Donc $F(x) = G(\varphi^{-1}(x))$

$$= \frac{1}{2}\arcsin(x) + \frac{1}{2} \times \underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{\left(\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))} = \sqrt{1-x^2}\right)} + C \quad , \quad C \in \mathbb{R}$$

8.5.3 Intégration par parties

Thm. Soit $f, g \in C^1([a,b])$ alors :

$$\int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx = \left[f(x)\, g(x)\right]_a^b - \int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx$$

Preuve : $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

Donc $$\int_a^b (f\cdot g)'(x)\, dx = \begin{cases} \left[f(x)\, g(x)\right]_a^b \\ \int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx + \int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx \end{cases}$$ ■

fin cours 11/12

***Rappels sur le format de l'examen :**

* Durée 3h30

* - QCM (18 questions) : $\begin{cases} 0 \text{ pt vide} \\ +3 \text{ pt correct} \\ -1 \text{ pt faux} \end{cases}$

- V/F (10 questions) : $\begin{cases} 0 \text{ pt vide} \\ +1 \text{ pt correct} \\ -1 \text{ pt faux} \end{cases}$

- Questions ouvertes (16 pts).

} total 80 pts

* Sans documents, ni calculatrices

* Retrouvez les annales avec corrections sur Moodle + conseils pour les QCM/VF.

→ Evaluations approfondies.

Retour à la technique d'intégration par parties.

Exemples : 1) $\int_0^1 \underset{g}{x}\, \underset{f'}{e^x}\, dx = \left[xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 1 \cdot e^x\, dx = e - \left[e^x\right]_0^1 = e - (e-1) = 1$

2/ $\displaystyle\int_0^1 \overset{g}{x^2}\,\overset{f'}{e^x}\,dx = \left[x^2e^x\right]_0^1 - \int_0^1 2xe^x\,dx$

$$= e - 2\int_0^1 xe^x\,dx = e - 2$$

3/ Cas d'un intégrale indéfinie :

$$\int \overset{f'}{1}\cdot\overset{g}{\log(x)}\,dx = x\log(x) - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

$$= x\log(x) - x + C \quad , \quad \text{avec } C\in\mathbb{R}$$

4/ Parfois, l'intégration par parties mène à une formule de récurrence :

$I_n(x) = \displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$, $n\in\mathbb{N}$. On a : $\begin{cases} I_0(x) = x + C \\ I_1(x) = \arctan(x) + C \\ \quad\equiv \operatorname{arctg}(x) + C \end{cases}$

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ I_n(x) = \int \overset{f'}{1}\cdot\overset{g}{\frac{dx}{(x^2+1)^n}}$$

$$= \frac{x}{(x^2+1)^n} - \int x\cdot\frac{(-n)\cdot 2x}{(x^2+1)^{n+1}}\,dx$$

$$= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n\int\frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^{n+1}}\,dx$$

$$I_n(x) = \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n\left(I_n(x) - I_{n+1}(x)\right)$$

Donc $\displaystyle I_{n+1}(x) = \frac{1}{2n}\left(\frac{x}{(x^2+1)^n} + (2n-1)I_n(x)\right) = \boxed{\frac{x}{2n(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n}\cdot I_n(x)}$

Par exemple : $\displaystyle I_2(x) = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}I_1(x) = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x) + C$

8.6 Intégration des fonctions rationnelles

Commençons avec un exemple : $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)} = \dfrac{x^2+2x-1}{x^3-x^2+x-1}$

① On factorise q en facteurs irreductibles dans $\mathbb{R}$.

- 1 est une racine : on factorise par $(x-1)$, en divisant q par $(x-1)$:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x^2 + x - 1 & x-1 \\ \cline{2-2} -x^3 + x^2 & x^2+1 \\ \cline{1-1} x - 1 & \\ -(x-1) & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Donc $q(x) = (x^2+1)(x-1)$ irreductible dans $\mathbb{R}$ $\left(\text{dans } \mathbb{C} : q(x) = (x-1)(x+i)(x-i)\right)$

② On décompose f en éléments simples :

$$f(x) = \frac{x^2+2x-1}{x^3-x^2+x-1} = \frac{\beta x+\gamma}{x^2+1} + \frac{\alpha}{x-1}, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

On trouve α, β, γ en identifiant les numérateurs :

$$\begin{aligned} x^2+2x-1 &= \alpha(x^2+1) + (\beta x+\gamma)(x-1) \\ &= (\alpha+\beta)x^2 + (\gamma-\beta)x + (\alpha-\gamma) \end{aligned}$$

Identification des coefficients terme à terme :

$$\begin{cases} \alpha+\beta = 1 \\ \gamma-\beta = 2 \\ \alpha-\gamma = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1-\beta \\ \gamma = 2+\beta \\ \underbrace{1-\beta-(2+\beta) = -1}_{-1-2\beta\,=\,-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \gamma = 2 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

On a donc : $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{x^2+1}$

③ On intègre les éléments simples :

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{2\,dx}{x^2+1} = \log(|x-1|) + 2\arctan(x) + C$$

$C \in \mathbb{R}$

Voyons le cas général : Soit $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ avec $\deg(p) < \deg(q)$.

