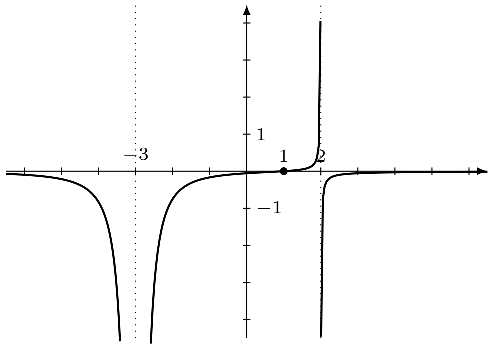
Exercice 1.

a) La fonction n'est pas définie en $x = 2$ et $x = -3$ et donc $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-3, 2\}$. Comme le numérateur de $f(x)$ est non nul pour ces x, les droites d'équation $x = 2$ et $x = -3$ sont bien des asymptotes verticales de f.
TDS :

		-3		1		2	
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$2-x$	$+$		$+$		$+$	0	$-$
$(x+3)^2$	$+$	0	$+$		$+$		$+$
$f(x)$	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$

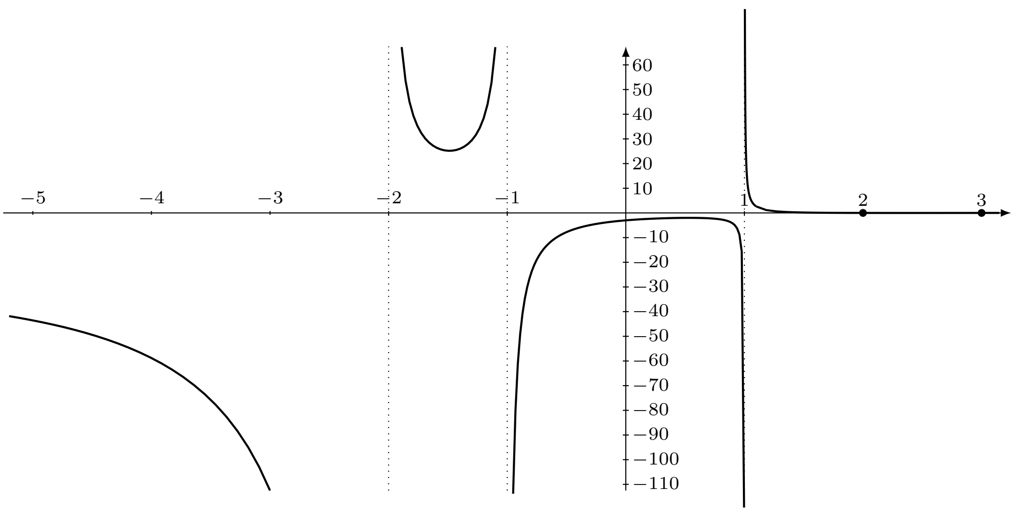
La division de $x - 1$ par $(2-x)(x+3)^2$ donne un quotient de 0 et un reste de $x - 1$. Donc $y = 0$ est une asymptote horizontale.



b) Comme $f(x) = \dfrac{x^2-5x+6}{x^3+2x^2-x-2} = \dfrac{(x-2)(x-3)}{(x+1)(x-1)(x+2)}$, la fonction n'est pas définie en $x = 1$, $x = -1$ et $x = -2$, ainsi $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 1\}$. De plus, le numérateur de $f(x)$ est non nul pour ces x ; les droites d'équation $x = 1$, $x = -1$ et $x = -2$ sont bien des asymptotes verticales de f.
TDS :

		-2		-1		1		2		3	
x^2-5x+6	$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$
x^2-1	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$
$f(x)$	$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$

La division de $(x^2-5x+6)^3$ par x^3+2x^2-x-2 donne un quotient de 0 et un reste de x^2-5x+6. Donc $y = 0$ est une asymptote horizontale.



