Rappel : matrices élémentaires :

- $E_{ij}(\lambda)$: ajoute λ fois la ligne j à la ligne i
- $D_i(\mu)$: multiplie la i^e ligne par μ $(\mu \neq 0)$
- P_{ij} : échange les lignes i et j

lorsqu'on multiplie une matrice A par une matrice élémentaire à gauche.

VI. Calcul du rang et systèmes d'équations

Nous avons fait connaissance la semaine passée avec les matrices élémentaires de trois types. Lors de multiplication à gauche avec l'une de ces matrices, on effectue des opérations élémentaires sur les lignes. Nous allons voir comment un usage systématique de ces opérations permet de calculer le rang d'une application linéaire et de résoudre des systèmes d'équations linéaires.

1 Changement de base

Soit $\alpha : V \to W$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimension finie. Pour comprendre α, nous avons vu que nous pouvons choisir une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_m)$ de V et une base $\mathcal{C} = (f_1, \ldots, f_n)$ de W afin de construire la matrice $A = (\alpha)^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$. Il suffit alors d'étudier la matrice A. Par exemple, α est un isomorphisme si et seulement si A est une matrice inversible.
Mais que se passe-t-il si nous choisissons d'autres bases ? Un autre choix peut valoir la peine si la forme de la matrice se simplifie et rend la nature de l'application plus lisible...

Définition 1.1. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_m)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_m)$ deux bases de V. Alors la matrice $P = (Id_V)^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}$ de l'application linéaire identité où l'on fixe la base $\mathcal{B}$ au départ et $\mathcal{B}'$ à l'arrivée s'appelle la *matrice de changement de base* de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

$(V, B) \longrightarrow (V; B')$

Proposition 1.2. *Une matrice $P \in M_m(K)$ est une matrice de changement de base si et seulement si elle est inversible.*

Démonstration. Une matrice de changement de base $(Id_V)^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}$ est inversible puisque son inverse est la matrice $(Id_V)^{B}_{B'}$, matrice de changement de base de B' à B.

En effet, le produit de ces deux matrices est $I_m = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ puisque

$$\begin{tikzcd} (V, B) \arrow[r, "(Id_V)^{B'}_{B}"] \arrow[rr, bend right] & (V, B') \arrow[r, "(Id_V)^{B}_{B'}"] & (V; B) \end{tikzcd}$$

$$(Id_V)^{B}_{B'} (Id_V)^{B'}_{B} = (Id_V)^{B}_{B} = I_m$$

Réciproquement, si P est inversible, cela signifie que son rang vaut m, ou encore que son image est de dimension m.
En particulier, si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_m)$ est la base canonique de K^m, choisissons $e'_j = \sum p_{ij} e_i$.
Les e'_j forment une base $\mathcal{B}'$ de K^m. On interprète alors P comme matrice de l'application linéaire identité de K^m muni de la base $\mathcal{B}'$ dans K^m muni de la base canonique. En effet, l'image de e'_j se lit dans la j-ème colonne : ses coordonnées dans la base canonique sont $(p_{1j}, \ldots, p_{mj})$. □

Exemple 1.3. La matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible puisque ses colonnes sont des vecteurs linéairement indépendants qui forment une base de $\mathbb{R}^2$.

Une autre façon de le voir serait de constater que la seule solution au système $\begin{cases} x + 3y = 0 \\ -3x + y = 0 \end{cases}$ $= PX = 0$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
est $(0;0)$, donc le noyau est nul et la dimension de l'image est 2.

Choisissons donc $e'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $e'_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour former une nouvelle base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$.

