Cours Euler: Corrigé 16

17 décembre 2025

Exercice 1

Nous allons montrer le résultat pour un premier p quelconque, le raisonnement pour 3 n'ayant rien de particulier.
On commence par démontrer que, pour n un nombre naturel, si p premier divise n^2, alors p divise n. C'est trivialement vrai pour $n = 0$ et $n = 1$. Soit maintenant $n \neq 0, 1$. Par le Théorème fondamental de l'arithmétique n admet une unique décomposition (à l'ordre des facteurs près) comme produit de nombres premiers : $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k$. Ainsi $n^2 = p_1^2 \cdot p_2^2 \cdot \dots \cdot p_k^2$. Comme p est premier, par unicité de la décomposition de n^2, si $p \mid n^2$, p doit faire partie des facteurs premiers de n^2 et $p = p_i$ pour un $1 \leq i \leq k$. Donc p fait partie de la décomposition de n et donc $p \mid n$. En résumé :

Soient $p, n \in \mathbb{N}$ et supposons que p soit premier. Alors si $p \mid n^2$, $p \mid n$.

Par l'absurde, supposons maintenant que $\sqrt{p}$ est rationnel. Alors il existe une fraction irréductible $\dfrac{a}{b} = \sqrt{p}$ avec $b \neq 0$. Quand on met au carré, on obtient

$$\frac{a^2}{b^2} = p \iff a^2 = pb^2.$$

Donc p est un diviseur de a^2, donc p est un diviseur de a par le raisonnement ci-dessus. Ainsi il existe un certain $k \in \mathbb{N}$ tel que $a = pk$. Par conséquent

$$pb^2 = a^2 = (pk)^2 = p^2k^2.$$

On divise de part et d'autre par p et on voit que $b^2 = pk^2$, si bien que b^2, et donc b, est divisible par p. Mais alors les nombres b et a sont divisibles par p, ce qui contredit le fait que la fraction $\dfrac{a}{b}$ est irréductible.
Donc $\sqrt{p}$ n'est pas rationnel.

En général, $\sqrt{n}$ n'est pas irrationnel. En effet, si on prend $n = 4$, alors $\sqrt{n} = 2$ est un nombre rationnel.

Maintenant, si p et q sont des premiers distincts, alors $\sqrt{pq}$ aussi est irrationnel. Le même démonstration par l'absurde fonctionne encore. On a cependant besoin du résultat supplémentaire suivant :

Si k et l sont premiers entre eux et si $k \mid (l \cdot m)$, alors $k \mid m$.

Supposons donc par l'absurde que $\sqrt{pq}$ peut être écrit comme fraction irréductible $\frac{a}{b}$. Alors $a^2 = pqb^2$. Ceci signifie que a^2 est divisible par p, donc a aussi ; autrement dit $a = pk$ pour un certain entier naturel k. Mais alors

$$p^2k^2 = a^2 = pqb^2 \Rightarrow pk^2 = qb^2.$$

Donc p divise qb^2. Puisque p et q sont premiers entre eux, cela implique que b^2 est divisible par p, donc b aussi, contradiction !

Exercice 2

1. A. $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$, B. $\frac{12}{4} - 5 = \frac{12-20}{4} = -2$, C. $\frac{12}{8} = \frac{3}{2}$, D. $-\frac{12}{4} = -3$, E. $\frac{12}{4} \cdot 3 = 9$.
2. Seuls C. et E. sont plus grands que 1.
3. A. n'existe pas, B. $\frac{9}{14}$, C. infinité de solutions, D. $-34{,}3$, E. 16
4. les deux premiers sont plus grands, les trois derniers sont plus petits
5. aucun, sauf le dernier
6. A. 1 ; B. 0 ; C. 0, 1 ; D. 1 ; E. 0

Exercice 3

• Encadrement de $\sqrt{2}$. A l'unité on a bien sûr $1 < \sqrt{2} < 2$.

