Corrigé Test 3 - Nb complexes, optimisation et structures algébriques 17.01.24

Problème 1. *(4 + 5 + 6 = 15 points)*

a) Décrire l'image par la détermination principale du logarithme complexe du cercle de rayon $r > 0$ centré en l'origine (et privé du point $-r$).

Considérons les points $re^{i\theta}$ où $r > 0$ et $\theta \in]-\pi, \pi[$.

Alors, par application du logarithme, on a $\ln|r| + i\theta$.

En laissant θ parcourir $]-\pi, \pi[$, cet ensemble de point correspond à un "segment vertical" de longueur 2π ayant pour milieu le point $(\ln(r), 0)$.

b) Ecrire l'équation dans $\mathbb{C}$ de la composition de l'homothétie de centre $5 + 3i$ et de rapport 2 suivie de la rotation d'angle π.

En considérant que le centre de rotation est $5 + 3i$, comme celui de l'homothétie, on obtient $f(z) = (\cos(\pi) + i\sin(\pi))\ 2\,(z-(5+3i))+(5+3i)) = -2(z-5-3i)+5+3i = -2z+15+9i.$

En considérant que le centre de rotation est O, on obtient $f(z) = (\cos(\pi) + i\sin(\pi))\ (2\,(z-(5+3i))+(5+3i)) = -2z-10-6i+5+3i = -2z+5+3i.$

c) Caractériser géométriquement la similitude d'équation $f(z) = (1 + i)\bar{z} + 1 - i$.

$\bar{z}$ est multiplié par $1 + i = \sqrt{2}\text{ cis }\dfrac{\pi}{4}$.

Il s'agit d'une homothétie de rapport $\sqrt{2}$ composée avec une symétrie d'axe de pente $\tan\dfrac{\pi}{8}$ et passant par le centre c d'homothétie.

Le centre $c = a + bi$ est un point fixe. Il vérifie donc l'équation $f(z) = z$:

$(1 + i)(a - bi) + 1 - i = a + bi \;\Leftrightarrow\; (a + b + 1) + (a - b - 1)i = a + bi \;\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a + b + 1 = a \\ a - b - 1 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ a = -1 \end{cases}.$$

Ainsi, le centre d'homothétie est $C(-1; -1)$ et l'axe de symétrie la droite $d : y = x$.

Problème 2. *(4 (pour +) + 5 (pour ∗) + 1 (b) = 10 points)*

a) Compléter les tables des lois de composition + et ∗ sachant que $(D; +)$ est un groupe abélien et que la loi * est distributive par rapport à la loi +.

+	a	b	c	d
a	**a**	**b**	**c**	**d**
b	**b**	**a**	**d**	**c**
c	**c**	d	a	b
d	**d**	c	b	**a**

∗	a	b	c	d
a	**a**	**a**	**a**	**a**
b	**a**	b	**c**	**d**
c	**a**	**a**	**a**	a
d	**a**	b	c	**d**

b) $(D; +; *)$ est-il un anneau ? Justifier la réponse.

$(D; +; *)$ n'est pas un anneau car il n'y a pas d'élément neutre pour $*$.

Problème 3. *(10 + 2 = 12 points)*
On veut construire une maison de base carrée et telle que son volume habitable soit un parallélépipède rectangle de 768 m^3. La perte de chaleur par unité de surface est trois fois plus élevée pour le plafond que pour les murs. On suppose qu'il n'y a pas de perte de chaleur par le plancher.

a) Quelles doivent être les dimensions de la maison pour que la perte de chaleur soit minimale ?

On pose x = côté de la base, y = hauteur de la maison.

$V = x^2 \cdot y = 768$ d'où $y = \dfrac{768}{x^2}$. Contraintes : x et y sont strictement positifs.

La superficie du plafond est de x^2 et celle de chacun des quatre murs xy.

Ainsi, la perte de chaleur est proportionnelle à $p = 3x^2 + 4 \cdot xy$ d'où

$$p(x) = 3x^2 + 4 \cdot x \cdot \frac{768}{x^2} = 3x^2 + 4 \cdot \frac{768}{x} = \frac{3x^3 + 4 \cdot 768}{x} = 3 \cdot \frac{x^3 + 1024}{x}$$

$$p'(x) = 3 \cdot \frac{3x^2 \cdot x - (x^3 + 1024) \cdot 1}{x^2} = 3 \cdot \frac{2x^3 - 1024}{x^2} = 6 \cdot \frac{x^3 - 512}{x^2}$$

p' s'annule en $x = \sqrt[3]{512} = 8$.

$x = 8$ définit un minimum de p.

x		0		8	
$p'(x)$			$-$	0	$+$
$p(x)$			$\searrow$	Min	$\nearrow$

La perte de chaleur est minimale si $x = 8$ et $y = \dfrac{768}{8^2} = 12$.

Les dimensions de la maison devrait être de 8 m $\times$ 8 m $\times$ 12 m.

b) Est-ce réaliste ? Expliquer votre réponse.

Ces dimensions correspondent à une maison de 4 étages avec une surface au sol de 64 m^2 ce qui n'est pas réaliste pour la stabilité de l'immeuble.

