

Cours Euler: Corrigé 16

18 décembre 2024

Exercice 1

Nous allons montrer le résultat pour un premier p quelconque, le raisonnement pour 3 n'ayant rien de particulier.

On commence par démontrer que, pour n un nombre naturel, si p premier divise n^2 , alors p divise n . C'est trivialement vrai pour $n = 0$ et $n = 1$. Soit maintenant $n \neq 0, 1$. Par le Théorème fondamental de l'arithmétique n admet une unique décomposition (à l'ordre des facteurs près) comme produit de nombres premiers : $n = p_1 \cdot p_2 \cdots p_k$. Ainsi $n^2 = p_1^2 \cdot p_2^2 \cdots p_k^2$. Comme p est premier, par unicité de la décomposition de n^2 , si $p \mid n^2$, p doit faire partie des facteurs premiers de n^2 et $p = p_i$ pour un $1 \leq i \leq k$. Donc p fait partie de la décomposition de n et donc $p \mid n$. En résumé :

Soient $p, n \in \mathbb{N}$ et supposons que p soit premier. Alors si $p \mid n^2$, $p \mid n$.

Par l'absurde, supposons maintenant que \sqrt{p} est rationnel. Alors il existe une fraction irréductible $\frac{a}{b} = \sqrt{p}$ avec $b \neq 0$. Quand on met au carré, on obtient

$$\frac{a^2}{b^2} = p \iff a^2 = pb^2.$$

Donc p est un diviseur de a^2 , donc p est un diviseur de a par le raisonnement ci-dessus. Ainsi il existe un certain $k \in \mathbb{N}$ tel que $a = pk$. Par conséquent

$$pb^2 = a^2 = (pk)^2 = p^2k^2.$$

On divise de part et d'autre par p et on voit que $b^2 = pk^2$, si bien que b^2 , et donc b , est divisible par p . Mais alors les nombres b et a sont divisibles par p , ce qui contredit le fait que la fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible.

Donc \sqrt{p} n'est pas rationnel.

En général, \sqrt{n} n'est pas irrationnel. En effet, si on prend $n = 4$, alors $\sqrt{n} = 2$ est un nombre rationnel.

Maintenant, si p et q sont des premiers distincts, alors \sqrt{pq} aussi est irrationnel. Le même démonstration par l'absurde fonctionne encore. On a cependant besoin du résultat supplémentaire suivant :

Si k et l sont premiers entre eux et si $k \mid (l \cdot m)$, alors $k \mid m$.

Supposons donc par l'absurde que \sqrt{pq} peut être écrit comme fraction irréductible $\frac{a}{b}$. Alors $a^2 = pqb^2$. Ceci signifie que a^2 est divisible par p , donc a aussi ; autrement dit $a = pk$ pour un certain entier naturel k . Mais alors

$$p^2k^2 = a^2 = pqb^2 \Rightarrow pk^2 = qb^2.$$

Donc p divise qb^2 . Puisque p et q sont premiers entre eux, cela implique que b^2 est divisible par p , donc b aussi, contradiction !

Exercice 2

1. A. $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$, B. $\frac{12}{4} - 5 = \frac{12 - 20}{4} = -2$, C. $\frac{12}{8} = \frac{3}{2}$, D. $-\frac{12}{4} = -3$, E. $\frac{12}{4} \cdot 3 = 9$.
2. Seuls C. et E. sont plus grands que 1.
3. A. n'existe pas, B. $\frac{9}{14}$, C. infinité de solutions, D. $-34,3$, E. 16
4. les deux premiers sont plus grands, les trois derniers sont plus petits
5. aucun, sauf le dernier
6. A. 1, B. 0, C. 0, 1, D. 1, E. 0

Exercice 3

- Encadrement de $\sqrt{2}$. A l'unité on a bien sûr $1 < \sqrt{2} < 2$.

Au dixième : $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$ car $1,4^2 = 1,96$ et $1,5^2 = 2,25$

Au centième (ie à 10^{-2}) : $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$ car $1,41^2 = 1,9881$ et $1,42^2 = 2,0164$

A 10^{-3} : $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$ car $1,414^2 = 1,999396$ et $1,415^2 = 2,002225$

A 10^{-4} : $1,4142 < \sqrt{2} < 1,4143$ car $1,4142^2 = 1,99996164$ et $1,4143^2 = 2,00024449$

A 10^{-5} : $1,41421 < \sqrt{2} < 1,41422$ car $1,41421^2 = 1,9999899241$
et $1,41422^2 = 2,0000182084$

A 10^{-6} : $1,414213 < \sqrt{2} < 1,414214$ car $1,414213^2 = 1,999998409369$
et $1,414214^2 = 2,000001237796$

- Approximation au 10000-ième de $\sqrt{3}$. A l'unité on a $1 < \sqrt{3} < 2$.

