IV. Applications linéaires

Le programme pour aujourd'hui est de continuer la discussion sur les bases d'un espace vectoriel, puis d'étudier les applications entre espaces vectoriels qui préservent la structure à disposition, c'est-à-dire la somme et l'action.

1 Dimension

Soit K un corps et V un K-espace vectoriel de dimension finie, ce qui signifie que V admet une base finie. Pour pouvoir définir la notion de dimension, nous devons montrer que le nombre de vecteurs qu'il faut pour former une base ne varie pas d'une base à l'autre.

Proposition 1.1. *Soit V un K-espace vectoriel de dimension finie.*
Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de V, alors $|\mathcal{B}| = |\mathcal{B}'|$.

Démonstration. On a vu la semaine passée que le nombre d'éléments d'une partie libre de V est toujours inférieur ou égal au nombre d'éléments d'un système de générateurs.

B est libre et B' est un système de générateurs $\Rightarrow |B| \leq |B'|$

B' est libre et B est un système de générateurs $\Rightarrow |B'| \leq |B|$

Ainsi, $|B| = |B'|$. □

La définition suivante a donc un sens.
Remarquons que si V n'est pas de dimension finie, alors, par définition, aucune base n'est finie.

Définition 1.2. Soit V un K-espace vectoriel.
La *dimension* de V sur K, notée $\dim_K(V)$ ou simplement $\dim V$, est le nombre d'éléments que contient une base de V.
Si V n'est pas de dimension finie, on dit que la dimension de V est infinie.

Exemple 1.3.
Les espaces vectoriels $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ou celui des suites de nombres complexes sont de dimension infinie.

En revanche $\dim \mathbb{R}^n = n$ car la base canonique contient exactement n vecteurs. L'espace vectoriel $\mathbb{F}_{23}[x]^{\leq n}$ des polynômes de degré $\leq n$ à coefficients dans le corps à 23 éléments est de dimension
$n+1$ car $(1, x, x^2, \ldots, x^n)$ est une base.

Clairement, si U est un sous-espace de V, $\dim U \leq \dim V$, puisqu'on peut compléter une base de U en une base de V. Ainsi, la dimension d'une somme de sous-espaces est plus grande ou égale à la dimension de chacun d'eux. Mais comment calcule-t-on explicitement cette dimension ?

Proposition 1.4. *Soient V un K-espace vectoriel et $U, W \subset V$ deux sous-espaces de V. Alors*

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

$$(k + m + n = (k+m) + (k+n) - k)$$

Démonstration. Nous devons comparer les tailles des bases des sous-espaces en jeu.
Pour faire cela, commençons par choisir une base $(v_1, \ldots, v_k)$ de l'intersection $U \cap W$.
C'est une famille libre de U que nous pouvons compléter en une base $(v_1, \ldots, v_k, u_1, \ldots, u_m)$ de U.
De même on construit une base $(v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_n)$ de W.

Il suffit de montrer que $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_k, u_1, \ldots, u_m, w_1, \ldots, w_n)$ est une base de $U + W$.

Il s'agit d'un système de générateurs car tout élément de $U + W$ s'écrit $u + w$ avec $u \in U$ et $w \in W$. Puisque u est combinaison linéaire des éléments v_i et des u_j et que w est combinaison linéaire des v_i et des w_l, on voit que $u + w \in <\mathcal{B}>$. Il reste à voir qu'il s'agit de vecteurs linéairement indépendants. Considérons donc une combinaison linéaire nulle

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k + \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_m u_m + \gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_n w_n = 0_V \qquad (*)$$

où les $\alpha_i, \beta_j, \gamma_l \in K$. On récrit cette équation comme suit :

$$v = \underbrace{\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k + \beta_1 u_1 + \ldots + \beta_m u_m}_{v \in U} = \underbrace{-\gamma_1 w_1 - \ldots - \gamma_n w_n}_{v \in W}$$

Ainsi $v \in U \cap W$ et donc $v = \delta_1 v_1 + \ldots + \delta_k v_k = -\gamma_1 w_1 - \ldots - \gamma_n w_n$

$\Rightarrow \gamma_1 w_1 + \ldots + \gamma_n w_n + \delta_1 v_1 + \ldots + \delta_k v_k = 0$

Or $(v_1, \ldots v_k, w_1, \ldots w_n)$ forment une base de W, donc une famille libre !

Ainsi, $\gamma_1 = \dots = \gamma_n = \delta_1 = \dots = \delta_k = 0$ et dans (*) il reste
$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_m u_m = 0$
Or, $(v_1 \dots v_k, u_1, \dots, u_m)$ est une base de $U \Rightarrow \alpha_i = 0\ \forall i$ et $\beta_j = 0\ \forall j$.

