

Exercice 1. Pour calculer le rayon connaissant les longueurs des côtés, on utilise d'abord le théorème du cosinus pour trouver l'angle α en A :

$$\alpha = \arccos\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) \cong 36.9^\circ,$$

et donc $r = \frac{a}{2\sin(\alpha)} = 20.75$ par le théorème du sinus.

Exercice 2.

a) L'angle manquant se déduit immédiatement, $\gamma = 180 - \alpha - \beta = 35^\circ$. Les côtés manquant se calculent à l'aide du théorème du sinus :

$$\frac{\sin(43^\circ)}{10} = \frac{\sin(102^\circ)}{b} = \frac{\sin(35^\circ)}{c},$$

duquel on tire $b = \frac{10\sin(102^\circ)}{\sin(43^\circ)} \cong 14.3$ et $c = \frac{10\sin(35^\circ)}{\sin(43^\circ)} \cong 8.4$. Grâce au théorème de l'aire, on a que

$$\sigma(\triangle ABC) = \frac{1}{2}bc\sin(\alpha) \cong 41.$$

b) L'angle α peut être obtenu grâce au théorème du cosinus $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$, duquel on tire

$$\alpha = \arccos\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) \cong 20.6.$$

Les angles manquants peuvent se déterminer à nouveau à l'aide du théorème du cosinus,

$$\beta = \arccos\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right) \cong 144.11^\circ,$$

et donc $\gamma = 180 - \alpha - \beta = 15.3^\circ$. Grâce au théorème de l'aire, on a

$$\sigma(\triangle ABC) = \frac{1}{2}bc\sin(\alpha) \cong 31.7.$$

c) Grâce au théorème du sinus on a

$$\beta = \arcsin\left(\frac{20\sin(32^\circ)}{13}\right) = 54.6^\circ,$$

ou $\beta = 180 - 54.6 = 125.4^\circ$ (on a deux solutions car $\sin(\alpha) = \sin(180^\circ - \alpha)$). Les deux solutions sont donc

$$\beta = 54.6, \gamma = 180 - \alpha - \beta = 93.4^\circ, c = \frac{13\sin(93.4^\circ)}{\sin(32^\circ)} \cong 24.$$

ou

$$\beta = 125.4, \gamma = 180 - \alpha - \beta = 22.6^\circ, c = \frac{13\sin(22.6^\circ)}{\sin(32^\circ)} \cong 9.4.$$

Grâce au théorème de l'aire, on a respectivement

$$\sigma(\triangle ABC) = \frac{1}{2}bc\sin(\alpha) \cong 129.8,$$

ou

$$\sigma(\triangle ABC) = \frac{1}{2}bc\sin(\alpha) \cong 49.8.$$

d) Par le théorème du sinus,

$$\sin(\gamma) = \frac{19\sin(40^\circ)}{5} \cong 2.44.$$

Cette équation n'a pas de solution car le sinus prend des valeurs entre -1 et 1 . On en déduit que le triangle est inconstruable.

- e) Grâce au théorème du cosinus on a $a = \pm\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)} \cong \pm 16.8$, comme on peut exclure la solution négative, on en conclut que $a \cong 16.8$. À l'aide du théorème du cosinus, on obtient

$$\beta = \arccos\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right) \cong 86.2^\circ,$$

et donc $\gamma = 180 - \alpha - \beta = 36.8^\circ$. Grâce au théorème de l'aire, on calcule

$$\sigma(\triangle ABC) = \frac{1}{2}bc \sin(\alpha) \cong 100.6.$$

Exercice 3. Utilisons le théorème du sinus pour calculer $\sin(\beta) = \frac{\sin(\alpha)b}{a} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ si bien que

$$\beta = \frac{\pi}{12} \quad \text{ou} \quad \beta = \frac{11\pi}{12}$$

(par un exercice d'une série précédente). Si $\beta = \frac{11\pi}{12}$, on aurait $\gamma = \pi - \alpha - \beta = -\frac{\pi}{12} < 0$ qui n'est pas une valeur admissible dans un triangle. Il ne reste que la solution $\beta = \frac{\pi}{12}$ pour laquelle $\gamma = \frac{3\pi}{4}$ (car la somme des angles d'un triangle vaut π). Une autre application du théorème du sinus permet alors de calculer $c = \frac{a \sin(\gamma)}{\sin(\alpha)} = \sqrt{6} + \sqrt{2}$. Grâce au théorème de l'aire, on obtient

$$\sigma(\triangle ABC) = \frac{1}{2}ab \sin(\gamma) = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3})\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}.$$

Exercice 4.