(L'échelle ne permet malheureusement pas de voir que le graphe de f passe bien sous l'axe des abscisses de $x = 2$ à $x = 3$, repasse dessus en $x = 3$, puis se rapproche de l'asymptote horizontale $y = 0$.)

c) Comme $f(x) = \dfrac{4x^2 - x^3}{3x^2 + 6x} = \dfrac{x^2(4-x)}{3x(x+2)}$, les VI sont $x = -2$ et $x = 0$ et donc $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2; 0\}$. Le numérateur de $f(x)$ est non nul pour $x = -2$; la droite d'équation $x = -2$ est bien une asymptote verticale pour f. Avec $D(f)$ en tête, nous pouvons pour la suite considérer l'expression simplifiée (valable pour $x \neq 0$)

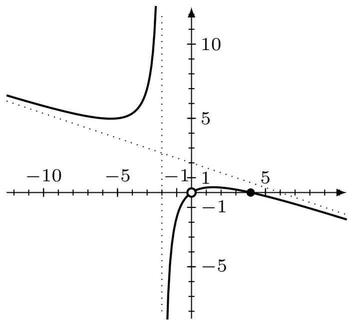
$$f(x) = \frac{-x^2 + 4x}{3x + 6}$$

Cette forme simplifiée (nous verrons plus loin dans le cours qu'il s'agit de la "prolongée par continuité de f" en $x = 0$) nous permet de déterminer les coordonnées du "trou" : $(0; 0)$.

TDS :

		-2		0		4	
$-x^2 + 4x$	$-$	$\vdots$	$-$	0	$+$	0	$-$
$3x + 6$	$-$	0	$+$	$\vdots$	$+$	$\vdots$	$+$
$f(x)$	$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$

La division de $-x^2 + 4x$ par $3x + 6$ donne un quotient de $-\frac{1}{3}x + 2$ et un reste de -4. Donc $y = -\frac{1}{3}x + 2$ est une asymptote oblique.



Position de la courbe par rapport à l'AO. Pour **a)** et **b)**, l'asymptote oblique est horizontale en $y = 0$; le TDP est essentiellement le même que le TDS avec $\delta(x) = f(x)$. Pour **c)**, on aura $\delta(x) = \frac{-4}{3x+6}$, jamais nul ; la courbe n'intersecte jamais l'asymptote, et le TDS suffit pour déduire la position de la courbe par rapport à l'AO.

Exercice 2.

a) Transformons l'inéquation donnée de la façon suivante :

$\dfrac{5x^2 + 2}{x^2 - 9} > \dfrac{5x - 4}{x - 3}$

$\dfrac{5x^2 + 2}{x^2 - 9} - \dfrac{5x - 4}{x - 3} > 0$

$\dfrac{5x^2 + 2}{(x-3)(x+3)} - \dfrac{5x - 4}{x - 3} > 0$

$\dfrac{5x^2 + 2 - (x+3)(5x-4)}{(x-3)(x+3)} > 0$

$\dfrac{5x^2 + 2 - (5x^2 - 4x + 15x - 12)}{(x-3)(x+3)} > 0$

$\dfrac{-11x + 14}{x^2 - 9} > 0$

TDS :

		-3		$\frac{14}{11}$		3	
$-11x + 14$	$+$	$\vdots$	$+$	0	$-$	$\vdots$	$-$
$x^2 - 9$	$+$	0	$-$	$\vdots$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$

$f(x)$ est strictement positif lorsque $x \in]-\infty; -3[\cup]\frac{14}{11}; 3[$ et donc $S =]-\infty; -3[\cup]\frac{14}{11}; 3[$.

b) Procédons de la même manière qu'au point précédent :

$\dfrac{4x^2 + 12x + 2}{2x^2 + 3x + 4} > 2$

$\dfrac{4x^2 + 12x + 2}{2x^2 + 3x + 4} - 2 > 0$

$$\frac{4x^2+12x+2}{2x^2+3x+4} - \frac{2(2x^2+3x+4)}{2x^2+3x+4} > 0$$

$$\frac{6x-6}{2x^2+3x+4} > 0 \qquad \text{(le dénominateur de la fraction a un discriminant négatif)}$$

TDS :

		1	
$6x-6$	$-$	0	$+$
$2x^2+3x+4$	$+$		$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$

Ainsi $S =]1;+\infty[$.

c) $$\frac{x^2+10x+16}{x-1} > 10$$

$$\frac{x^2+10x+16}{x-1} - \frac{10(x-1)}{x-1} > 0$$

$$\frac{x^2+26}{x-1} > 0$$

TDS :

		1	
x^2+26	$+$		$+$
$x-1$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$

Ainsi $S =]1;+\infty[$.