Ainsi, B est libre. C'est bien une base de $U+W$.

□

Exemple 1.5. Considérons dans $\mathbb{F}_2[x]^{\leq 3}$ les sous-espaces $U = \{p(x) \mid p(0) = 0\}$ et $W = \mathbb{F}_2[x]^{\leq 2}$.

- U est constitué des polynômes de la forme $ax^3 + bx^2 + cx$
  $B_U = (x^3, x^2, x)$ donc $\dim U = 3$.
- W est constitué des polynômes de la forme $ax^2 + bx + c$
  $B_W = (x^2, x, 1)$ donc $\dim W = 3$.
- $\dim(U+W) = 4$ car $(x^3, x^2, x, 1)$ en est une base
- $\dim(U \cap W) = 3 + 3 - 4 = 2$. En effet, une base possible est (x^2, x).

2 La linéarité

Nous avons parlé dans ce module de groupes, d'anneaux, de corps et d'espaces vectoriels, mais nous n'avons pas encore appris à comparer les objets de chacune de ces classes entre eux. Ceci nous amène à la notion d'homomorphisme, du grec $o\mu o\varsigma$, semblable, et $\mu o\rho\varphi\eta$, forme.

Définition 2.1. Soient $(G, *)$ et $(H, \circ)$ deux groupes.
Un *homomorphisme* de groupes est une application $f : G \to H$ telle que $f(g * g') = f(g) \circ f(g')$.
Soient A et B deux anneaux. Un *homomorphisme* d'anneaux est une application $f : A \to B$ telle que $f(a + a') = f(a) + f(a')$, $f(aa') = f(a)f(a')$ et $f(1_A) = 1_B$.

Ainsi, en général, un homomorphisme, ou parfois simplement "morphisme", est une application qui préserve la structure à disposition. Le premier exemple qui vient à l'esprit est l'inclusion d'un sous-anneau. Par exemple, l'inclusion $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ est un homomorphisme d'anneaux (injectif).

Exemple 2.2. Considérons l'application de réduction modulo p qui envoie un entier relatif sur sa classe de congruence modulo p. Ainsi $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est définie par $f(n) = [n]$.
Il s'agit d'un homomorphisme d'anneaux (surjectif) par définition de la somme et du produit dans les entiers modulo p.

Il est naturel de définir maintenant un *homomorphisme d'espaces vectoriels* comme étant une application qui préserve la somme et l'action.

Définition 2.3. Soient K un corps, V et W deux K-espaces vectoriels.
Une *application* (K-) *linéaire* est une application $\alpha : V \to W$ telle que, $\forall v, v' \in V$ et $\forall \lambda \in K$,

- $\alpha(v + v') = \alpha(v) + \alpha(v')$;
- $\alpha(\lambda v) = \lambda\alpha(v)$.

On note souvent $\mathcal{L}(V, W)$ l'ensemble de toutes les applications linéaires de V vers W.
Lorsque $V = W$ on abrège en $\mathcal{L}(V)$.
On appelle *isomorphisme* une application linéaire bijective.

En particulier, on voit que $\alpha(0_V) = 0_W$, car si $\lambda = 0$, $\alpha(0_V) = \alpha(0 \cdot v) \overset{\text{linéarité}}{=} 0\alpha(v) = 0_W$

De nouveau, les exemples évidents qui nous viennent à l'esprit sont les inclusions de sous-espaces vectoriels, mais nous montrerons que des transformations du plan comme les rotations, symétries, homothéties et projections orthogonales sont des applications $\mathbb{R}$-linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même.

Proposition 2.4. *Soit $\alpha : V \to W$ une application linéaire, $U \subset V$ et $Z \subset W$ des sous-espaces. Alors $\alpha(U)$ est un sous-espace de W et $\alpha^{-1}(Z)$ est un sous-espace de V.*

Démonstration. La première affirmation se fera en exercice.
Montrons simplement la deuxième affirmation à l'aide de notre critère favori.