Au dixième : $\boxed{1,4 < \sqrt{2} < 1,5}$ car $1,4^2 = 1,96$ et $1,5^2 = 2,25$

Au centième (ie à 10^{-2}) : $\boxed{1,41 < \sqrt{2} < 1,42}$ car $1,41^2 = 1,9881$ et $1,42^2 = 2,0164$

A 10^{-3} : $\boxed{1,414 < \sqrt{2} < 1,415}$ car $1,414^2 = 1,999396$ et $1,415^2 = 2,002225$

A 10^{-4} : $\boxed{1,4142 < \sqrt{2} < 1,4143}$ car $1,4142^2 = 1,99996164$ et $1,4143^2 = 2,00024449$

A 10^{-5} : $\boxed{1,41421 < \sqrt{2} < 1,41422}$ car $1,41421^2 = 1,9999899241$
et $1,41422^2 = 20000182084$

A 10^{-6} : $\boxed{1,414213 < \sqrt{2} < 1,414214}$ car $1,414213^2 = 1,999998409369$
et $1,414214^2 = 2,000001237796$

• Approximation au 10000-ième de $\sqrt{3}$. A l'unité on a $1 < \sqrt{3} < 2$.

A 10^{-1} : $\boxed{1,7 < \sqrt{3} < 1,8}$ car $1,7^2 = 2,89$ et $1,8^2 = 3,24$

A 10^{-2} : $\boxed{1,73 < \sqrt{3} < 1,74}$ car $1,73^2 = 2,9929$ et $1,74^2 = 3,0276$

A 10^{-3} : $\boxed{1,732 < \sqrt{3} < 1,733}$ car $1,732^2 = 2,999824$ et $1,733^2 = 3,003289$

A 10^{-4} : $\boxed{1,7320 < \sqrt{3} < 1,7321}$ car $1,7320^2 = 2,999824$ et $1,7321^2 = 3,00017041$

A 10^{-5} : $\boxed{1,73205 < \sqrt{3} < 1,73206}$ car $1,732105^2 = 2,9999972025$ et $1,732106^2 = 3,0000318436$

• Approximation de $\sqrt{9{,}7344}$. On voit que ce nombre est plus grand que 3, mais plus petit que 4. D'autre part $(3{,}1)^2 = 9{,}61$ et $(3{,}2)^2$ est plus grand que 10 si bien que

$$3{,}1 < \sqrt{9{,}7344} < 3{,}2$$

Finalement $(3{,}12)^2 = 9{,}7344$ si bien que $\sqrt{9{,}7344} = 3{,}12$. L'approximation de cette racine est une valeur exacte. Au 10000-ème on a $\sqrt{9{,}7344} = 3{,}1200$.

Exercice 4

a) 100

b) $3^2 = 9$

c) La racine carrée de 36 est 6. La racine cubique de 36 est $\sqrt[3]{36}$ (pas d'autre écriture possible).

d) $\sqrt{100} = 10$

e) $\left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

f) car $1,2^2 = (12 \cdot 10^{-1})^2 = 144 \cdot 10^{-2} = 1,44$.

g) Non, car -16 est un nombre négatif.

h) $\sqrt{0} = 0$

i) $\sqrt[3]{1000} = 10$

j) On ne peut pas, car -4 est un nombre négatif.

k) $-\frac{5^2}{3} = -\frac{25}{3}$

l) $\sqrt{1} = 1$

m) $-\sqrt{81} = -9$

n) $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

o) Le nombre dont le carré est 49^2 est 49.

Exercice 5 (Optionnel)

Un casse-tête. Par exemple $2000 = 1 \cdot 2^4 \cdot 5^3$.

Exercice 6

a) $\underline{2^2} = 4 > \underline{2^1} = 2 > \underline{2^0} = \underline{1^2} = 1 > \underline{0^2} = \underline{0^1} = 0$

b) $\underline{200^2} = 40000 > \underline{2^{10}} = 1024 > \underline{10^2 \cdot 2^2} = \underline{(10 \cdot 2)^2} = 400 > \underline{10^2} = 100 > \underline{2^2 \cdot 10} = 40$

c) $\underline{3 \cdot 10^5} = 300000 > \underline{(5 \cdot 10)^3} = 125000 > \underline{3355} > \underline{3^5} = 243 > \underline{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5} = 225 > \underline{5^3} = 125$

d) $\underline{3^{12}} > \underline{81^2} = 3^8 > \underline{3^3 \cdot 3^4} = \underline{3^7} > \underline{9^3} = \underline{27^2} = 3^6$

e) $\underline{1000^3} = 10^9 > \underline{100^4} = \underline{10^2 \cdot 10^6} = \underline{10^{3+5}} = 10^8 > \underline{10^5 \cdot 10^2} = \underline{1000 \cdot 10000} = 10^7$

f) $\underline{34^2} = 1156 > \underline{234^1} = 234 > \underline{2 \cdot 3^4} = 162 > \underline{2^4 \cdot 3} = 48 > \underline{2^3 \cdot 4} = 32 > \underline{2 \cdot 3 \cdot 4} = 24$

Exercice 7

Dans cet exercice nous nous référerons à la proposition sur les propriétés des fractions. Par exemple nous écrivons 3. pour faire référence à la troisième propriété dans cette proposition.

