7.3 Séries entières

Def : Une série entière est une série de la forme :

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x-x_0)^k$$

avec $a_k \in \mathbb{R}$ pour $k \in \mathbb{N}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$ et x est un paramètre.

Question : Convergence et valeur de la somme en fonction de x ?

Souvent on pose $\overbrace{\xi}^{\text{xi}} = x - x_0$ alors $S = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \xi^k$

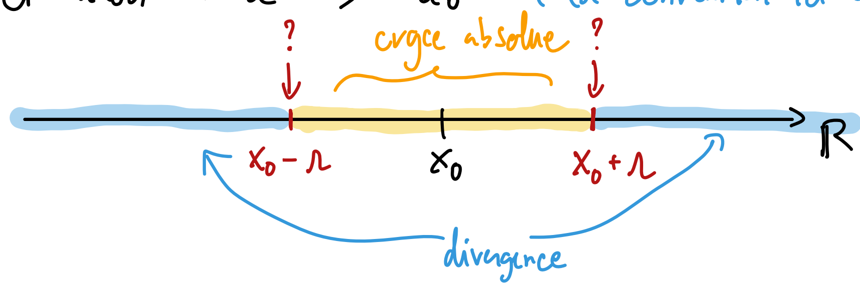
"x proche de x_0" $\Leftrightarrow$ "ξ proche de 0"

Thm : Il existe $r \in [0, +\infty]$ (soit $r \in \mathbb{R}_+$ ou $r = +\infty$) tel que la série entière $S = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \xi^k$ converge absolument pour $|x-x_0| < r$ et diverge pour $|x-x_0| > r$.

$|\xi| < r$ $\qquad\qquad$ $|\xi| > r$

Remarques :

- le nombre r est appelé le rayon de convergence de la série.
- le Thm. ne dit rien pour le cas $|x-x_0| = r$.
- Si $r = +\infty$: la série converge absolument pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- Si $r = 0$: la série ne converge que pour $x = x_0$ et alors on a $S = a_0$ (la convention ici est $0^0 = 1$)



Thm : On a $\frac{1}{r} = \limsup_{k \to +\infty} |a_k|^{1/k}$ (avec la convention $\frac{1}{\infty} = 0$ et $\frac{1}{0} = +\infty$)

De plus, si les limites existent, on a :

- $\lim_{k \to +\infty} |a_k|^{1/k} = \frac{1}{r}$ (Cauchy)
- $\lim_{k \to +\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{1}{r}$ (D'Alembert).

Explication : $S = \sum \underbrace{a_k (x-x_0)^k}_{b_k}$

Critère de la lim-sup : $q = \limsup_{k\to+\infty} |b_k|^{1/k}$

$$= \limsup_{k\to+\infty} |a_k|^{1/k} \cdot |x-x_0|$$

$$= |x-x_0| \cdot \limsup_{k\to+\infty} |a_k|^{1/k}$$

→ La série converge absolument si $q<1 \Leftrightarrow |x-x_0| < \dfrac{1}{\limsup_{k\to+\infty} |a_k|^{1/k}} = r$. ∎

⇝ Conseil : se ramener aux outils d'étude des séries.

7.4 Fonctions définies par des séries entières

Si $r \in]0, +\infty]$, on définit la fonction

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x-x_0)^k$$

définie sur $D =]x_0 - r, x_0 + r[$ (et éventuellement en $x_0 - r$ et $x_0 + r$).

Thm (dérivée des séries entières). On peut dériver "terme à terme" la série entière, c'est-à-dire :

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot a_k \cdot (x-x_0)^{k-1} \qquad (\ell \Leftrightarrow k-1)$$

$$= \sum_{\ell=0}^{+\infty} (\ell+1)\, a_{\ell+1} (x-x_0)^{\ell}$$

et le rayon de convergence de cette série entière est r.

Plus généralement, on a $f \in C^\infty(]x_0 - r, x_0 + r[)$ et

(*) $$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+n)!}{k!} a_{k+n} (x-x_0)^k$$ (même rayon de convergence).

Intuition pour le rayon de convergence :

Si $r = \lim_{k\to+\infty} \dfrac{|a_k|}{|a_{k+1}|}$, alors regardons le critère de D'Alembert pour f' :

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{|a_{k+1}\cdot(k+1)|}{|a_{k+2}\cdot(k+2)|} = \lim_{k\to+\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_{k+2}|} \cdot \underbrace{\lim_{k\to+\infty} \frac{k+1}{k+2}}_{=1} = r \cdot 1 = r.$$

Remarque : de (*) on déduit $f^{(n)}(x_0) = n! \cdot a_n \Leftrightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

→ C'est le coefficient donné par la formule de Taylor.

7.5 Séries de Taylor d'une fonction

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $x_0 \in I$ et $f \in C^\infty(I)$.

Def : la Série de Taylor de f en x_0 est : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

Série de Mac-Laurin : cas particulier où $x_0 = 0$.

Question : quand est-ce que l'on a $f(x) \overset{?}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$?

Quand c'est le cas sur I, on dit que f est développable en série entière.

Etudions un exemple :

Soit $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x_0 = 0$, $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Calculons les dérivées successives de f en 0 :

$f(x) = (1-x)^{-1}$, $f'(x) = (-1)(-1)\cdot(1-x)^{-2}$, $f''(x) = (-1)(-2)(1-x)^{-3}$, etc

(par récurrence) $\left(f^{(k)}(x) = k!\,(1-x)^{-1-k}\right)$

$f(0) = 1$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 2$, ..., $f^{(k)}(0) = k!$

Donc la série de Taylor de f est : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k$ (Série géométrique)

La série converge absolument pour $x \in]-1,1[$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x} = f(x)$

⇝ Donc f est développable en série entière sur $]-1,1[$.