Problème 4. *(4 + 1 + 3 = 8 points)*

Dans $\mathbb{Q}$, on définit la loi de composition $*$ par $\quad x * y = x + xy + y$.

a) Montrer que $*$ est une loi de composition dans $\mathbb{Q}$ et qu'elle est associative.

Il s'agit bien d'une loi de composition car $\forall x, y \in \mathbb{Q},\ x * y = x + xy + y \in \mathbb{Q}$.
Associativité :

$$\begin{aligned}(x * y) * z &= (x + xy + y) * z = (x + xy + y) + (x + xy + y)z + z \\ &= x + xy + y) + xz + xyz + yz + z \ = \ x + y + z + xy + xz + yz + xyz \\ x * (y * z) &= x * (y + yz + z) = x + x(y + yz + z) + (y + yz + z) \\ &= x + xy + xyz + xz + y + yz + z \ = \ x + y + z + yz + xy + xz + xyz.\end{aligned}$$

Les deux résultats sont égaux, donc la loi de composition est associative.

b) Déterminer son élément neutre.

L'élément neutre est 0, car $x * 0 = x = 0 * x$

c) Est-ce que $(\mathbb{Q}, *)$ forme un groupe ? Justifier la réponse.

Soit $x \in \mathbb{Q}$. Déterminons son inverse, s'il existe :
$x * x' = 0 \ \Leftrightarrow \ x + xx' + x' = 0 \ \Leftrightarrow \ x + x'(x + 1) = 0 \ \overset{x \neq -1}{\Leftrightarrow} \ x' = -\dfrac{x}{x + 1}$
Ainsi, -1 n'admet pas d'inverse et donc $(\mathbb{Q}, *)$ n'est pas un groupe.

Problème 5. *(1 + 2 = 3 points)*

On donne $A = \{x + y\sqrt{5} \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$.

a) Montrer que tout élément de A possède un symétrique pour $+$.

Le symétrique de $x + y\sqrt{5}$ pour l'addition est $-x - y\sqrt{5}$

b) $(A; +; \cdot)$ est-il un corps ? Justifier la réponse.

$(A; +; \cdot)$ n'est pas un corps car $(A - \{0\}; \cdot)$ n'est pas un groupe car certains éléments de $A - \{0\}$ n'ont pas de symétrique pour $\cdot$ dans $A - \{0\}$.
Par exemple, $\sqrt{5} \in A - \{0\}$ mais $\dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5} \notin A$.

Problème 6. *(3 + 3 = 6 points)*

Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau. Montrer que pour tout $x \in A$,

a) $0 \cdot x = 0 = x \cdot 0$.

On écrit $0 = 0 + 0$. Alors,

$$0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$$

L'élément $0 \cdot x$ a un inverse pour l'addition (son opposé est $-0 \cdot x$) que nous pouvons ajouter de part et d'autre de cette égalité. Ainsi $0 = 0 \cdot x + 0 = 0 \cdot x$. De même $x \cdot 0 = 0$.

b) $(-1) \cdot x = -x = x \cdot (-1)$.

En utilisant a), on obtient

$$0 = 0 \cdot x = (1 + (-1)) \cdot x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = x + (-1) \cdot x$$

Par conséquent, $(-1) \cdot x$ est l'opposé $-x$ de x.

Problème 7. *(3 points)*

Soit V un K-espace vectoriel et $W \subset V$.
Quelles conditions faut-il vérifier pour prouver que W est un sous-espace vectoriel de V ?

$W \subset V$ est un sous-espace vectoriel de V si et seulement si

1. $0 \in W$;
2. $x + y \in W$ pour tous $x, y \in W$;
3. $\lambda x \in W$ pour tous $\lambda \in K$ et $x \in W$.

Problème 8. *(3 + 3 = 6 points)*

Dans chacun des cas suivants, déterminer les conditions sur a et b pour que l'ensemble W soit un sous-espace vectoriel de V.
Justifier vos réponses.

a) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $W = \{f \in V \mid f(a) = b\}$.
Pour que la fonction nulle soit dans W, il faut que $b = 0$. Ensuite, il n'y a pas de restriction sur a, donc $a \in \mathbb{R}$ car si $f(a) = 0$ et $g(a) = 0$ alors $\lambda f(a) = 0$ et $f(a) + g(a) = 0$ $\forall \lambda, a, \in \mathbb{R}$.
Ainsi, $a \in \mathbb{R}$ et $b = 0$.

b) $K = \mathbb{C}$, $V = \mathcal{F}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ et $W = \{f \in V \mid f(a) = f(b)\}$.
La fonction nulle vérifie $f(a) = f(b)$ $\forall a, b \in \mathbb{C}$. Elle est donc dans W $\forall a, b \in \mathbb{C}$
De plus, si $f(a) = f(b)$ et $g(a) = g(b)$ alors $\lambda f(a) = \lambda f(b)$ et $f(a)+g(a) = f(b)+g(b)$ $\forall \lambda a, b \in \mathbb{C}$.
Ainsi, W est un sous-espace vectoriel de V $\forall a, b \in \mathbb{C}$.