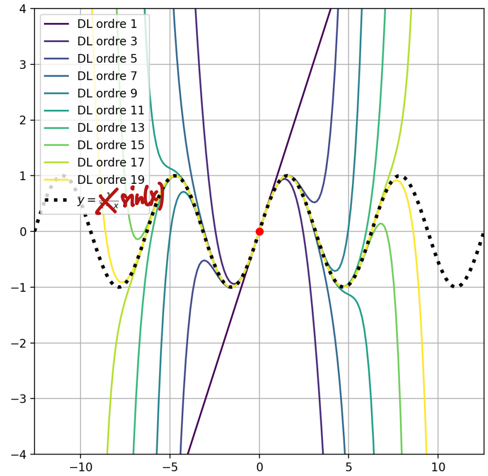
- $\exp(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$, $x \in \mathbb{R}$



- $\mathrm{sh}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1}$, $x \in \mathbb{R}$
- $\mathrm{ch}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k}$, $x \in \mathbb{R}$
- $\sin(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$, $x \in \mathbb{R}$
- $\cos(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$, $x \in \mathbb{R}$
- $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$, $x \in]-1,1[$

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$$

fin cours 04/12

Remarque (Hors programme) :

On peut définir l'exponentielle complexe à l'aide de la série entière :
Pour $\theta \in \mathbb{R}$:

$$e^{i\theta} := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(i\theta)^k}{k!} = \sum_{\ell \geq 0} \frac{(-1)^\ell \theta^{2\ell}}{(2\ell)!} + i \sum_{\ell \geq 0} \frac{(-1)^\ell \theta^{2\ell+1}}{(2\ell+1)!} = \cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta)$$

On retrouve la formule d'Euler.

⚠ Toute fonction de classe C^∞ n'est pas nécessairement développable en série entière.

Contre-exemple : $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

On a $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, en effet (le seul point délicat est $x_0 = 0$) :

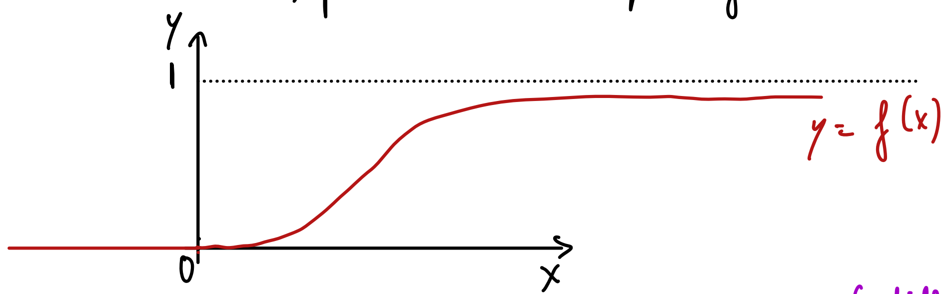
(i) $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 \Rightarrow f \in C^0(\mathbb{R})$

(ii) $f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{x^2} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \to 0^-} f'(x) = 0 \\ \lim_{x \to 0^+} f'(x) = 0 \end{cases}$ (par croissances comparées)

$u = \frac{1}{x}$, $\lim_{u \to +\infty} \frac{u^2}{e^u} = 0$

Donc par le Thm. de continuité de la dérivée, $f'(0) = 0$. Ainsi $f \in C^1(\mathbb{R})$.

(iii) On peut montrer ainsi, par récurrence, que $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ et $f^{(k)}(0) = 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$.



Série de Taylor en 0 : $S(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = 0$ (diffère de f pour $x > 0$)

Développement limité donné par la formule de Taylor (DL_n en 0) :

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k}_{=0} + r_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Donc pour $x > 0$, $\lim_{n \to +\infty} r_n(x) = e^{-1/x} \neq 0$

$\Rightarrow$ f n'est pas représentée par une série de Taylor.

Chapitre 8 : Intégrales (définies et indéfinies)

8.1 Intégrale indéfinie

Def : Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f \in \underbrace{C^0(I)}_{f \text{ est continue}}$. Une primitive de f est une fonction $F \in C^1(I)$ telle que $\forall x \in I$,

$$F'(x) = f(x).$$

Si $I = [a,b]$ alors $\begin{cases} F'(a) \text{ doit être lu comme } F'_+(a) \text{ (dérivée à droite)}. \\ F'(b) \text{ ———— } F'_-(b) \text{ (dérivée à gauche)}. \end{cases}$

Proposition : Soit $f \in C^0(I)$ et soient F et G des primitives de f. Alors $F - G$ est une fonction constante, autrement dit $\exists C \in \mathbb{R}$ telle que $F(x) = G(x) + C$ $\forall x \in I$.

Preuve : $(F-G)'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$, $\forall x \in I$.

Par un corollaire du Thm. des accroissements finis, on en déduit que $F - G$ est une fonction constante.

