Cours Euler: Série 16

18 décembre 2024

Exercice 1

Adapte la preuve du cours que $\sqrt{2}$ est irrationnel pour montrer que $\sqrt{3}$ n'est pas rationnel. (Attention, c'est plus compliqué que simplement remplacer les 2 par des 3 ! En effet, il te faut adapter à cette situation (et prouver) le lemme qui dit que si n^2 est pair, alors n est pair.)

Est-ce vrai qu'en général $\sqrt{n}$ est irrationnel pour tout nombre entier naturel n ? Si oui, montre-le. Sinon, donne un contre-exemple. Qu'en est-il lorsque n est un nombre premier ? Essaie de justifier.

Exercice 2

Traite chaque ligne pour elle-même :

n°	Question	A	B	C	D	E
1	Quels sont ces nombres ?	l'inverse de $\frac{12}{4}$	cinq de moins que $\frac{12}{4}$	la moitié de $\frac{12}{4}$	l'opposé de $\frac{12}{4}$	le triple de $\frac{12}{4}$
2	Ces nombres sont-ils plus grands que 1 ?	$\frac{25}{30}$	-10	3,01	10^{-3}	10^{3}
3	Qui suis-je ?	le plus grand nombre inférieur à -10	deux fois plus petit que $\frac{9}{7}$	plus grand que $-2{,}03$	16,5 unités de moins que $-17{,}8$	trois fois plus grand que $\frac{16}{3}$
4	Ces nombres sont-ils plus grands que -1 ?	10^{-2}	$\frac{3}{10}$	-5	$\frac{-7}{4}$	$-1{,}01$
5	Ces nombres sont-ils plus petits que -1 ?	$\frac{2}{7}$	$\frac{23}{-23}$	$-0{,}123$	$\frac{5}{4}$	$-1{,}00001$
6	Quels sont les nombres qui ne valent ni 0 ni 1 ?	$\frac{-1}{-1}$	$\frac{0}{-1}$	10^{-1}	2^{0}	0^{2}

Exercice 3

Voilà une méthode pour obtenir des approximations successives de racines carrées sans utiliser la touche « racine » de la calculatrice.
En n'utilisant que la touche « au carré » de ta calculatrice, donne des encadrements du nombre $\sqrt{2}$ à l'unité, au dixième, au centième, ..., à 10^{-6} près. Cela signifie que tu dois trouver deux nombres décimaux à 0 (puis 1, 2, 3, ... décimales) qui sont les plus proches de $\sqrt{2}$, inférieur et supérieur respectivement. Par exemple, à l'unité l'encadrement est

$$1 < \sqrt{2} < 2$$

car $1^2 = 1$ et $2^2 = 4$. On calcule ensuite $(1{,}1)^2 = 1{,}21$, puis $(1{,}2)^2 = 1{,}44$, puis $(1{,}3)^2 = 1{,}69$ et $(1{,}4)^2 = 1{,}96$ avant de dépasser 2 avec $(1{,}5)^2 = 2{,}25$. Ainsi $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$.

Donne, en suivant la même méthode, l'approximation au 10000-ième de $\sqrt{3}$. Pour terminer effectue le même travail pour $\sqrt{9{,}7344}$.

Exercice 4

NO208 A la racine

Réponds ou calcule.

a) Quel est le nombre dont le carré vaut 10 000 ?

b) 3^2

c) Combien vaut la racine carrée de 36 ? Et la racine cubique ?

d) $\sqrt{100}$

e) $\left(-\frac{3}{2}\right)^2$

f) Pourquoi $\sqrt{1{,}44} = 1{,}2$?

g) Existe-t-il un nombre dont le carré vaut –16 ?

h) $\sqrt{0}$

i) $\sqrt[3]{1000}$

j) Peux-tu extraire la racine carrée du nombre –4 ?

k) $-\frac{5^2}{3}$

l) $\sqrt{1}$

m) $-\sqrt{81}$

n) $\sqrt{18}$

o) Quel est le nombre dont le carré est 49^2 ?

Exercice 5 (Optionnel)

Un casse-tête. Ecris le nombre 2000 en utilisant une seule fois chacun des nombres $1, 2, 3, 4$ et 5.

Exercice 6

NO71 Du plus grand au plus petit

Classe, dans l'ordre décroissant, les nombres de chaque ligne.

a)	1^2	0^2	0^1	2^1	2^0	2^2
b)	10^2	2^{10}	$2^2 \cdot 10$	$(10 \cdot 2)^2$	$10^2 \cdot 2^2$	200^2
c)	3355	$3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$	3^5	5^3	$3 \cdot 10^5$	$(5 \cdot 10)^3$
d)	$3^3 \cdot 3^4$	3^{12}	3^7	27^2	9^3	81^2
e)	$10^5 \cdot 10^2$	$10^2 \cdot 10^6$	$10^{(3+5)}$	1000^3	100^4	$1000 \cdot 10000$
f)	$2 \cdot 3^4$	34^2	$2 \cdot 3 \cdot 4$	234^1	$2^3 \cdot 4$	$2^4 \cdot 3$

Exercice 7

1) Démontre la propriété (4) des fractions de nombres réels, c'est-à-dire que si x, y sont des nombres réels non nuls, alors $\left(\frac{x}{y}\right)^{-1} = \frac{y}{x}$.

   Indication. Utilise la définition de l'inverse et les propriétés 2 et 3 des fractions de nombres réels).

2) Démontre la propriété (2) des fractions de nombres réels (amplification).

Exercice 8

Une légende prétend que l'inventeur de l'échiquier est Sissa, un sage oriental. Il aurait ainsi réussi à distraire un roi, qui, voulant le remercier, lui offrit de choisir une récompense. Sissa voulait seulement « un peu de riz ». Le roi lui demanda alors combien et Sissa répondit que sur la première case de l'échiquier il voudrait un grain de riz, puis deux sur la deuxième, quatre sur la troisième, huit sur la quatrième et ainsi de suite, en doublant à chaque fois le nombre de grains de riz.
Le roi fut surpris et amusé par une demande aussi modeste. Est-ce que cette demande est aussi modeste que cela ? Combien cela coûtera-t-il au roi en nombre de grains de riz ?

Exercice 9

Un exercice historique sur le calcul de π pour finir. Tu trouveras ci-dessous le calcul des quatre premières approximations.

215. Les chasseurs de π

Newton, mathématicien anglais du XVII^e siècle, a trouvé que :

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2^7} + \dots$$

n° du terme : 1 2 3 4 5

Un autre mathématicien, le Suisse Léonard Euler, a montré, quant à lui, que :

$$\frac{\pi^4}{96} = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \dots$$

n° du terme : 1 2 3 4 5

Au XVII^e siècle toujours, un troisième mathématicien, Lord Brouncker, a utilisé une présentation encore plus surprenante à l'aide de ce que l'on appelle une fraction continue :

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \cfrac{9^2}{2 + \dots}}}}}$$

n° du terme : 1 2 3 4 5 6 …

Quelles sont les approximations successives de π que tu obtiens en prenant 1 terme, puis 2 termes, puis 3 termes et ainsi de suite, pour chacun de ces trois développements ?