- a) En élevant la formule de l'aire au carré, on obtient $\sigma^2 = \frac{1}{4}a^2b^2 \sin^2(\gamma)$ et donc, comme $\sin^2(\gamma) = 1 - \cos^2(\gamma)$, on obtient $\sigma = \frac{1}{2}ab\sqrt{1 - \cos^2(\gamma)}$.

- b) Par le théorème du cosinus, $\cos(\gamma) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$, et en substituant dans la formule du dessus, on obtient
- $$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{2}ab\sqrt{1 - \frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2b^2}} = \frac{1}{2}ab\sqrt{\frac{4a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4 - 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2}{4a^2b^2}} \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}. \end{aligned}$$

- c) Développons $\sigma = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ en introduisant $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$; on obtient

$$\begin{aligned} \sigma &= \sqrt{\frac{1}{2}(a+b+c) \left(\frac{1}{2}(a+b+c) - a\right) \left(\frac{1}{2}(a+b+c) - b\right) \left(\frac{1}{2}(a+b+c) - c\right)} \\ &= \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{a+b+c-2a}{2} \cdot \frac{a+b+c-2b}{2} \cdot \frac{a+b+c-2c}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{-a+b+c}{2} \cdot \frac{a-b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2}} \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}. \end{aligned}$$

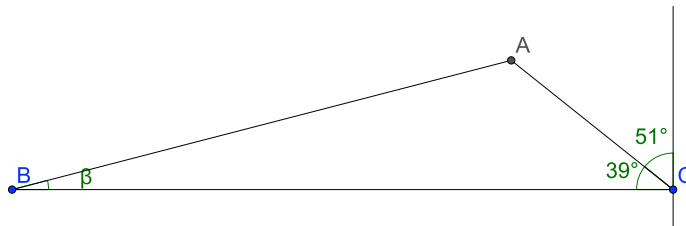
Ainsi, on arrive au même résultat qu'au point b) et la formule de Héron est démontrée.

- d) Par Héron, $\sigma = \sqrt{15(15-10)^3} = 25\sqrt{3}$. La hauteur d'un triangle équilatéral se calcule par Pythagore, $h = \sqrt{10^2 - 5^2} = 5\sqrt{3}$ et donc l'aire vaut $\frac{10 \cdot 5\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3}$. Les deux résultats sont bien les mêmes.
- e) $\sigma = \sqrt{20.5(20.5-12)(20.5-20)(20.5-9)} = \sqrt{20.5 \cdot 8.5 \cdot 0.5 \cdot 11.5} = \sqrt{1001.9375} \cong 31.6$.

Exercice 5.

- a) Faux car si $x = \frac{5\pi}{8}$ alors on a aussi $\sin(2x) = \cos(2x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et pourtant $\frac{\pi}{8} \neq \frac{5\pi}{8}$. En fait, l'ensemble des solutions de l'équation $\sin(2x) = \cos(2x)$ est $\left\{ \frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.
- b) Vrai, $s = 20$, $s - c = 0$ et donc $\sigma = 0$.
- c) Vrai car $\sin(3x) = \sin(2x+x) = \sin(2x)\cos(x) + \cos(2x)\sin(x) = 2\cos(x)\sin(x)\cos(x) + (2\cos^2 x - 1) \cdot \sin(x) = 2\sin(x)\cos^2(x) + (2\cos^2(x) - 1) \cdot \sin(x) = \sin(x) \cdot (4\cos^2 x - 1)$.

Exercice 6. Dans la figure ci-dessous, B représente le bateau, C le banc, A le point de rencontre du bateau et du banc. Les inconnues du problème sont l'angle β déterminant le cap du bateau et t le temps en minutes nécessaire au bateau pour intercepter le banc.