⚠ Si $x = 2$, on a $f(x) = \frac{1}{1-2} = -1$ mais $\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k$ diverge.

• Autre technique, plus générale pour étudier le lien entre f et sa série de Taylor :

Formule de Taylor : $f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} x^k}_{\text{Polynôme de Taylor}} + \underbrace{r_n(x)}_{\text{Reste}}$

où $r_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(u)\, x^{n+1}$ où u est un réel entre x et x_0.

cf. cours 7.1

Donc $\quad r_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}(n+1)!\,(1-u)^{-1-(n+1)}x^{n+1}$

$$= \frac{1}{1-u}\left(\frac{x}{1-u}\right)^{n+1}$$

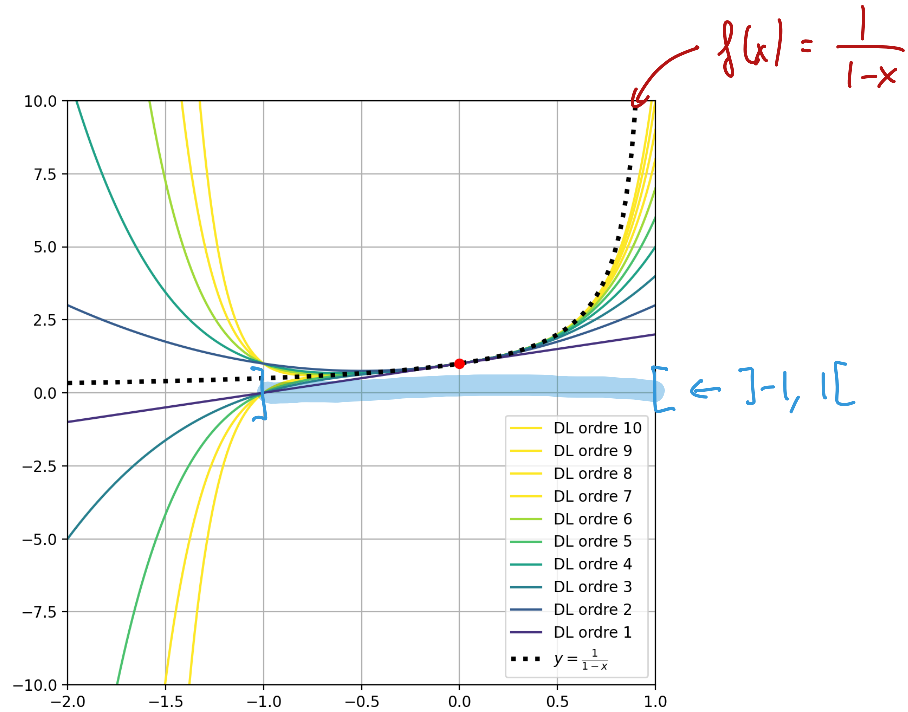
Soit $I = \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$. Pour $x, u \in I$, on a :

$$|r_n(x)| \leqslant \frac{1}{1-1/4}\left(\frac{1/4}{1-1/4}\right)^{n+1} \leqslant \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3^{n+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Donc $\quad f(x) = \lim_{n\to+\infty}\left[\sum_{k=0}^{n} x^k + r_n(x)\right] = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} x^k + \underbrace{\lim_{n\to+\infty} r_n(x)}_{=0}$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} x^k$$

(avec cette méthode, on ne peut conclure que pour $x \in \left]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right[$)

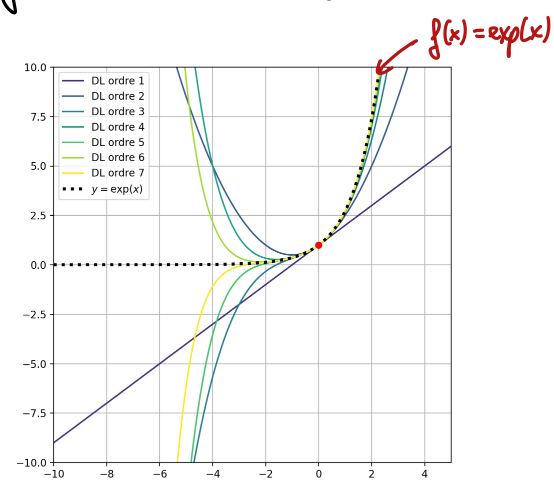


Avec une méthode similaire, on trouve les formules suivantes (à connaître) :
(avec $x_0 = 0$)

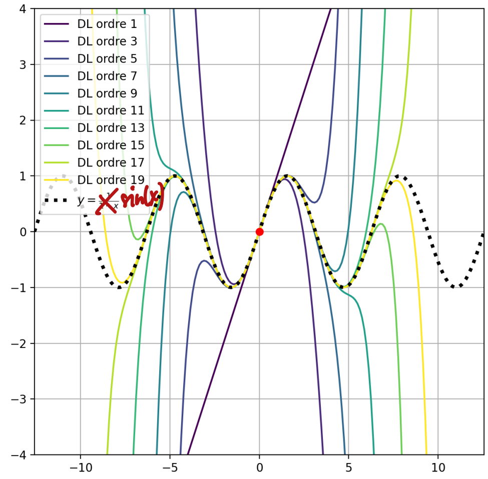
- $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k, \qquad x \in]-1,1[$

- $\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^k, \qquad x \in]-1,1[$

- $\log(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1}\frac{1}{k}x^k, \qquad x \in]-1,1]$



- $\exp(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$



- $\mathrm{sh}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$

- $\mathrm{ch}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$

- $\sin(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$

- $\cos(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$

- $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{\binom{\alpha}{k}} x^k \quad , \quad x \in]-1,1[$

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$$

fin cours 04/12