(Si $\deg(p) \geq \deg(q)$, alors on commence par une division de polynôme avec reste)

⓪ Essayer d'intégrer directement :

ex: $$f(x) = \frac{2x^3}{x^4-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4x^3}{x^4-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{g'(x)}{g(x)} \quad \text{avec } g(x) = x^4-1$$

donc $$\int f(x)\,dx = \frac{1}{2}\log(|x^4-1|) + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

① Factorise q en facteurs irréductibles $\quad q = \underbrace{(\_)}\cdot\underbrace{(\_)}\cdot \ldots \cdot (\_)$

polynômes de degré 1 ou 2.

② Décomposition en éléments simples : $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \underbrace{\qquad} + \underbrace{\qquad} + \ldots + \underbrace{\qquad}$

éléments simples (fonctions rationnelles)

	Facteur de q		Éléments simples correspondant.
(i)	$(x-a)$	....	$\frac{\alpha}{x-a}$
(ii)	$(x-a)^2$	....	$\frac{\alpha_1}{x-a} + \frac{\alpha_2}{(x-a)^2}$
(iii)	$(x-a)^m$	....	$\sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_k}{(x-a)^k}$
(iv)	x^2+bx+c	....	$\frac{\beta x+\gamma}{x^2+bx+c}$
(v)	$(x^2+bx+c)^m$	....	$\sum_{k=1}^{m} \frac{\beta_k x+\gamma_k}{(x^2+bx+c)^k}$

- Une telle decomposition est toujours possible
- Il faut ensuite remettre sur le même dénominateur pour identifier les scalaires $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ par identification des coefficients.

③ Intégrer les éléments simples :

(i) $$\int \frac{dx}{x-a} = \log(|x-a|) + c, \qquad c \in \mathbb{R}$$

(ii)/(iii) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)^k} = \int (x-a)^{-k}\,dx = \frac{1}{1-k}(x-a)^{1-k} + C = \frac{1}{1-k}\cdot\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C$

(pour $k \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$)

(iv) $\displaystyle\int \frac{\beta x+\gamma}{x^2+bx+c}\,dx = \frac{\beta}{2}\int \frac{2x+b}{x^2+bx+c}\,dx + \left(\gamma - \frac{b\beta}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+bx+c}$

$\displaystyle = \frac{\beta}{2}\log\left(|x^2+bx+c|\right) + \left(\gamma - \frac{b\beta}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+bx+C}$

Mettre le dernier terme sous la forme $\displaystyle\int \frac{g'(x)}{g(x)^2+1}\,dx = \arctan(g(x)) + C$,

avec $g(x)$ une fonction affine.

<u>Exemple</u>:

$\displaystyle\frac{1}{x^2+2x+5} = \frac{1}{(x+1)^2+4}$ (compléter le carré).

$\displaystyle = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)^2+1}$ (faire apparaître 1)

$\displaystyle = \frac{1}{2}\cdot\frac{1/2}{\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)^2+1}$ (faire apparaître $g'(x) = \frac{1}{2}$ la dérivée de $g(x) = \frac{x}{2}+\frac{1}{2}$)

$\displaystyle = \frac{1}{2}\cdot\frac{g'(x)}{g(x)^2+1}$

Donc $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \frac{1}{2}\arctg\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right) + C$, $C \in \mathbb{R}$.

(v) $(k \geq 2)$ $\displaystyle\int \frac{\beta x+\gamma}{(x^2+bx+c)^k}\,dx = \underbrace{\frac{\beta}{2}\int \frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^k}\,dx}_{\frac{\beta}{2}\frac{1}{1-k}\cdot(x^2+bx+c)^{1-k}+C} + \left(\gamma - \frac{\beta b}{2}\right)\underbrace{\int \frac{dx}{(x^2+bx+c)^k}}_{(*)}$

Pour $(*)$: Mettre sous la forme $\displaystyle\int \frac{g'(x)\,dx}{(g(x)^2+1)^k} = \underline{I_k(g(x))} + C$ (avec g affine)

cf section 8.5.3.

8.7 Intégration de développements limités

Thm : Soit $f \in C^n(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$ et le DL_n suivant :

$$f(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n \cdot \varepsilon_1(x)$$

où $\varepsilon_1(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$. Alors :

$$\int_a^x f(t)\,dt = (x-a)\cdot f(a) + \frac{1}{2}\cdot f'(a)\cdot(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} + (x-a)^{n+1}\cdot \varepsilon_2(x)$$

où $\varepsilon_2(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$

Preuve : Il suffit d'intégrer terme à terme. Vérifions la forme du reste :

$$R(x) = \int_a^x (t-a)^n \cdot \varepsilon_1(t)\,dt$$

$$= (x-a)\cdot(u_x - a)^n \cdot \varepsilon_1(u_x)$$ pour un certain $u_x \in \,]a, x[$ par le Thm. de la moyenne.

fin cours 14/12