deux affirmations A et B est notée $A \cap B$. Elle est vraie si A et B sont vraies.

Remplissons les tables de vérité de la disjonction et de la conjonction de deux affirmations :

$A \backslash B$	V	F
V		
F		

$A \backslash B$	V	F
V		
F		

Exemple 1.5. Soit A l'affirmation « Il existe un nombre réel a tel que l'équation $x^2 - a = 0$ n'a aucune solution » et B l'affirmation « Il existe un nombre réel a tel que l'équation $x^2 - a = 0$ a trois solution ».

Définition 1.6. La *négation* d'une affirmation A est l'affirmation notée non A, ou encore $\neg A$. Elle est vraie lorsque A est fausse et fausse lorsque A est vraie.

La négation de « 6 est un nombre premier » est « 6 n'est pas un nombre premier ». La négation de « Il existe un nombre naturel divisible par 100 » est « Aucun nombre naturel n'est divisible par 100 ».

EXEMPLE 1.7. On voit sur les tables de vérité que la négation de $A \cup B$ est $\neg A \cap \neg B$.

De même la négation de $A \cap B$ est $(\neg A) \cup (\neg B)$. On peut le voir en utilisant la formule précédente et en remarquant que $\neg(\neg A) = A$.

2. Le raisonnement logique

Nos raisonnements logiques sont basés sur l'implication. On part d'une hypothèse A et on conclut B (parfois en passant par de nombreuses étapes intermédiaires). La proposition suivante devrait en fait être utilisée comme définition de l'implication logique.

PROPOSITION 2.1. *Soient A et B deux affirmations. Alors $(\neg A) \cup B$ est une affirmation équivalente à $A \Rightarrow B$.*

DÉMONSTRATION. L'affirmation $\neg A$ ou B est vraie si A est fausse ou si B est vraie. Ainsi, si A est vraie, il faut que B soit vraie ! C'est ce que nous comprenons par « A implique B ». □

En d'autres mots, si l'hypothèse A est fausse, alors l'affirmation $A \Rightarrow B$ est vraie. Ceci explique pourquoi la preuve de la contraposée d'une affirmation démontre cette affirmation.

COROLLAIRE 2.2. *Soient A et B deux affirmations. Alors $A \Rightarrow B$ est une affirmation équivalente à $\neg B \Rightarrow \neg A$.*

DÉMONSTRATION. Par la proposition précédente, toutes deux sont équivalentes à $(\neg A) \cup B$. □

REMARQUE 2.3. Les règles que nous connaissons sur l'intersection et l'union se traduisent (entre autres) par les équivalences logiques suivantes :

(1) Associativité : $(A \text{ et } B) \text{ et } C \Leftrightarrow A \text{ et } (B \text{ et } C)$

(2) Distributivité : $A \text{ et } (B \text{ ou } C) \Leftrightarrow (A \text{ et } B) \text{ ou } (A \text{ et } C)$

EXEMPLE 2.4. **Un syllogisme.** Nous partons de l'affirmation « Tout ce qui est rare est cher ». Nous constatons ensuite qu' « Un cheval bon marché est rare ». Conclusion : « Un cheval bon marché est cher ».

Nous terminons cette partie avec un exemple de résultat où il faut faire attention à la négation des affirmations.

PROPOSITION 2.5. *Soit p un nombre premier impair qui n'est pas de la forme $4k+1$, pour $k \in \mathbb{N}$. Alors p ne peut pas s'écrire comme somme de deux carrés.*

La réciproque de cette proposition est aussi vraie ! Si p est un nombre premier impair de la forme $4k+1$, alors on peut l'écrire comme somme de deux carrés. Ce résultat est connu sous le nom de Théorème de Fermat des deux carrés.

3. La récurrence

Nous avons déjà rencontré plusieurs type de raisonnement qui nous permettent de démontrer des théorèmes : l'implication directe, la contraposée, le raisonnement par l'absurde. Nous avons aussi vu le raisonnement par récurrence (aussi appelé *induction*) dans les séries d'exercices. Ce type de raisonnement vise à démontrer une affirmation de la forme « Pour tout entier naturel n l'affirmation $A(n)$ est vraie » où $A(n)$ est une affirmation qui dépend de n. Le raisonnement par récurrence est une propriété fondamentale des entiers naturels, et c'est le plus important des axiomes de Peano.