Exprimons les distances suivantes en fonction du temps t : $|AB| = \frac{t}{60} \cdot 30 = \frac{t}{2}$, $|AC| = \frac{t}{60} \cdot 12 = \frac{t}{5}$. Appliquons le théorème du cosinus au triangle $\triangle ABC$:

$$\frac{t^2}{4} = 9 + \frac{t^2}{25} - 2 \cdot 3 \cdot \frac{t}{5} \cdot \cos(39^\circ).$$

En multipliant cette équation par 100 et en arrangeant les termes, on obtient une équation du 2e degré en t :

$$21t^2 + 120 \cos(39^\circ) \cdot t - 900 = 0,$$

dont les solutions sont

$$t = \frac{-120 \cos(39^\circ) \pm \sqrt{120^2 \cos^2(39^\circ) - 4 \cdot 21 \cdot (-900)}}{42} \cong \begin{cases} 4.69 \text{ min} \\ -9.13 \text{ min} \end{cases}.$$

On écarte la solution négative et donc $t = 4.69$ min. Ainsi $|AB| = \frac{4.69}{2} \cong 2.34$ km et $|AC| = \frac{4.69}{5} \cong 0.94$ km. Pour déterminer l'angle β , appliquons le théorème du sinus au triangle $\triangle ABC$:

$$\beta = \arcsin\left(\frac{b \cdot \sin(\gamma)}{c}\right) \cong \arcsin\left(\frac{0.94 \cdot \sin(39^\circ)}{2.34}\right) \cong 14.58^\circ.$$

Donc le cap du bateau doit être N75.42°E ($75.42 = 90 - 14.58$).

Exercice 7. Nous allons calculer \overline{BC} , qui est la longueur \overline{AD} , puisque dans un rectangle, les côtés opposés sont de même longueur. Pour cela, nous allons déterminer l'angle $\gamma = \widehat{BCE}$, ainsi que \overline{BE} , ce qui nous permettra de conclure grâce au théorème du sinus.

Pour trouver γ , appliquons le théorème du sinus au triangle ABE ; pour $\beta = \widehat{ABE}$, et $\varepsilon = \widehat{AEB} = 180 - 57 = 123^\circ$, nous avons :

$$\beta = \arcsin\left(\frac{\overline{AE} \cdot \sin(123^\circ)}{\overline{AB}}\right) \cong 34^\circ,$$

(l'autre solution, donnée par $180^\circ - \beta \cong 146^\circ$, est trop grande pour un angle d'un triangle dont on connaît déjà la valeur d'un autre angle de 123°), et donc $\alpha = \widehat{EAB} \cong 180 - 34 - 123 = 23^\circ$. Le théorème du sinus donne encore

$$\overline{BE} = \frac{\sin(23^\circ) \cdot \overline{AB}}{\sin(123^\circ)} \cong 16.8.$$

L'angle $\gamma = \widehat{BCE}$ vaut environ $90 - \alpha = 67^\circ$ (ici, on considère le triangle rectangle ABC). Le théorème du sinus appliqué au triangle BCE donne alors pour \overline{BC} :

$$\overline{BC} = \frac{\sin(57^\circ) \cdot \overline{BE}}{\sin(67^\circ)} \cong 15.3 = \overline{AD}.$$

Exercice 8. Nous calculons le pgdc à l'aide de la méthode d'Euclide et le ppmc par la relation suivante :

$$\text{ppmc}(a, b) = \frac{a \cdot b}{\text{pgdc}(a, b)}.$$

a)
$$\begin{aligned} 3045 &= 3451 \cdot 0 + 3045 \\ 3451 &= 3045 \cdot 1 + 406 \\ 3045 &= 406 \cdot 7 + 203 \\ 406 &= 203 \cdot 2 + 0 \end{aligned}$$

Le pgdc est 203 et donc le ppmc est égal à $\frac{3045 \cdot 3451}{203} = 51765$.

b)
$$\begin{aligned} 23387 &= 1285 \cdot 18 + 257 \\ 1285 &= 257 \cdot 5 + 0 \end{aligned}$$

Le pgdc est 257 et donc le ppmc est égal à $\frac{23387 \cdot 1285}{257} = 116935$.

c)
$$\begin{aligned} 241 &= 56 \cdot 4 + 17 \\ 56 &= 17 \cdot 3 + 5 \\ 17 &= 5 \cdot 3 + 2 \\ 5 &= 2 \cdot 2 + 1 \\ 2 &= 1 \cdot 2 + 0 \end{aligned}$$