Alors la matrice de l'identité de la base $\mathcal{B}'$ à la base canonique est formée de la façon suivante : $\mathcal{B}$

Ses colonnes sont formées des composantes des vecteurs de la base $\mathcal{B}'$ dans la base canonique car

$$e'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{B'} \Rightarrow P\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}. \text{ Or } \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}_B = e'_1$$

De même,

$$e'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{B'} \Rightarrow P\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ Or } e'_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}_B.$$

La matrice inverse de P est la matrice de passage de la base de la base canonique B à la base B'.

$$\det P = 1 \cdot 1 - (-3) \cdot 3 = 1 + 9 = 10 \text{ d'où } P^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

On veut vérifier par exemple que $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_B$ et $P^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow e_1 = \frac{1}{10}\left(1 \cdot e'_1 + 3 e'_2\right) = \frac{1}{10}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}_B + 3\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}_B\right) = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_B$$ yesss!

2 Le rang-colonne d'une matrice

Lorsqu'on souhaite calculer le rang de α, c'est-à-dire la dimension de l'image (puis en déduire la dimension du noyau par le théorème du rang), nous pouvons choisir des bases des espaces vectoriels de départ et d'arrivée, calculer la matrice de α par rapport à ces deux bases et observer les colonnes de cette matrice.

Définition 2.1. Soit A une matrice de $M_{n\times m}(K)$. Le *rang-colonne* de A est la dimension du sous-espace vectoriel de K^n engendré par les vecteurs colonnes $\begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$ pour $1 \leq i \leq m$.

Le *rang-ligne* de A est la dimension du sous-espace vectoriel de K^m engendré par les vecteurs lignes $(a_{j1} \ \dots \ a_{jm})$ pour $1 \leq j \leq n$.

L'un des grands résultats du jour est que ces deux rangs sont égaux ! Avant de démontrer ce théorème, nous allons nous concentrer sur la signification géométrique du rang-colonne.
Considérons la matrice A comme celle d'une application linéaire $\alpha : K^m \to K^n$ qui envoie les vecteurs de la base canonique sur les vecteurs colonnes donnés par les colonnes de la matrice A. Concrètement,

$$\alpha(e_i) = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, les colonnes de la matrice A sont les images des vecteurs de la base canonique de K^m, et par conséquent, engendrent l'image de α. En effet,

tout vecteur $w \in \mathrm{Im}(\alpha)$ est l'image $\alpha(v)$ d'un vecteur $v \in K^m$.

Or, $v = \sum_{i=1}^m \lambda_i e_i \implies w = \alpha(v) = \alpha\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i e_i\right) \underset{\uparrow}{=} \sum_{i=1}^m \lambda_i \alpha(e_i)$.

α linéaire

Ainsi, w est bien une combinaison linéaire des $\alpha(e_i)$ qui correspondent aux colonnes de A.

Nous avons donc montré le résultat suivant :

Proposition 2.2. *Soient V et W deux K-espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_m)$ une base de V et $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ une base de W. Soit $\alpha : V \to W$ une application linéaire et $A = (\alpha)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$. Alors le rang de α est égal au rang-colonne de A.* $\square$

Exemple 2.3. Quel est le rang de l'application linéaire $\alpha : \mathbb{F}_2^3 \to \mathbb{F}_2^3$ donnée par la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{F}_2)$$

par rapport à la base canonique ?
On constate que les deux premières colonnes de P sont linéairement indépendantes.
$\Rightarrow$ le rang colonne de P vaut au moins 2.
De plus, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donc le rang vaut 2 car la 3^e colonne de P est la somme des deux premières.

3 Matrices équivalentes

Nous pouvons nous permettre une certaine souplesse à l'heure de construire la matrice de α. Choisissons en effet deux bases $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_m)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_m)$ de V et deux autres $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ et $\mathcal{C}' = (f'_1, \dots, f'_n)$ de W. Nous pouvons alors construire deux matrices qui représentent l'application linéaire α, la matrice $A = (\alpha)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ et $B = (\alpha)_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'}$. On peut obtenir l'une à partir de l'autre en utilisant les matrices de changement de base $Q = (Id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ et $P = (Id)_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}}$. En effet, le diagramme