- $\alpha(0_V) = 0_W$ donc $0_V \in \alpha^{-1}(Z)$ qui est donc non vide
- Si $v, v' \in \alpha^{-1}(Z) \Rightarrow \alpha(v), \alpha(v') \in Z$
  De plus $\alpha(v) + \alpha(v') = \alpha(v + v') \in Z \Rightarrow v + v' \in \alpha^{-1}(Z)$.
- Si $v \in \alpha^{-1}(Z)$ et $\lambda \in K \Rightarrow \alpha(v) \in Z$
  $\lambda\alpha(v) \in Z$ et $\alpha(\lambda v) \in Z$ □
  $\Rightarrow \lambda v \in \alpha^{-1}(Z)$

Exemple 2.5. Considérons les espaces vectoriels $\mathbb{C}^3$ et $\mathbb{C}^4$.
Un exemple d'application $\mathbb{C}$-linéaire $\alpha : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^4$ est donné par

$\alpha(z_1, z_2, z_3) = (z_1 + i z_2 ; -z_3 ; 0 ; z_1 - z_2 - iz_3)$

Chacune des composantes de l'image est une combinaison linéaire de z_1, z_2, z_3.

Exemple 2.6. L'application $\beta : \mathbb{F}_7^3 \to \mathbb{F}_7$ définie par $\beta(a, b, c) = a + b - 3c + 1$ n'est pas linéaire car $\beta(0; 0; 0) = 1 \neq 0$.

3 Noyau, image et rang

SEV : Sous Espace Vectoriel

Etant donné une application linéaire, deux sous-espaces importants nous aident à comprendre la signification géométrique de cette application.

Définition 3.1. Soit $\alpha : V \to W$ une application linéaire.
Le *noyau* de α, noté $\mathrm{Ker}(\alpha)$, est le sous-espace $\alpha^{-1}(0) = \{v \in V \mid \alpha(v) = 0\}$.
L'*image* de α, notée $\mathrm{Im}(\alpha)$, est le sous-espace $\alpha(V) = \{w \in W \mid \exists v \in V \text{ tel que } \alpha(v) = w\}$.
Le *rang* de α est la dimension de $\mathrm{Im}(\alpha)$.

Exemple 3.2. Considérons l'application linéaire $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $\alpha((x;y)) = \left(\frac{x-y}{2}; \frac{y-x}{2}\right)$.
Calculons le noyau et l'image de cette application linéaire du plan.

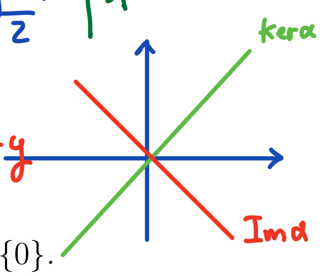
$\mathrm{Ker}\,\alpha = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\} = \langle (1;1) \rangle$ car $\begin{cases} \frac{x-y}{2} = 0 \\ \frac{y-x}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y$

$\mathrm{Ker}\,\alpha$ est un SEV de $\mathbb{R}^2$ de dimension 1 qui est la 1ère bissectrice du système d'axes Oxy.

$\mathrm{Im}(\alpha) = \{(u;v) \in \mathbb{R}^2 \mid u = -v\} = \langle (2;-2) \rangle$ car $\begin{cases} u = \frac{x-y}{2} \\ v = \frac{y-x}{2} \end{cases} \left| \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right.$ $u + v = 0$

$\mathrm{Im}(\alpha)$ est la 2e diagonale du système d'axes Oxy.

En fait, α est la projection orthogonale de $\mathbb{R}^2$ sur la droite $x = -y$



Proposition 3.3.
Une application linéaire est injective si et seulement son noyau est le sous-espace $\{0\}$.

Démonstration. Si $\alpha : V \to W$ est injective, alors le seul vecteur dont l'image est 0_W doit être 0_V, si bien que $\mathrm{Ker}(\alpha) = \{0\}$.
Réciproquement, si le noyau est nul, montrons que α est injective.

Soient $v, v' \in V$ tels que $\alpha(v) = \alpha(v')$

$\Rightarrow \alpha(v - v') \underset{\text{linéarité}}{=} \alpha(v) - \alpha(v') = 0_W \Rightarrow v - v' \in \mathrm{Ker}(\alpha) = \{0\}$

$\Rightarrow v - v' = 0_V \Rightarrow v = v' \Rightarrow \alpha$ injective. $\square$

Le théorème du rang explique la relation très forte qui existe entre les dimensions des sous-espaces vectoriels en jeu, celle du noyau et celle de l'image.

Théorème 3.4. du rang.
Soit $\alpha : V \to W$ une application linéaire et supposons que V est de dimension finie. Alors

$$\dim V = \dim(\ker \alpha) + \mathrm{rang}(\alpha)$$

Démonstration. Puisque V est de dimension finie, le sous-espace $\mathrm{Ker}(\alpha)$ aussi. Choisissons une base $(v_1, \dots, v_k)$ du noyau et complétons-la en une base de V tout entier, $\mathcal{B}_V = (v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_n)$. Pour terminer la preuve, il suffit de montrer que l'image de α est un sous-espace de dimension n.