Le pgdc est 1 et donc le ppmc est égal à $\frac{241 \cdot 56}{1} = 13496$.

d)
$$\begin{aligned} 10165 &= 3745 \cdot 2 + 2675 \\ 3745 &= 2675 \cdot 1 + 1070 \\ 2675 &= 1070 \cdot 2 + 535 \\ 1070 &= 535 \cdot 2 + 0 \end{aligned}$$

Le pgdc est 535 et donc le ppmc est égal à $\frac{10165 \cdot 3745}{535} = 71155$.

e)
$$\begin{aligned} 1313 &= 481 \cdot 2 + 351 \\ 481 &= 351 \cdot 1 + 130 \\ 351 &= 130 \cdot 2 + 91 \\ 130 &= 91 \cdot 1 + 39 \\ 91 &= 39 \cdot 2 + 13 \\ 39 &= 13 \cdot 3 + 0 \end{aligned}$$

Le pgdc est 13 et donc le ppmc est égal à $\frac{1313 \cdot 481}{13} = 48581$.

Exercice 9.

a) Par l'algorithme d'Euclide, $\text{pgdc}(7375, 472) = 59$, on peut donc diviser le dénominateur et le numérateur par 59 et alors

$$\frac{7375}{472} = \frac{125}{8}.$$

b) Par l'algorithme d'Euclide, $\text{pgdc}(241, 56) = 1$, la fraction est donc irréductible.

c) Par l'algorithme d'Euclide, $\text{pgdc}(4998, 2737) = 119$, on peut donc diviser le dénominateur et le numérateur par 119 et alors

$$\frac{4998}{2737} = \frac{42}{23}.$$

Exercice 10. Cette affirmation est fausse au vu du contre exemple suivant. En effet $\text{pgdc}(2, 3) = 1$, $\text{pgdc}(3, 8) = 1$ mais $\text{pgdc}(2, 8) = 2 \neq 1$.

Exercice 11. Cette affirmation est vraie car si 2 divise $\text{pgdc}(a, b)$ et $\text{pgdc}(b, c)$, cela implique que a, b et c sont pairs car ils sont tous divisibles par 2. Alors, comme a et c sont pairs, leur pgdc sera un multiple de 2.

Exercice 12. Il y a deux possibilités, soit a et p sont premiers entre eux et à ce moment $\text{pgdc}(a, p) = 1$, soit a est un multiple de p et alors $\text{pgdc}(a, p) = p$. Par exemple, si on prend $p = 13$ et a qui n'est pas un multiple de 13, $\text{pgdc}(a, p) = 1$ car 13 n'apparaît pas dans la décomposition en facteur premiers de a . Cependant, si $a = k \cdot 13$ avec $k \in \mathbb{N}$ quelconque alors $\text{pgdc}(a, p) = \text{pgdc}(k \cdot 13, 13) = 13$.

Exercice 13.

- a) On peut factoriser $x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$, ainsi le pgdc est 1 et le ppmc est $6x(x + 2)(x - 1)$
- b) $x^2 - x = x(x - 1)$, $x^3 - 3x^2 + 2x = x(x^2 - 3x + 2) = x(x - 2)(x - 1)$ et $x^3 - 4x^2 + 3x = x(x^2 - 4x + 3) = x(x - 3)(x - 1)$, ainsi le pgdc est égal à $x(x - 1)$ et le ppmc à $x(x - 1)(x - 2)(x - 3)$.
- c) Comme $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$ et $x^3 - x^2 + x = x(x^2 - x + 1)$, alors le pgdc des trois polynômes est égal à $x^2 - x + 1$ et le ppmc à $x(x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$.

Exercice 14.

- a) $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3 = x^2(x + 1) - 3(x + 1) = (x^2 - 3)(x + 1) = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x + 1)$ et $g(x) = x^2 + 3x + 2 = (x + 2)(x + 1)$. Ainsi $\text{pgdc}(f(x), g(x)) = x + 1$ et on peut donc simplifier le numérateur et le dénominateur de la fraction $\frac{f(x)}{g(x)}$ par $x + 1$, alors

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})}{x + 2}.$$

- b) $f(x) = 3x^2 + 2x - 1 = (3x - 1)(x + 1)$ et $g(x) = 2x^2 + 3x + 1 = (2x + 1)(x + 1)$, ainsi le pgdc est $x + 1$ et