A 10^{-1} : $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$ car $1,7^2 = 2,89$ et $1,8^2 = 3,24$

A 10^{-2} : $1,73 < \sqrt{3} < 1,74$ car $1,73^2 = 2,9929$ et $1,74^2 = 3,0276$

A 10^{-3} : $1,732 < \sqrt{3} < 1,733$ car $1,732^2 = 2,999824$ et $1,733^2 = 3,003289$

A 10^{-4} : $1,7320 < \sqrt{3} < 1,7321$ car $1,7320^2 = 2,999824$ et $1,7321^2 = 3,00017041$

A 10^{-5} : $1,73205 < \sqrt{3} < 1,73206$ car $1,73205^2 = 2,9999972025$ et $1,73206^2 = 3,0000318436$

- Approximation de $\sqrt{9,7344}$. On voit que ce nombre est plus grand que 3, mais plus petit que 4. D'autre part $(3,1)^2 = 9,61$ et $(3,2)^2$ est plus grand que 10 si bien que

$$3,1 < \sqrt{9,7344} < 3,2$$

Finalement $(3,12)^2 = 9,7344$ si bien que $\sqrt{9,7344} = 3,12$. L'approximation de cette racine est une valeur exacte. Au 10000-ème on a $\sqrt{9,7344} = 3,1200$.

Exercice 4

- a) 100
- b) $3^2 = 9$
- c) La racine carrée de 36 est 6. La racine cubique de 36 est $\sqrt[3]{36}$ (pas d'autre écriture possible).
- d) $\sqrt{100} = 10$
- e) $(-\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}$
- f) car $1,2^2 = (12 \cdot 10^{-1})^2 = 144 \cdot 10^{-2} = 1,44$.
- g) Non, car -16 est un nombre négatif.

- h) $\sqrt{0} = 0$
 i) $\sqrt[3]{1000} = 10$
 j) On ne peut pas, car -4 est un nombre négatif.
 k) $-\frac{5^2}{3} = -\frac{25}{3}$
- l) $\sqrt{1} = 1$
 m) $-\sqrt{81} = -9$
 n) $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$
 o) Le nombre dont le carré est 49^2 est 49 .

Exercice 5 (Optionnel)

Un casse-tête. Par exemple $2000 = 1 \cdot 2^4 \cdot 5^3$.

Exercice 6

La première ligne est constituée des nombres $0^2 = 0^1 = 0$, puis $1^2 = 1 = 2^0$, ensuite $2^1 = 2$ et enfin $2^2 = 4$. Les autres sont données dans le tableau suivant.

**109.**

- a) $10^2 = 100$
 $2^{10} = 1024$
 $2^2 \cdot 10 = 40$
 $(10 \cdot 2)^2 = 400$
 $10^2 \cdot 2^2 = 400$
 $200^2 = 40'000$
 $40'000 > 1024 > 400 > 100 > 40$
- b) 3355
 $3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 225$
 $3^5 = 243$
 $5^3 = 125$
 $3 \cdot 10^5 = 300'000$
 $(5 \cdot 10)^3 = 125'000$
 $300'000 > 125'000 > 3355 > 243 > 225 > 125$
- c) $2 \cdot 3^4 = 162$
 $34^2 = 1156$
 $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$
 $234^1 = 234$
 $(2^3)^4 = 8^4 = 4096$
 $2^{(3^4)} = 2^{81}$
 $2^{81} > 4096 > 1156 > 234 > 162 > 24$
- d) $3^3 \cdot 3^4 = 3^7$
 3^{12}
 3^7
 $27^2 = (3^3)^2 = 3^6$
 $9^3 = (3^2)^3 = 3^6$
 $81^2 = (3^4)^2 = 3^8$
 $3^{12} > 3^8 > 3^7 > 3^6$
- e) $10^5 \cdot 10^2 = 10^7$
 $10^2 \cdot 10^6 = 10^8$
 $10^{(3+5)} = 10^8$
 $1000^3 = (10^3)^3 = 10^9$
 $100^4 = (10^2)^4 = 10^8$
 $1000 \cdot 10'000 = 10^7$
 $10^9 > 10^8 > 10^7$

Exercice 7

Dans cet exercice nous nous référerons à la proposition sur les propriétés des fractions. Par exemple nous écrivons 3. pour faire référence à la troisième propriété dans cette proposition.

