Corrigé pre-test 3 - Nb complexes, optimisation et structures algériques 01.2024

Exercice 1. *(3 + 4 + 6 = 13 points)*

a) Mettre $\frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}}{i}$ sous forme cartésienne

$$\frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}}{i} = \frac{\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)}{i} = \frac{(0 + i\cdot(-1))}{i} = -1$$

b) Déterminer le logarithme complexe (détermination principale) de $-\pi i$.
On a $-\pi i = \pi\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \pi e^{-i\frac{\pi}{2}}$. De plus, on sait que si $z = re^{i\theta}$, on a $\ln(z) = \ln(r) + i\theta$ avec $-\pi \leq \theta \leq \pi$. Ainsi, on a $\ln(-\pi i) = \ln(\pi) - i\frac{\pi}{2}$.

c) Caractériser géométriquement la similitude d'équation $f(z) = (1+i)z + 1 - i$.
Comme $1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$, on a une homothétie de rapport $\sqrt{2}$ et une rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$. De plus, on a une translation de vecteur $(1;-1)$. Cherchons les points fixes de la transformation :

$$z = (1+i)z + 1 - i \Leftrightarrow iz = i - 1 \Leftrightarrow z = \frac{i-1}{i} = \frac{-1-i}{-1} = 1 + i.$$

Ainsi, il s'agit de l'homothétie et de la rotation sont de centre $(1;1)$.

Exercice 2. *(5 + 2 + 2 + 3 = 12 points)*

On considère $X = \{a, b\}$ l'ensemble constitué de deux éléments a et b.

a) Décrire $\mathcal{P}(X)$ et écrire la table de la loi de composition de la différence symétrique Δ.
$\mathcal{P}(X)) = \{\emptyset; \{a\}; \{b\}; X\}$ et la table de la loi de composition Δ est :

Δ	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	X
$\emptyset$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	X
$\{a\}$	$\{a\}$	$\emptyset$	X	$\{b\}$
$\{b\}$	$\{b\}$	X	$\emptyset$	$\{a\}$
X	X	$\{b\}$	$\{a\}$	$\emptyset$

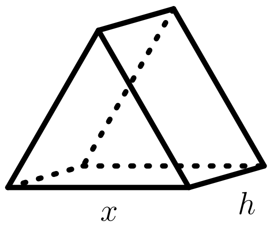
b) En déduire que la Δ admet un élément neutre et donner cet élément neutre.
L'élément neutre est $\emptyset$ car dans la table de composition, la ligne, resp. colonne, d'entrée $\emptyset$ est une copie de la ligne, resp. colonne, des entrées.
Autre démo sans la table : pour tout $A \subset X$, on a $A\Delta\emptyset = (A \cup \emptyset) - (A \cap \emptyset) = A$.

c) Montrer que tout sous-ensemble $A \subset X$ admet un inverse pour Δ et donner cet inverse.
Tout sous-ensemble A est son propre inverse car la diagonale de la table ne contient que l'élément neutre $\emptyset$.
Autre démo sans la table : $A \subset X$ est l'inverse de lui-même car $A\Delta A = (A\cup A) - (A\cap A) = \emptyset$.

d) Calculer la différence symétrique d'un ensemble A et de son complémentaire $X - A$.
Comme le montre la diagonale montante de la table, $A\Delta(X - A) = X$
Autre démo sans la table : $A\Delta(X - A) = (A \cup (X - A)) - (A \cap (X - A)) = X - \emptyset = X$.

Exercice 3. *(7 + 11 = 18 points)*

Un chocolatier prépare un nouveau produit dont l'emballage est un prisme droit à base triangulaire. La base de ce prisme est un triangle équilatéral. Afin de minimiser le matériau servant à la fabrication de l'emballage, le chocolatier cherche à déterminer les dimensions de ce prisme, sachant que son volume vaut 483 cm^3.



a) Montrer que l'aire totale de cet emballage, en cm^2, est donnée par :

$$A(x) = \frac{\sqrt{3}x^2}{2} + \frac{1932\sqrt{3}}{x}$$

où x est la mesure, en cm, du côté du triangle équilatéral.

La base du prisme est un triangle équilatéral : $A_{base}(x) = \dfrac{\sqrt{3}x^2}{4}$

Le volume du prisme : $V(x) = \dfrac{\sqrt{3}x^2}{4}h = 483 \Longrightarrow h = \dfrac{483 \cdot 4}{\sqrt{3}x^2} = \dfrac{1932}{\sqrt{3}x^2} = \dfrac{644\sqrt{3}}{x^2}$

L'aire d'une face : $A_{face}(x) = hx = \dfrac{1932x}{\sqrt{3}x^2} = \dfrac{1932}{\sqrt{3}x} = \dfrac{1932\sqrt{3}}{3x}$

L'aire totale de cet emballage : $A(x) = 2A_{base}(x) + 3A_{face}(x) = \dfrac{2\sqrt{3}x^2}{4} + \dfrac{3 \cdot 1932\sqrt{3}}{3x}$

Par conséquent, $\boxed{A(x) = \dfrac{\sqrt{3}x^2}{2} + \dfrac{1932\sqrt{3}}{x} = \dfrac{\sqrt{3}x^3 + 3864\sqrt{3}}{2x}}$

b) Déterminer les dimensions de cet emballage au millimètre près pour que l'aire totale du prisme à base triangulaire soit minimale.