Considérons donc les vecteurs $\alpha(u_1), \dots, \alpha(u_n)$ de l'espace vectoriel W. Nous allons montrer qu'ils forment une base de $\mathrm{Im}(\alpha)$.
En effet, si $w \in \mathrm{Im}(\alpha)$, il existe $v \in V$ tel que $\alpha(v) = w$. Ecrivons ce vecteur v comme combinaison linéaire des vecteurs de la base $\mathcal{B}_V$ que nous avons construite :

$$\begin{aligned} w = \alpha(v) &= \alpha(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k + \mu_1 u_1 + \cdots + \mu_n u_n) \\ &\underset{\alpha \text{ linéaire}}{=} \lambda_1 \underbrace{\alpha(v_1)}_{=0} + \dots + \lambda_k \underbrace{\alpha(v_k)}_{=0} + \mu_1 \alpha(u_1) + \dots + \mu_n \alpha(u_n) \end{aligned}$$

où les coefficients λ_i et μ_j sont dans K. Ainsi, w est bien combinaison linéaire de vecteurs $\alpha(u_j)$.
Il reste encore à montrer que ces vecteurs sont linéairement indépendants.
Considérons donc une combinaison linéaire nulle

$$0_W = \gamma_1 \alpha(u_1) + \cdots + \gamma_n \alpha(u_n) \overset{\alpha \text{ linéaire}}{=} \alpha(\gamma_1 u_1 + \cdots + \gamma_n u_n).$$

Ainsi, le vecteur $\gamma_1 u_1 + \cdots + \gamma_n u_n$ appartient à $\mathrm{Ker}(\alpha)$

$\Rightarrow \exists$ coefficients $\delta_i \in K$ tels que $\gamma_1 u_1 + \dots + \gamma_n u_n = \delta_1 v_1 + \dots + \delta_k v_k$

$\Rightarrow \gamma_1 u_1 + \dots + \gamma_n u_n - \delta_1 v_1 - \dots - \delta_k v_k = 0_V$

et comme $(u_1 \dots u_n v_1 \dots v_k)$ est une base de V,

$\gamma_i = 0 \ \forall i$ et $\delta_j = 0 \ \forall j$. Ainsi $\alpha(u_1), \dots \alpha(u_n)$ est une famille libre.

□

Corollaire 3.5. *Soit V et W des K-espaces vectoriels.*
Alors, si $\dim V < \dim W$, il n'existe aucune application linéaire surjective $\alpha : V \to W$.

Corollaire 3.6. *Soit V et W des K-espaces vectoriels et $\alpha : V \to W$ une applicatin linéaire.*
Alors, si rang$(\alpha) = \dim W$, α est surjective.

Corollaire 3.7. *Soit V et W des K-espaces vectoriels de même dimension, finie.*
Alors une applicatin linéaire $\alpha : V \to W$ est injective si et seulement si elle est surjective si et seulement si elle est bijective.

Démonstration.
Le théorème du rang nous dit que α est injective si et seulement si $\dim \operatorname{Im}(\alpha) = \dim V$.
Puisque $\dim V = \dim W$ ceci arrive exactement lorsque α est surjective. □

Exemple 3.8. Soit $\alpha : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ une application $\mathbb{C}$-linéaire.
Elle est donc de la forme $\alpha(z, z') = az + bz'$ avec $a, b \in \mathbb{C}$.
Lesquelles de ces applications sont surjectives, injectives, bijectives ?

- $a = b = 0$, α est l'application nulle, $\operatorname{Ker}(\alpha) = \mathbb{C}^2 \neq \{(0;0)\}$
  α n'est pas injective, ni surjective.
- Sinon : $\operatorname{rang}(\alpha) > 0$
  Comme $\dim \mathbb{C} = 1$ ($\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{C}$-espace vectoriel),
  $\operatorname{rang}(\alpha) = 1$ ($\leq \dim \mathbb{C} = 1$) $\Rightarrow \alpha$ surjective.
  Thm rang $\Rightarrow \dim(\operatorname{Ker}(\alpha)) = \dim \mathbb{C}^2 - \operatorname{rang}(\alpha) = 2 - 1 = 1 \neq 0$
  $\xRightarrow{\text{prop 3.3}} \alpha$ n'est pas injective $\Rightarrow \alpha$ jamais bijective.

4 La matrice d'une application linéaire

Nous travaillons dans cette section avec deux K-espaces vectoriels V et W de dimensions finies, disons m et n respectivement. Nous aimerions mieux comprendre l'espace vectoriel de toutes les applications linéaires $\alpha : V \to W$. Combien y en a-t-il ? Comment les représenter et travailler avec ? A quoi correspondent-elles dans la pratique ?

