Pre test 3 - Nb complexes, optimisation et structures algériques 01.2024

Le pretest dure 105 minutes. Justifiez toutes vos réponses.

Exercice 1. *(13 points)*

a) Mettre $\dfrac{e^{-i\frac{\pi}{2}}}{i}$ sous forme cartésienne

b) Déterminer le logarithme complexe (détermination principale) de $-\pi i$.

c) Caractériser géométriquement la similitude d'équation $f(z) = (1+i)z + 1 - i$.

Exercice 2. *(12 points)*

On considère $X = \{a, b\}$ l'ensemble constitué de deux éléments a et b.

a) Décrire $\mathcal{P}(X)$ et écrire la table de la loi de composition de la différence symétrique Δ.

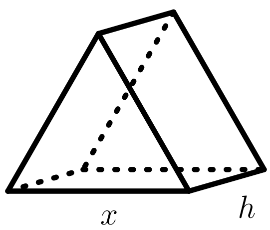
b) En déduire que la Δ admet un élément neutre et donner cet élément neutre.

c) Montrer que tout sous-ensemble $A \subset X$ admet un inverse pour Δ et donner cet inverse.

d) Calculer la différence symétrique d'un ensemble A et de son complémentaire $X - A$.

Exercice 3. *(18 points)*

Un chocolatier prépare un nouveau produit dont l'emballage est un prisme droit à base triangulaire. La base de ce prisme est un triangle équilatéral. Afin de minimiser le matériau servant à la fabrication de l'emballage, le chocolatier cherche à déterminer les dimensions de ce prisme, sachant que son volume vaut 483 cm^3.



a) Montrer que l'aire totale de cet emballage, en cm^2, est donnée par :

$$A(x) = \frac{\sqrt{3}x^2}{2} + \frac{1932\sqrt{3}}{x}$$

où x est la mesure, en cm, du côté du triangle équilatéral.

b) Déterminer les dimensions de cet emballage au millimètre près pour que l'aire totale du prisme à base triangulaire soit minimale.

Exercice 4. *(9 points)*

a) Soit $(G, *)$ un groupe. Montrer qu'un sous-ensemble non-vide $H \subset G$ est un sous-groupe si et seulement si $x * y$ et y^{-1} appartiennent à H pour tous $x, y \in H$.

b) Montrer que $E = \{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$, où $\cdot$ est la multiplication usuelle.

Exercice 5. *(4 points)*

Soit K un corps et $x, y \in K$. Montrer que si $xy = 0$, alors soit $x = 0$, soit $y = 0$.

Exercice 6. *(6 points)*

Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau.

a) Donner les conditions pour qu'un sous-ensemble $B \subset A$ soit un sous-anneau de A.

b) Montrer que $Z(A) = \{z \in A \mid za = az \ \forall a \in A\}$ est un sous-anneau de A.

Exercice 7. *(8 points)*

Soit V un K-espace vectoriel, U et W des sous-espaces tels que $U + W = V$.

Montrer que $U + W$ est une somme directe si et seulement si tout vecteur $x \in V$ s'écrit de manière *unique* $x = u + w$ avec $u \in U$ et $w \in W$.