Def : On appelle intégrale indéfinie toute primitive de $f \in C^0(I)$, et elle est notée $\int f(x)\,dx$. On a :

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad \text{où } C \in \mathbb{R} \text{ et } F \text{ une primitive quelconque de } f.$$

Remarque : prendre la primitive d'une fonction est une opération linéaire c-à-d. que $\forall f, g \in C^0(I)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

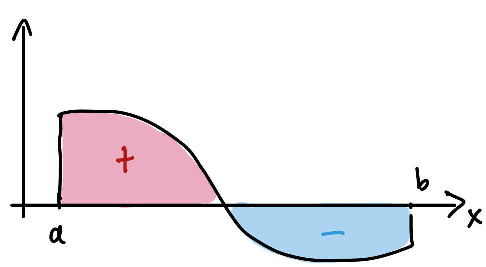
$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx.$$

Exemples de primitives à retenir :

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$	$C \in \mathbb{R}$
$k\,,\ k \in \mathbb{R}$	$k \cdot x + C$	
$x^\alpha\,,\ \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$	$\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C$	
$\frac{1}{x}$	$\log\|x\| + C$	
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$	
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$	
$\exp(x)$	$\exp(x) + C$	
$\log(x)$	$x\log(x) - x + C$	
$g'(x)\,g(x)$	$\frac{1}{2} g(x)^2 + C$	
$\frac{g'(x)}{g(x)}$	$\log\|g(x)\| + C$	
$\tan(x)$	$-\log(\|\cos(x)\|) + C$	
$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{Arctan}(x) + C$	
$\frac{g'(x)}{1+g(x)^2}$	$\mathrm{Arctan}(g(x)) + C$	

8.2 Construction de l'intégrale définie

Soit $f \in C^0([a,b])$, $a < b$.



Intégrale = " aire algébrique entre le graphe de f et l'axe des abscisses et entre a et b "

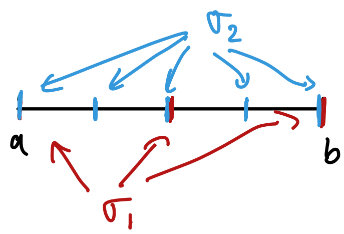
Construction de l'intégrale (de Riemman)

On pose $\sigma_n = \left\{ x_i = a + \frac{b-a}{2^n} \cdot i \text{ avec } i = 0, 1, \dots, 2^n \right\}$

Pour $n = 0$, $\sigma_n = \{a, b\}$ $(n = 0 \text{ et } i = 1)$ $a + \frac{b-a}{1} \cdot 1 = b$

$n = 1$, $\sigma_n = \left\{a, a + \frac{b-a}{2}, b\right\}$

... etc

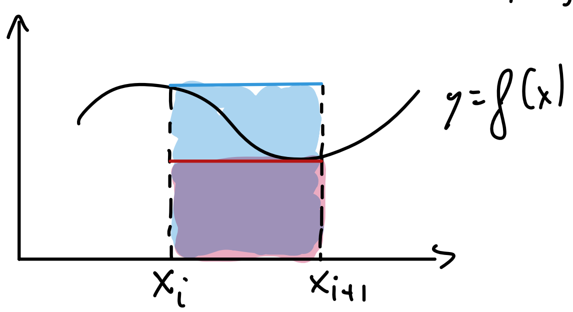


On a $\sigma_n \subset \sigma_{n+1}$

Donné $f \in C^0([a,b])$, on définit :

$$\underline{S_n} = \sum_{i=0}^{2^n-1} m_i \cdot (x_{i+1} - x_i) \quad \text{où } m_i = \min_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)$$

$$\overline{S_n} = \sum_{i=0}^{2^n-1} M_i \cdot (x_{i+1} - x_i) \quad \text{où } M_i = \max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)$$



Alors la suite $\underline{S_n}$ est croissante, la suite $\overline{S_n}$ est décroissante et de plus $\underline{S_n} \leq \overline{S_n}$. Donc ces 2 suites admettent des limites

$$\underline{S} = \lim_{n \to +\infty} \underline{S_n} \quad \text{et} \quad \overline{S} = \lim_{n \to +\infty} \overline{S_n}$$

Thm/Def. Si $f \in C^0([a,b])$ alors $\underline{S} = \overline{S} =: S$. Ce nombre S est appelé l'intégrale définie de f sur $[a,b]$. On note :

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$

Explication du Thm : La continuité de f sur $[a,b]$ implique (hors programme) :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \quad 0 \leq M_i - m_i \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$$ (continuité uniforme)

Ceci implique $0 \leq \overline{S_n} - \underline{S_n} = \sum_{i=0}^{2^n-1} (M_i - m_i) \cdot (x_{i+1} - x_i) \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon$

D'où $\lim_{n \to +\infty} \overline{S_n} - \underline{S_n} = 0$ et donc $\overline{S} = \underline{S}$.

⚠ Dans la notation $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$, x et t sont des variables muettes.

8.3 Propriétés des intégrales définies

Convention : . Si $a = b$, $\int_a^b f(x)\,dx = 0$

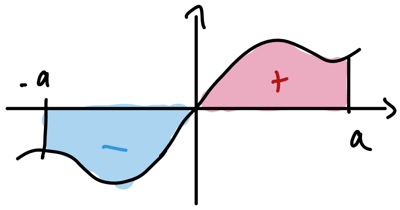
. Si $a > b$, $\int_a^b f(x)\,dx := -\int_b^a f(x)\,dx$

Soient $f, g \in C^0([a,b])$ avec $a < b$.

Propriété 1 : linéarité de l'intégrale. Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ alors

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx.$$

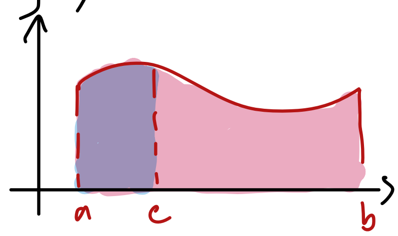
Propriété 2 : Si f est impaire alors $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$



: les aires + et − s'annulent.

Propriété 3 : (Relation de Charles). Si $c \in [a,b]$, alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$



Propriété 4 (Monotonie de l'intégrale) :

Si $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a,b]$ alors $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

En particulier : $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$ car $f \leq |f|$ et $-f \leq |f|$

fin cours 7/12