Définition 4.1. Une *matrice $n \times m$ à coefficients dans K* est un tableau, entouré de parenthèses, de n lignes et m colonnes dans lequel toutes les entrées sont des scalaires (de K) :

$$A = \left.\overbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}}^{m \text{ colonnes}}\right\} n \text{ lignes}$$

On note $M_{n \times m}(K)$ l'ensemble de toutes ces matrices.

On additionne les matrices de même taille coefficient par coefficient, si bien que $M_{n\times m}(K)$ est un groupe abélien. On le munit d'une action de K, coefficient par coefficient, qui en fait K-espace vectoriel.

Proposition 4.2. *L'espace vectoriel $M_{n\times m}(K)$ est de dimension $n \cdot m$.*

Démonstration. La base canonique de $M_{n\times m}(K)$ est formée des matrices e_{ij} avec $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$ dont tous les coefficients sont nuls, à l'exception de celui de la $i^{\text{ème}}$ ligne, $j^{\text{ème}}$ colonne qui vaut 1_K. □

Définition 4.3. Soit $\alpha : V \to W$ une application linéaire.
On fixe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_m)$ de V et $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ de W.
Soient a_{ij} les coefficients dans K des combinaisons linéaires, uniques, $\alpha(e_i) = \sum a_{ji} f_j$.

$\alpha(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i$

$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$

Alors la matrice $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$ est la matrice de α dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

j^e colonne de la matrice qui a n lignes

Cette définition permet de construire une application $T : \mathcal{L}(V, W) \to M_{n\times m}(K)$.

Théorème 4.4. *L'application $T : \mathcal{L}(V, W) \to M_{n\times m}(K)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En particulier,* $\dim \mathcal{L}(V, W) = n \cdot m$.

Démonstration. Voyons d'abord pourquoi l'application T est linéaire.
Si α et β sont deux applications linéaires, alors $(\alpha+\beta)(e_i) = \alpha(e_i) + \beta(e_i)$, si bien que les coefficients de la matrice de $\alpha + \beta$ sont la somme de ceux des matrices de α et de β.
De même, $T(\lambda\alpha) = \lambda T(\alpha)$ pour tout $\lambda \in K$.
De plus, l'application linéaire T est injective, car si $T(\alpha)$ est la matrice nulle, alors α est l'application nulle.

Enfin, T est aussi surjective car à toute matrice $(a_{ij})_{n\times m}$ on peut faire correspondre $\alpha : V \to W$ définie comme suit :
Pour tout vecteur $v \in V$ s'écrivant $v = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j e_j$ dans la base $\mathcal{B}$, on pose $\alpha(v) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_{ij} f_i$.
α est clairement linéaire et $\alpha(e_j) = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot a_{ij} f_i$, on retrouve bien les coefficients de la j^e colonne de $T(\alpha)$ □

Ainsi, une fois qu'on s'est fixé une base $\mathcal{B}_V$ de l'espace vectoriel de départ V et une base $\mathcal{B}_W$ de l'espace vectoriel d'arrivée W, la matrice d'une application se construit en plaçant dans les colonnes les composantes des images des vecteurs de la base $\mathcal{B}_V$ relativement à la base $\mathcal{B}_W$.

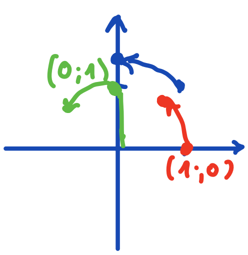
Réciproquement, pour calculer l'image d'un vecteur $v \in V$ par une application linéaire dont on nous donne seulement la matrice, il faut exprimer le vecteur v comme combinaison linéaire des vecteurs de la base $\mathcal{B}_V = (e_1, \dots, e_m)$, écrire ses composantes dans un vecteur colonne et multiplier ce vecteur à droite par A pour obtenir les composantes de $\alpha(v)$ relativement à $\mathcal{B}_W = (f_1, \dots, f_n)$:

$$v = \sum \lambda_j e_j \qquad \Rightarrow \quad A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum a_{1j}\lambda_j \\ \vdots \\ \sum a_{nj}\lambda_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \quad \alpha(v) = \sum \mu f_i$$

Exemple 4.5. Soit $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire donnée par la matrice $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Alors l'image du point $(1;1)$ est donné par

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$



$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = 1^{er} \text{ colonne de } A$$

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = 2^{e} \text{ colonne de } A$$

A est en fait la matrice d'une rotation de $\frac{\pi}{4}$ de centre O.