$$\begin{tikzcd} (V;B) \arrow[r, "Q"] \arrow[rrr, bend right, "A"', "\alpha"] & (V;B') \arrow[r, "B", "\alpha"'] & (W;C') \arrow[r, "P"] & (W;C) \end{tikzcd}$$

illustre l'égalité matricielle $A = P \cdot B \cdot Q$

Définition 3.1. Deux matrices A et B de $M_{n\times m}(K)$ sont *équivalentes* et on note $A \sim B$ s'il existe deux matrices inversibles $P \in GL_n(K)$ et $Q \in GL_m(K)$ telles que $A = PBQ$. $\Leftrightarrow P^{-1}AQ^{-1} = P^{-1}PBQQ^{-1} = B$

Théorème 3.2. *Deux matrices A et B de $M_{n\times m}(K)$ sont équivalentes si et seulement elles représentent la même application linéaire $\alpha : K^m \to K^n$.*

Démonstration. Si A et B représentent α par rapport à des bases différentes, nous avons vu ci-dessus que A et B sont équivalentes via des matrices P et Q de changement de base.

Supposons maintenant que $A \sim B$ et considérons les matrices inversibles P et Q comme des matrices de changement de base, Q de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ de K^m et P de la base $\mathcal{C}'$ à la base $\mathcal{C}$ de K^n. Alors, si A est la matrice d'une application linéaire α exprimée par rapport aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, B est la matrice de cette même application α par rapport aux nouvelles bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}'$ □

Corollaire 3.3. *Si $A \sim B$, alors A et B ont le même rang-colonne.*

Démonstration.

Comme A et B représentent la même application linéaire α, leur rang colonne vaut rang(α) pour les deux matrices.

□

Exemple 3.4. Considérons l'application linéaire $\alpha : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ définie par

$$\alpha(x; y; z) = (x + iy + (1-i)z; ix + y + (1+i)z; (1+i)x + (1+i)y + 2z).$$

Quel est son rang ?

La matrice de α par rapport aux bases canoniques est $A = \begin{pmatrix} 1 & i & 1-i \\ i & 1 & 1+i \\ 1+i & 1+i & 2 \end{pmatrix}$

Le rang n'est pas immédiatement visible.

Multiplions A à gauche $E_{32}(-1) \cdot E_{31}(-1)$ pour soustraire les deux premières lignes à la troisième :

$$E_{32}(-1) \cdot E_{31}(-1) \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & i & 1-i \\ i & 1 & 1+i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

Comme les matrices élémentaires sont inversibles, $A \sim B$.

Les 2 premières colonnes de B sont linéairement indépendantes et comme la 3^e composante des colonnes est toujours nulle, le rang colonne de B vaut 2 .... et son rang ligne aussi $\Rightarrow$ rang(α) = 2.

Théorème 3.5. *Soit A une matrice de $M_{n\times m}(K)$. Les rangs ligne et colonne de A sont égaux.*

Démonstration. Soit $Q \in GL_n(K)$. Nous venons de démontrer que le rang-colonne de A et QA est le même car ces matrices sont équivalentes. Regardons les lignes $l_j = (a_{j1} \ \dots \ a_{jm})$ de A.
Si le rang-ligne vaut k, cela signifie qu'il existe k lignes linéairement indépendantes et que toutes les autres peuvent s'exprimer comme combinaison linéaire de celles-ci. Quitte à multiplier A à gauche par des matrices P_{ij} (inversibles, donc le rang-colonne ne change pas !), nous pouvons supposer qu'il s'agit des k premières lignes. Les autres s'expriment comme $l_s = \lambda_{s1} l_1 + \cdots + \lambda_{sk} l_k$ pour $s > k$. Multiplions alors A par $E_{s1}(-\lambda_{s1}) \cdots E_{sk}(-\lambda_{sk})$ pour obtenir une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{km} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit r_1 le numéro de la première colonne de notre matrice qui possède un coefficient non-nul. Quitte à échanger des lignes comme auparavant, nous pouvons supposer que ce coefficient est dans la première ligne, c'est a_{1r_1}. On multiplie la matrice par $D_1(a_{1r_1}^{-1})$ pour que ce coefficient soit égal à 1. En multipliant la matrice par $E_{21}(-a_{2r_1}) \cdot E_{k1}(-a_{kr_1})$, on garde le même rang-colonne, mais on obtient des zéros dans toute la r_1-ème colonne ; dans la matrice suivante $r_1 = 2$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & a_{k3} & \cdots & a_{km} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