$A'(x) = \left(\dfrac{\sqrt{3}x^2}{2} + \dfrac{1932\sqrt{3}}{x}\right)' = \dfrac{2x\sqrt{3}}{2} - 1932\sqrt{3}x^{-2} = \dfrac{\sqrt{3}(x^3 - 1932)}{x^2}$ ou encore

$A'(x) = \left(\dfrac{\sqrt{3}x^3 + 3864\sqrt{3}}{2x}\right)' = \dfrac{3\sqrt{3}\,x^2 \cdot 2x - (\sqrt{3}x^3 + 3864\sqrt{3}) \cdot 2}{4x^2} = \dfrac{\sqrt{3}(x^3 - 1932)}{x^2}$

$A'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x^3 - 1932 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^3 = 1932 \;\Leftrightarrow\; x = \sqrt[3]{1932} \cong 12.45$ cm.

x	$-\infty$		0		$\sqrt[3]{1932}$		$+\infty$
$A'(x)$				$-$	0	$+$	
$A(x)$			$+\infty$	$\searrow$	Min	$\nearrow$	$+\infty$

<u>Minimum</u> : $x \cong 12.5$ d'où $h = \dfrac{1932}{\sqrt{3}(\sqrt[3]{1932})^2} \cong 7.19.$

On peut aussi justifier que $\sqrt[3]{1932}$ est bien un minimum en étudiant la courbure de A :

$A''(x) = \dfrac{\sqrt{3}(x^3 + 3864)}{x^3} > 0 \;\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, donc A est convexe et $\sqrt[3]{1932}$ est un minimum.

Dimensions de l'emballage au millimètre près : $\boxed{x = 125 \text{ mm}, h = 72 \text{ mm}}$

Exercice 4. *(6 + 3 = 9 points)*

a) Soit $(G, *)$ un groupe. Montrer qu'un sous-ensemble non-vide $H \subset G$ est un sous-groupe si et seulement si $x * y$ et y^{-1} appartiennent à H pour tous $x, y \in H$.

Si H est un sous-groupe de G, la condition est vraie car $*$ est une loi de composition sur H pour laquelle tout élément de H admet un inverse (dans H).
Supposons maintenant que la condition est vérifiée. Alors $*$ est une loi de composition sur H (pour $x, y \in H$, on a bien que le produit $x * y$ est dans H). Elle est associative car $*$ l'est dans G. Comme H est non-vide, on peut choisir un élément $x \in H$. Son inverse x^{-1} est aussi dans H et donc le produit $x * x^{-1}$ de même. Ceci montre que l'élément neutre e de G se trouve dans H. Tous les éléments de H sont inversibles dans G et par hypothèse l'inverse se trouve dans H. Par conséquent, H est un sous-groupe.

b) Montrer que $E = \{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$, où $\cdot$ est la multiplication usuelle.

Remarquons d'abord que $E \neq \emptyset$ car $1 = 2^0 \in E$.
Si $2^n,\ 2^m \in E$, alors $2^n \cdot 2^m = 2^{n+m} \in E$.
De même, si $2^n \in E$, alors $2^{-n} \in E$ est son inverse. C'est donc bien un sous-groupe.

Exercice 5. *(4 points)*

Soit K un corps et $x, y \in K$. Montrer que si $xy = 0$, alors soit $x = 0$, soit $y = 0$.

Supposons que $y \neq 0$. Alors l'inverse y^{-1} existe et nous pouvons écrire

$$0 = 0y^{-1} = (xy)y^{-1} = x(yy^{-1}) = x \cdot 1 = x.$$

Exercice 6. *(2 + 4 = 6 points)*

Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau.

a) Donner les conditions pour qu'un sous-ensemble $B \subset A$ soit un sous-anneau de A.
B est un sous-anneau de A si $\forall\ x, y \in B,\ \ -x,\ \ x + y,\ \ x \cdot y$ et 1 appartiennent à B.

b) Montrer que $Z(A) = \{z \in A \mid za = az\ \forall a \in A\}$ est un sous-anneau de A.
Soit $z, z' \in Z(A)$. Alors, pour tout $a \in A$,

$$(z + z')a = za + z'a = az + az' = a(z + z')$$

et

$$(zz')a = z(z'a) = z(az') = (za)z' = (az)z' = a(zz').$$

De plus, $1 \in Z(A)$ car $1 \cdot a = a = a \cdot 1$, et, si $z \in Z(A)$, on a aussi que $-z \in Z(A)$ car $(-z) \cdot a = -(za) = -(az) = a \cdot (-z)$.
Cela montre que $Z(A)$ est un sous-anneau de A.

Exercice 7. *(4 + 4 = 8 points)*

Soit V un K-espace vectoriel, U et W des sous-espaces tels que $U + W = V$.

Montrer que $U + W$ est une somme directe si et seulement si tout vecteur $x \in V$ s'écrit de manière *unique* $x = u + w$ avec $u \in U$ et $w \in W$.
Supposons que $U \cap W = \{0\}$. Soit $u + w = u' + w' \in U + W$ avec $u, u' \in U$ et $w, w' \in W$. Alors

$$U \ni u - u' = w' - w \in W,$$

et donc, $u - u' = w' - w \in U \cap W = \{0\}$. Ainsi, on a

$$u - u' = 0 \quad \text{et} \quad w' - w = 0,$$

ce qui montre l'unicité de la décomposition de x comme somme d'un élément u de U et d'un élément v de V.

On montre la réciproque par contraposition : Si $U + W$ n'est pas une somme directe, alors $\exists v \neq 0$ dans $U \cap W$. La décomposition de v comme somme d'un élément de U et d'un élément de V n'est pas unique car $v = v + 0$ avec $v \in U$ et $0 \in W$ ou alors avec $0 \in U$ et $v \in W$.