1. Soient x, y des nombres réels non nuls. Montrons que $\left(\frac{x}{y}\right)^{-1} = \frac{y}{x}$, c'est-à-dire que $\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x} = 1$.

Or,

$$\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x} \stackrel{3.}{=} \frac{xy}{yx} \stackrel{\text{com.}}{=} \frac{xy}{xy} = (xy) \cdot (xy)^{-1} = 1.$$

2. Soient x un nombre réel et y, z deux nombres réels non nuls. Montrons que $\frac{x : z}{y : z} = \frac{x}{y}$. D'abord, remarquons que les expressions considérées sont bien définies comme y et z sont non nuls. Par définition de la fraction, $\frac{x : z}{y : z}$ est l'unique nombre réel qui multiplié avec $y : z = \frac{y}{z}$ donne $x : z$.

Comme

$$\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} \stackrel{3.}{=} \frac{xy}{yz},$$

il suffit de montrer que $\frac{xy}{yz} = x : z$, c'est-à-dire que $(x : z) \cdot (yz) = xy$ par la définition de la fraction. Or,

$$(x : z) \cdot (yz) = (x \cdot z^{-1}) \cdot (yz) \stackrel{\text{com.}}{=} (x \cdot z^{-1}) \cdot (zy) \stackrel{\text{asso.}}{=} (x \cdot (z^{-1}z)) y = xy.$$

Exercice 8

Le nombre de grains de blé sur la case 1 est 1, sur la case 2 : 2, sur la case 3 : 4, sur la case 4 : 8, etc... Donc le nombre de grains de blés sur la case n est 2^{n-1} . Le nombre total N de grains de blés est donc :

$$N = 1 + 2 + 4 + \dots + 2^{63} = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{63} = 2^{64} - 1$$

En effet on démontre que la somme des n premières puissances de 2 vaut $2^{n+1} - 1$ pour tout entier n (pour nous $n = 63$). Une démonstration formelle se fait par la méthode dite de *récurrence* que nous étudierons bientôt, nous le faisons de manière un peu plus intuitive. On commence par $n = 0$ et on constate que $2^0 = 2^1 - 1$, on vérifie aussi que $2^0 + 2^1 = 3 = 2^2 - 1$ et pour $n = 2$ que $2^0 + 2^1 + 2^2 = 7 = 2^3 - 1$. La formule a l'air correcte pour des petites valeurs de n , essayons maintenant de généraliser. Sachant que la formule est vraie pour $n = 2$, comment la prouver pour $n = 3$ sans faire tous les calculs ? On a

$$2^0 + 2^1 + \dots + 2^3 = (2^0 + 2^1 + 2^2) + 2^3 = 2^3 - 1 + 2^3$$

où on a utilisé le fait que la formule a été vérifiée pour $n = 2$ dans le dernier pas. Or $2^3 + 2^3 - 1 = 2 \cdot 2^3 - 1 = 2^4 - 1$. C'est aussi correct pour $n = 3$. La technique de récurrence nous dit que l'on peut ainsi passer d'un entier $n - 1$ au suivant n (le *pas de récurrence*), et ainsi prouver la formule en toute généralité. Supposons donc que la formule est vraie pour $n - 1$ et regardons pour n , exactement comme nous l'avons fait pour passer de 2 à 3. Alors

$$2^0 + 2^1 + \dots + 2^{n-1} + 2^n = 2^n - 1 + 2^n = 2 \cdot 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1$$

C'est ce que nous voulions prouver ! Donnons N en écriture canonique lorsque $n = 63$:

$$N = 18'446'744'073'709'551'615$$

Si on suppose que 100 grains ont une masse de 5 grammes, qu'un wagon mesure 10m de longueur et qu'ils contiennent environ 10 tonnes de blé, un train composé de tous ces wagons aurait une longueur de $9,22337 \cdot 10^{11}$ mètres. Ce train ferait donc 23'000 fois le tour de la Terre, et mesurerait près de 2400 fois la distance Terre-Lune!

Exercice 9

Etape	1	2	3	4
Newton	3	3,125	3,139062	3,141155
Euler	3,130169	3,139785	3,1410	3,141348
Brouncker	4	2,666	3,4666	2,895