On procède de la même façon en ne travaillant que sur les lignes 2 à k, puis les lignes 3 à k, etc. en effectuant des opérations élémentaires à chaque pas pour obtenir des zéros sous le premier coefficient non nul de chaque ligne qui vaudra 1. On obtient ainsi une matrice de même rang que A en n'ayant effectué des opérations élémentaires que sur les lignes et qui a la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & a_{13} & a_{14} & a_{15} & \cdots & \cdots & a_{1m} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_{25} & \cdots & \cdots & a_{2m} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_{36} & \cdots & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & & 1 & a_{km} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Le rang-ligne de cette matrice vaut k et son rang-colonne, qui est le rang-colonne de la matrice équivalente A, vaut k également. En effet, les k colonnes qui contiennent l'un des coefficients égal à 1 par lequel commence une ligne de la matrice sont linéairement indépendantes et engendrent toutes les colonnes de la matrice. □

4 Echelonner et réduire

La méthode que nous avons utilisée dans la démonstration ci-dessus consiste à "échelonner" la matrice, les *échelons* étant les 1 que nous avons introduits petit à petit.

Définition 4.1. Une matrice $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n; 1\leq j\leq m} \in M_{n\times m}(K)$ est *échelonnée* s'il existe une suite strictement croissante $r_1 < r_2 < \cdots < r_k$ telle que $a_{ij} = 0$ si $j < r_i$ ou $i > k$ et $a_{ir_i} \neq 0$. Dans ce cas elle est *réduite* si $a_{ir_i} = 1$ et $a_{jr_i} = 0$ si $j \neq i$.

Nous avons donc démontré que l'on peut échelonner et réduire une matrice en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes de cette matrice. Ce procédé s'appelle la méthode de Gauss.

Exemple 4.2. Echelonnons et réduisons la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Nous indiquerons à chaque opération quelle matrice élémentaire on utilise.

$$\xrightarrow{E_{41}(-2)\cdot E_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-2)\cdot E_{42}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice est maintenant échelonnée. Réduisons-la :

$$\xrightarrow{E_{12}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le rang ligne et le rang colonne de la matrice vaut 2.

Pour terminer, appliquons cette méthode à la résolution d'un système d'équations linéaires. On écrit ce système sous la forme $AX = b$, où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ est le vecteur colonne des inconnues, $A \in M_{n\times m}(K)$ est la matrice des coefficients et $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

La méthode de Gauss consiste à effectuer des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice A augmentée de b, que l'on écrit $(A\,|\,b)$, pour l'échelonner et la réduire. Il est très dangereux d'effectuer des opérations sur les colonnes car cela revient à mélanger les inconnues !

Exemple 4.3. Nous voulons résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ y + 2z = 3 \\ x + 3y + 4z = 5 \\ 2x + 3y + 2z = 1 \end{cases}$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

La matrice augmentée de ce système est $M = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right)$

C'est celle de l'exemple 4.2. $M \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = N$

N correspond au système d'équations

$$\begin{cases} x - 2z = -4 \\ y + 2z = 3 \end{cases} \iff \begin{aligned} x &= -4 + 2z \\ y &= 3 - 2z \end{aligned}$$

On pose $z = \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et on obtient les solutions

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Il s'agit d'une droite dans $\mathbb{R}^3$, intersection des 4 plans "d'origine".