d) $$\frac{5}{x^2+5x+6} - \frac{2}{x^2-4} \geq \frac{3}{x^2-9}$$

$$\frac{5}{(x+2)(x+3)} - \frac{2}{(x-2)(x+2)} - \frac{3}{(x-3)(x+3)} \geq 0$$

$$\frac{5(x-2)(x-3)-2(x-3)(x+3)-3(x-2)(x+2)}{(x+2)(x+3)(x-2)(x-3)} \geq 0$$

$$\frac{5(x^2-5x+6)-2(x^2-9)-3(x^2-4)}{(x+2)(x+3)(x-2)(x-3)} \geq 0$$

$$\frac{-25x+60}{(x+2)(x+3)(x-2)(x-3)} \geq 0$$

$$\frac{-5(5x-12)}{(x^2-4)(x^2-9)} \geq 0$$

TDS :

		-3		-2		2		$\frac{12}{5}$		3	
$-25x+60$	$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$
x^2-4	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$		$+$
x^2-9	$+$	0	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$+$	‖	$-$	‖	$+$	‖	$-$	0	$+$	‖	$-$

Ainsi $S =]-\infty;-3[\cup]-2;2[\cup \left[\frac{12}{5};3\right[$.

Exercice 3.

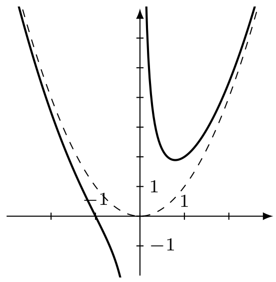
$$\begin{aligned}
(x+1)^2 - |x-2| \geq 0 &\iff (x+1)^2 \geq |x-2| \\
&\iff (x+1)^2 \geq x-2 \geq -(x+1)^2 \\
&\iff x^2+2x+1 \geq x-2 \geq -x^2-2x-1 \\
&\iff \begin{cases} x^2+2x+1 \geq x-2 \quad \text{et} \\ x-2 \geq -x^2-2x-1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x^2+x+3 \geq 0 \quad \text{et} \\ x^2+3x-1 \geq 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

La première inégalité est vraie quel que soit $x \in \mathbb{R}$ car le discriminant de l'équation $x^2+x+3=0$ est négatif (donc $f(x) = x^2+x+3$ ne change pas de signe, et comme $f(0) = 3 > 0$, la fonction f est toujours positive). En étudiant le signe de l'équation de la fonction quadratique x^2+3x-1, on en conclut qu'elle est positive ou nulle pour $x \in \left]-\infty; \frac{-3-\sqrt{13}}{2}\right] \cup \left[\frac{-3+\sqrt{13}}{2};+\infty\right[$.

Exercice 4.

a) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, le quotient de la fraction rationnelle est x, si bien que $f(x)$ admet une asymptote oblique $y = x$.

b) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, le quotient est égal à x^2 qui représente bien une parabole. On a tracé la fonction f avec un trait continu dans la figure ci-dessous ainsi que son asymptote en traitillés.



c) En effectuant la division euclidienne de $4x^3 - 3x^2 + 4x - 2$ par $x^2 + 1$, on obtient $4x - 3$ comme quotient.

d) Le quotient de la fraction rationnelle $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x + 1}$ est $x - 5$ et donc $f(x)$ admet l'asymptote oblique d'équation $y = x - 5$.

Exercice 5. On commence par remarquer que c *doit* être non nul pour que la fonction ait une AV. On suppose donc dorénavant $c \neq 0$.
Comme $x = 3$ est AV, $x = 3$ est VI, et on doit avoir $3c + d = 0$, c'est-à-dire $d = -3c$.
La division euclidienne de $ax + b$ par $cx + d$ donne un quotient de $\frac{a}{c}$. L'asymptote oblique sera forcément horizontale, et d'équation $y = \frac{a}{c}$. Comme cette équation doit être $y = -2$, on trouve $a = -2c$.
La condition $f(2) = 0$ se traduit au numérateur par $a \cdot 2 + b = 0$, c'est-à-dire $-2c \cdot 2 + b = 0$, d'où $b = 4c$. Donc

$$f(x) = \frac{-2cx + 4c}{cx - 3c} = \frac{c(-2x + 4)}{c(x - 3)} = \frac{-2x + 4}{x - 3}$$

Tant que a, b, c et d sont liées par $a = -2c$, $b = 4c$, $d = -3c$ et $c \neq 0$, la fonction sera $f(x) = \frac{-2x+4}{x-3}$, une fonction qui vérifie bien les conditions de l'énoncé.

Remarque méthodologique. As-tu observé que le début de cette correction donne des conditions nécessaires, mais que l'énoncé demande des conditions suffisantes ? La dernière phrase répond en fait à la question de l'énoncé. (Alternativement, si $c \neq 0$, les raisonnements présentés comme des implications sont des équivalences.)