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x - 1}{2x + 1}.$$

- c) $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = (x + 1)(x^2 + x + 1)$ et $g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = (x + 2)(x^2 + x + 1)$. On trouve ces factorisations en cherchant une racine a des polynômes et en divisant ensuite par $x - a$. Ainsi le pgdc est égal à $x^2 + x + 1$ et donc

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x + 1}{x + 2}.$$

- d) Dans ce cas, il est fastidieux (mais possible!) de factoriser les polynômes $f(x)$ et $g(x)$, on va donc appliquer l'algorithme d'Euclide à ces deux polynômes :

$$\begin{aligned} x^5 + 5x^4 + 8x^3 + 8x^2 - x - 21 &= x(x^4 + 5x^3 + 8x^2 + x - 15) + 7(x^2 + 2x - 3) \\ x^4 + 5x^3 + 8x^2 + x - 15 &= (x^2 + 2x - 3)(x^2 + 3x + 5) + 0 \end{aligned}$$

Chaque ligne est calculée avec une division euclidienne. Ainsi le pgdc est $x^2 + 2x - 3$ et donc

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(x^2 + 2x - 3)(x^3 + 3x^2 + 5x + 7)}{(x^2 + 2x - 3)(x^2 + 3x + 5)} = \frac{x^3 + 3x^2 + 5x + 7}{x^2 + 3x + 5}.$$

- e) $f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 8x - 4 = (x - 2)(2x^2 - 3x + 2)$ et $g(x) = x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$, ainsi le pgdc est $x - 2$ et donc

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x^2 - 3x + 2}{x - 3}.$$

- f) Comme le polynôme $x^2 - x + 1$ est irréductible, on effectue la division euclidienne de $f(x)$ par $g(x)$ et on constate que $f(x)$ n'est pas divisible par $g(x)$, les deux polynômes sont donc premiers entre eux, leur pgdc vaut 1 et la fraction est donc irréductible.

Exercice 15.

- a) Faux. Si $f(x) = (x + 1)(x - 1)$ et $g(x) = (x + 1)(x - 2)$ alors $f(x)$ et $g(x)$ ont le même degré (2) et pourtant leur pgdc est $x + 1$.
- b) Vrai. En effet si le pgdc de ces deux polynômes est $x - a$, alors a est une racine de ces deux polynômes (voir proposition 2 du corrigé 2). Ainsi $f(a) = g(a) = 0$ et donc les graphes de $f(x)$ et $g(x)$ se coupent en $(a, 0)$.
- c) Vrai. En décomposant $f(x)$ et $g(x)$ en produit de polynômes irréductibles, on obtient $f(x) = p_1(x) \cdots p_n(x)$ et $g(x) = q_1(x) \cdots q_m(x)$. Alors le pgdc sera de le produit de tous les polynômes présents dans les deux décompositions. En élevant ces décompositions au carré, on obtient $f^2(x) = p_1^2(x) \cdots p_n^2(x)$ et $g^2(x) = q_1^2(x) \cdots q_m^2(x)$. Ainsi, le pgdc étant le produit des polynômes apparaissant dans les deux décompositions, ce sera $d^2(x)$.
- d) Faux. En prenant $f(x) = 6$ et $g(x) = 9$, on a $\text{pgdc}(6, 9) = 3$ mais $\text{pgdc}(6 + 1, 9 + 1) = 1$.

Exercice 16. On applique la méthode d'Euclide car la factorisation de ces deux nombres est très difficile !

$$\begin{array}{rcl} 37894060279 & = & 18272779829 \cdot 2 + 1348500621 \\ 18272779829 & = & 1348500621 \cdot 13 + 742271756 \\ 1348500621 & = & 742271756 \cdot 1 + 606228865 \\ 742271756 & = & 606228865 \cdot 1 + 136042891 \\ 606228865 & = & 136042891 \cdot 4 + 62057301 \\ 136042891 & = & 62057301 \cdot 2 + 11928289 \\ 62057301 & = & 11928289 \cdot 5 + 2415856 \\ 11928289 & = & 2415856 \cdot 4 + 2264865 \\ 2415856 & = & 2264865 \cdot 1 + 150991 \\ 2264865 & = & 150991 \cdot 15 + 0. \end{array}$$

Ainsi, le pgdc est 150991.