PROPOSITION 3.1. *Soit $A(n)$ une affirmation qui dépend de $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $A(k)$ est vraie et que, pour tout $n \geq k$, l'affirmation $A(n)$ implique $A(n+1)$. Alors $A(n)$ est vraie pour tout $n \geq k$.*

L'intuition derrière cette "proposition", qui est d'ailleurs plutôt un axiome, est la suivante. On se représente les entiers naturels comme une échelle infinie, les échelons sont numérotés à partir de 0. Si $A(0)$ est vraie on peut monter sur le zéro-ième échelon. Le fait que $A(0)$ implique $A(1)$ nous permet de grimper sur le premier échelon. Ensuite $A(1) \Rightarrow A(2)$, nous montons sur le deuxième échelon. L'hypothèse que $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ nous permet de monter *inductivement* sur tous les échelons. Il n'est pas nécessaire de le faire pour savoir que c'est possible, c'est là que réside l'avantage de cet argument. Il suffit de savoir que si je me trouvais à l'échelon numéro $12'976$, alors je saurais monter au $12'977$-ième.

Exemple 3.2. Nous cherchons à calculer la somme des n premiers entiers et affirmons que

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Notre affirmation est ici valable pour tout entier naturel $n \geq 1$.

Remarque 3.3. Il faut être très prudent avant de commencer l'induction, sans quoi on pourrait montrer que tous les nombres de la forme $10^n + 1$ sont divisibles par 9. En effet si $9 \mid 10^n + 1$, alors $10^{n+1} + 1 = 10(10^n + 1) - 10 + 1 = 10(10^n + 1) - 9$ est encore un multiple de 9. Il est donc vrai que $A(n)$ implique $A(n+1)$ pour tout $n \geq 0$. Malheureusement, $A(0)$ est fausse puisque 11 n'est pas divisible par 9. Le raisonnement s'écroule.

4. Dangers de la récurrence

Commençons par quelques exemples, parfois un peu simplistes, mais qui font peut-être réfléchir.

Exemple 4.1. J'affirme, et je démontre, que toutes les pommes ont la même couleur. On procède par récurrence sur le nombre n de pommes.

Lorsque $n = 1$, l'affirmation est clairement vraie. La récurrence est donc initialisée. Supposons donc que l'affirmation est vraie pour tout ensemble d'au plus n pommes et démontrons alors qu'elle est également vraie pour $n+1$ pommes. On numérote les pommes de 1 à $n+1$ et on considère l'ensemble des n premières pommes. Par hypothèse d'induction elles sont toutes de la même couleur. On considère ensuite les n dernières pommes. A nouveau l'hypothèse de récurrence nous permet de conclure qu'elles ont toutes la même couleur.

On conclut alors que forcément les $n+1$ pommes ont la même couleur. Fin de la démonstration ! Mais où est donc la faute ?

Exemple 4.2. Nous avons démontré que la somme des n premiers entiers vaut $\dfrac{n(n+1)}{2}$. Je démontre maintenant qu'au contraire la formule correcte est

$$1+2+3+\ldots+n = \frac{(2n+1)^2}{8}$$

Exemple 4.3. Ici nous illustrons le fait qu'une propriété $A(n)$ peut être vraie pour un très grand nombre d'entiers n, mais qu'elle peut être fausse en général. Notre affirmation $A(n)$ est

$$\mathrm{pgcd}(n^{17}+9,(n+1)^{17}+9)=1$$

C'est vrai si $n < 8424432925592889329288197322308900672459420460792433 =: N$, mais si $n = N$, le pgcd ne vaut plus 1, il devient soudainement énorme, c'est 8936582237915716659950962253358945635793453256935559.

Amusant non ?

5. Le triangle de Pascal

On considère que Blaise Pascal fut le premier à utiliser explicitement le raisonnement par récurrence, en 1654. On définit les nombres $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$. Nous introduisons aussi la notation de somme de plusieurs nombres suivante. Si $i \leq j$ sont deux nombres entiers et $a_i, a_{i+1}, \dots, a_j$ sont des nombres, on note

$$\sum_{k=i}^{j} a_k = a_i + a_{i+1} + \cdots + a_j$$

Par exemple l'expression $\sum_{i=1}^{9} i$ signifie $1+2+3+4+5+6+7+8+9$. Cette notation permet d'éviter à la fois d'écrire des expressions inutilement longues et l'utilisation des “trois petits points”.