1. Soient x, y des nombres réels non nuls. Montrons que $\left(\frac{x}{y}\right)^{-1} = \frac{y}{x}$, c'est-à-dire que $\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x} = 1$. Or,
$$\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x} \overset{3.}{=} \frac{xy}{yx} \overset{\text{com.}}{=} \frac{xy}{xy} = (xy) \cdot (xy)^{-1} = 1.$$
2. Soient x un nombre réel et y, z deux nombres réels non nuls. Montrons que $\frac{x:z}{y:z} = \frac{x}{y}$. D'abord, remarquons que les expressions considérées sont bien définies comme y et z sont non nuls. Par définition de la fraction, $\frac{x:z}{y:z}$ est l'unique nombre réel qui multiplié avec $y : z = \frac{y}{z}$ donne $x : z$. Comme
$$\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} \overset{3.}{=} \frac{xy}{yz},$$
il suffit de montrer que $\frac{xy}{yz} = x : z$, c'est-à-dire que $(x : z) \cdot (yz) = xy$ par la définition de la fraction. Or,
$$(x : z) \cdot (yz) = (x \cdot z^{-1}) \cdot (yz) \overset{\text{com.}}{=} (x \cdot z^{-1}) \cdot (zy) \overset{\text{asso.}}{=} \big(x \cdot (z^{-1}z)\big)\, y = xy.$$

Exercice 8

Le nombre de grains de blé sur la case 1 est 1, sur la case 2 : 2, sur la case 3 : 4, sur la case 4 : 8, etc... Donc le nombre de grains de blés sur la case n est 2^{n-1}. Le nombre total N de grains de blés est donc :
$$N = 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{63} = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{63} = 2^{64} - 1$$

En effet on démontre que la somme des n premières puissances de 2 vaut $2^{n+1}-1$ pour tout entier n (pour nous $n = 63$). Une démonstration formelle se fait par la méthode dite de *récurrence* que nous étudierons bientôt, nous le faisons de manière un peu plus intuitive. On commence par $n = 0$ et on constate que $2^0 = 2^1 - 1$, on vérifie aussi que $2^0 + 2^1 = 3 = 2^2 - 1$ et pour $n = 2$ que $2^0 + 2^1 + 2^2 = 7 = 2^3 - 1$. La formule a l'air correcte pour des petites valeurs de n, essayons maintenant de généraliser. Sachant que la formule est vraie pour $n = 2$, comment la prouver pour $n = 3$ sans faire tous les calculs ? On a

$$2^0 + 2^1 + \cdots + 2^3 = (2^0 + 2^1 + 2^2) + 2^3 = 2^3 - 1 + 2^3$$

où on a utilisé le fait que la formule a été vérifiée pour $n = 2$ dans le dernier pas. Or $2^3 + 2^3 - 1 = 2 \cdot 2^3 - 1 = 2^4 - 1$. C'est aussi correct pour $n = 3$. La technique de récurrence nous dit que l'on peut ainsi passer d'un entier $n-1$ au suivant n (le *pas de récurrence*), et ainsi prouver la formule en toute généralité. Supposons donc que la formule est vraie pour $n-1$ et regardons pour n, exactement comme nous l'avons fait pour passer de 2 à 3. Alors

$$2^0 + 2^1 + \ldots 2^{n-1} + 2^n = 2^n - 1 + 2^n = 2 \cdot 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1$$

C'est ce que nous voulions prouver ! Donnons N en écriture canonique lorsque $n = 63$:

$$N = 18'446'744'073'709'551'615$$

Si on suppose que 100 grains ont une masse de 5 grammes, qu'un wagon mesure 10m de longueur et qu'ils contient environ 10 tonnes de blé, un train composé de tous ces wagons aurait une longueur de $9,22337 \cdot 10^{11}$ mètres. Ce train ferait donc $23'000$ fois le tour de la Terre, et mesurerait près de 2400 fois la distance Terre-Lune !

Exercice 9

Etape	1	2	3	4
Newton	3	3,125	3,139062	3,141155
Euler	3,130169	3,139785	3,1410	3,141348
Brouncker	4	2,666	3,4666	2,895