

Série 20

Exercice 1. Où se trouve l'erreur dans le raisonnement par récurrence suivant ? J'affirme que dans une boîte de crayons de couleur tous les crayons ont la même couleur. Considérons donc pour un entier $k \geq 1$ la propriété $P(k)$: dans une boîte de k crayons, tous les crayons ont la même couleur.

Initialisation ($P(1)$). Dans une boîte avec un seul crayon, tous les crayons ont évidemment la même couleur.

Hérédité. Supposons que $P(k)$ est vrai et considérons une boîte de $k + 1$ crayons. Si j'en enlève un je me retrouve avec une boîte de k crayons, tous de la même couleur par hypothèse de récurrence. J'en enlève un autre, puis remets le premier crayon enlevé dans la boîte. À nouveau les k crayons de la boîte ont tous la même couleur. Par conséquent ils ont tous la même couleur et $P(k + 1)$ est vérifiée !

Exercice 2. On rappelle que pour tout nombre entier naturel n , le nombre n factorielle, noté $n!$, est défini inductivement comme suit :

$$0! = 1 \quad \text{et} \quad n! = n \cdot (n - 1)! \quad \text{pour tout entier } n \geq 1.$$

- a) Démontre que $n! \geq 2^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- b) Démontre que $n! > 2^n$ pour tout $n \geq 4$.

Exercice 3. Binôme de Newton. Pour $n, k \in \mathbb{N}$ avec $n \geq k$, on définit le *coefficient binomial* $\binom{n}{k}$ par

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n - k)! \cdot k!}$$

- a) Pour $n \geq 1$, calcule $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{n-1}$ et $\binom{n}{n}$.
- b) Montre que les coefficients binomiaux satisfont $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ pour $1 \leq k \leq n$.
- c) À l'aide des points précédents et du cours de 1^{re} année, démontre la *formule du binôme de Newton* :

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et } a, b \in \mathbb{R}.$$

- d) Dédus que les coefficients binomiaux peuvent être utilisés pour déterminer de combien de façons différentes on peut choisir k éléments parmi n . Utilise ensuite ce résultat pour calculer le nombre de sous-ensembles d'un ensemble à n éléments (dans le cas où $a = b = 1$).

Exercice 4. Avec (ou sans(!)) tes notes de cours de 1^{re} année, retrouve la formule donnant la somme des entiers de 1 à n (pour $n \in \mathbb{N}^*$) : $\sum_{k=1}^n k = \dots$. Démontre ensuite par récurrence la formule suivante pour la somme *des cubes* des entiers de 1 à n (pour $n \in \mathbb{N}^*$) :

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

et conclus en donnant la relation qui lie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ les sommes

$$1 + 2 + 3 + \dots + n \quad \text{et} \quad 1 + 8 + 27 + \dots + n^3.$$

Exercice 5. Calcule successivement la valeur de chacune des expressions

$$\frac{1}{1 \cdot 2}, \quad \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3}, \quad \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4}, \quad \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5}.$$

Conjecture ensuite une formule donnant la valeur de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$ puis démontre ta conjecture.

Exercice 6. Soient deux suites convergentes (x_n) et (y_n) avec $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ et $y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$. À l'aide de la définition de limite (avec ε), montre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = x + y$$

Indication. Utilise la propriété des limites x et y avec le nombre réel $\frac{\varepsilon}{2}$.

Exercice 7. Soit une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$. On veut voir que si $(\sqrt{x_n})_{n \in \mathbb{N}}$ et \sqrt{a} sont définies, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}$$

Pour cela, considère les deux cas suivants.

a) Montre que si $x_n \in \mathbb{R}_+$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}$.

Indication. Pour évaluer $|\sqrt{x_n} - \sqrt{a}|$ connaissant $|x_n - a|$, amplifie(!) par le conjugué.

b) Montre que si $x_n \in \mathbb{R}_+$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $a = 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}$.

Exercice 8. Quelques manipulations avec ε . Dans chaque cas on demande de trouver pour une valeur de ε donnée, la valeur d'un entier N tel que $|x - x_n| \leq \varepsilon$ lorsque $n \geq N$.

a) La suite (x_n) définie par $x_n = \frac{1}{n!}$ tend vers zéro. Lorsque $\varepsilon = 1/100$ trouve la valeur de l'entier N à partir duquel $|x_n - 0| < 1/100$ pour tout $n \geq N$.

b) La suite (x_n) définie par $x_n = \frac{3n}{4n+2}$ tend vers $3/4$. Lorsque $\varepsilon = 1/100$ trouve la valeur de l'entier N à partir duquel $|x_n - 3/4| < 1/100$ pour tout $n \geq N$.

c) La suite (x_n) définie par $x_n = \frac{2n^2}{n-1}$ définie pour $n \geq 2$ tend vers $+\infty$. Lorsque $a = 1000$ trouve la valeur de l'entier N à partir duquel $x_n \geq 1000$ pour tout $n \geq N$.

Exercice 9. En utilisant la définition de la limite, montre que

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n}{n^2 + 1} = 0$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 + 1}{7n^2 + n + 5} = \frac{2}{7}$$

Exercice 10. En utilisant l'inégalité $2^n \geq \frac{n^3}{24}$ démontrée dans les notes de cours (pour n entier et $n \geq 4$), calcule la limite de la suite $(n^2/2^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 11. Calcule la limite, si elle existe, de la suite (x_n) définie par récurrence comme suit :

$$x_{n+1} = \frac{x_n + 4}{3} \quad \text{et} \quad x_0 = 0.$$

Exercice 12. Calcule la limite, si elle existe, de la suite (x_n) définie par récurrence comme suit :

$$x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n} \quad \text{et} \quad x_0 = 0.$$