Théorème 5.1. **Triangle de Pascal.** *Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors*

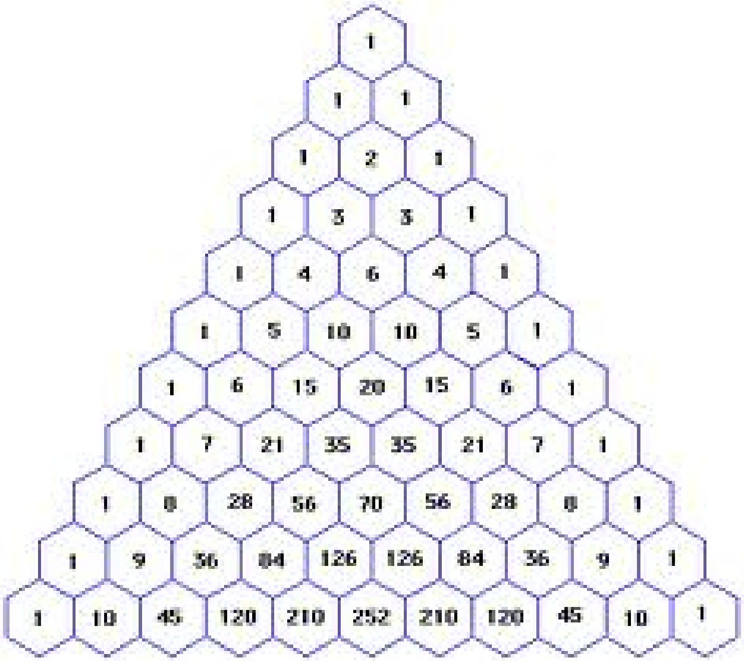
$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \cdots + y^n$$

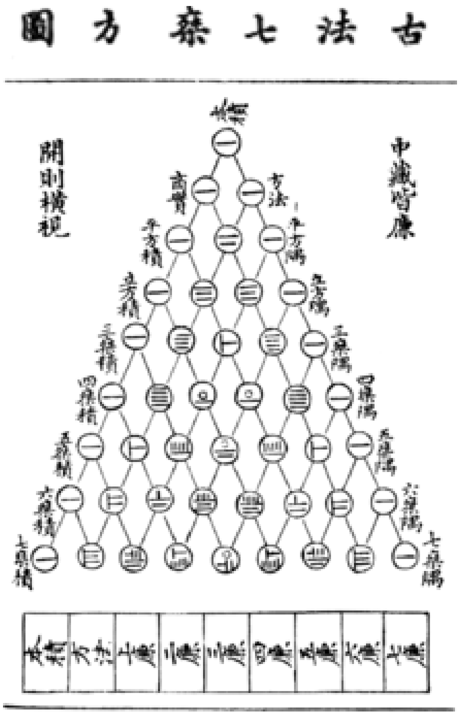
où les coefficients de ce polynôme vérifient, pour tout $1 \leq k \leq n-1$, la relation

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Avant de commencer la preuve, observons que la formule ci-dessus permet de calculer les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ si l'on connaît les coefficients binomiaux $\binom{n-1}{j}$. Par exemple

Visuellement, on peut calculer très efficacement les puissances itérées $(x+y)^n$ en dessinant le triangle, comme Pascal, ou avant lui le mathématicien chinois Yang Hui (vers 1300 déjà !) :





Démonstration. Lorsque $n = 0$, on a $(x + y)^0 = 1 =$

La récurrence est maintenant initialisée et nous allons montrer que si la formule est vraie pour $(x+y)^n$, alors elle est vraie pour $(x+y)^{n+1}$. Allons-y ! On décompose $(x + y)^{n+1}$ comme

$$(x+y)^n(x+y) = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}y^k\right)(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k+1}y^k + \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} x^{n-s}y^{s+1}$$

Regardons cette somme de monômes. Nous devons la réduire en assemblant les termes semblables. A part le cas de $k = 0$ dans la première somme (qui donne x^{n+1}) et celui où $s = n$ dans la deuxième (qui donne y^{n+1}), ils s'assemblent deux par deux car $x^{n-k+1}y^k = x^{n-s}y^{s+1}$ lorsque $k = s + 1$. On trouve donc

$$(x + y)^{n+1} = x^{n+1} + \left(\binom{n}{1} + \binom{n}{0}\right) x^n y + \left(\binom{n}{2} + \binom{n}{1}\right) x^{n-1}y^2 + \cdots + y^{n+1}$$

C'est le moment d'utiliser la relation inductive sur les coefficients binomiaux. On obtient

$$(x + y)^{n+1} = x^{n+1} + \binom{n+1}{1} x^n y + \binom{n+1}{2} x^{n-1}y^2 + \cdots + y^{n+1}$$

Le théorème est démontré ! □

Remarque 5.2. On peut démontrer que le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ vaut $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. Ici le point d'exclamation indique la *factorielle*, c'est-à-dire

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdots 2 \cdot 1$$

autrement dit $n!$ est le produit des n premiers entiers naturels non nuls. Une autre approche que vous verrez l'année prochaine est de *définir* les coefficients binomiaux par la formule ci-dessus, puis de *démontrer* qu'ils satisfont la relation inductive qui apparaît dans le théorème.