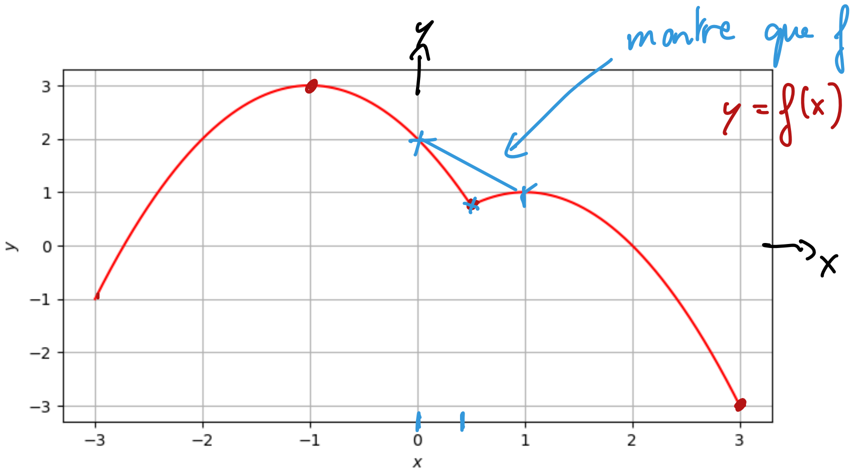
Graphe de f :

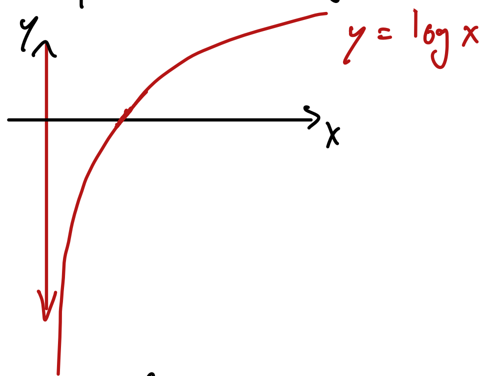


montre que f n'est pas concave sur $I_1 \cup I_2 = D(f)$.

6.10.5 Asymptotes

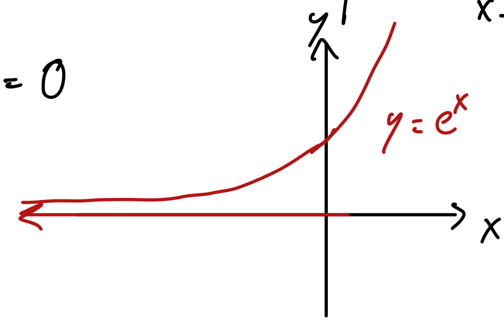
(i) Asymptote verticale en $a \in \mathbb{R}$, quand $\lim_{x \to a\pm} f(x) = \pm\infty$

Ex : $\lim_{x \to 0+} \log(x) = -\infty$



(ii) Asymptote horizontale : quand $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$.

Ex : $\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$



(iii) Asymptote oblique : quand $\exists\, a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - (ax+b) = 0$

Methode : ① d'abord calculer $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \overset{?}{=} a$

fin cours 27/11

② ensuite (si la 1ère limite existe) calculer $\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - ax] \overset{?}{=} b$.

Exemple : $f(x) = \frac{2x^2+5x+4}{x+1}$ en $+\infty$?

① $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2+5x+4}{x^2+x} = 2 = a$

② $\lim_{x \to +\infty} f(x) - 2x = \lim_{x \to +\infty} \frac{(2x^2+5x+4) - 2x^2 - 2x}{x+1}$

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{3x+4}{x+1} = 3 = b$

Chapitre 7 : Développements limités et séries de Taylor

7.1 Développements limités (DL)

Def : Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $x_0 \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$.
On dit que f admet un développement limité d'ordre n (DL_n) en x_0 ssi il existe $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ et une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \underbrace{a_0 + a_1 \cdot (x-x_0) + \dots + a_n \cdot (x-x_0)^n}_{P_n(x) \text{ Partie Régulière}} + \underbrace{(x-x_0)^n \cdot \varepsilon(x)}_{\text{reste}}$$

et $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

Prop : Si f admet un DL_n en x_0 alors P_n est déterminée de manière unique.

Thm (Formule de Taylor). Soit I un intervalle ouvert et $x_0 \in I$.
Si $f \in C^n(I)$ (Rappel : $C^n(I)$ = ensemble des fonctions n fois continûment dérivables sur I) alors f admet un DL_n en x_0, donné par :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + (x-x_0)^n \cdot \varepsilon(x)$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{\substack{\text{Polynôme de Taylor d'ordre } n \\ P_n(x)}} + \underbrace{(x-x_0)^n \cdot \varepsilon(x)}_{\substack{\text{reste} \\ r_n(x)}}$$

où $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

Si de plus $f^{(n)}$ est dérivable alors $\exists u \in]x_0, x[$ tel que $\varepsilon(x) = \frac{f^{(n+1)}(u)}{(n+1)!} \cdot (x-x_0)$

c'est à dire $r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(u)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$.

Exemple : Prenons $f(x) = \sin(x)$ et $x_0 = 0$.

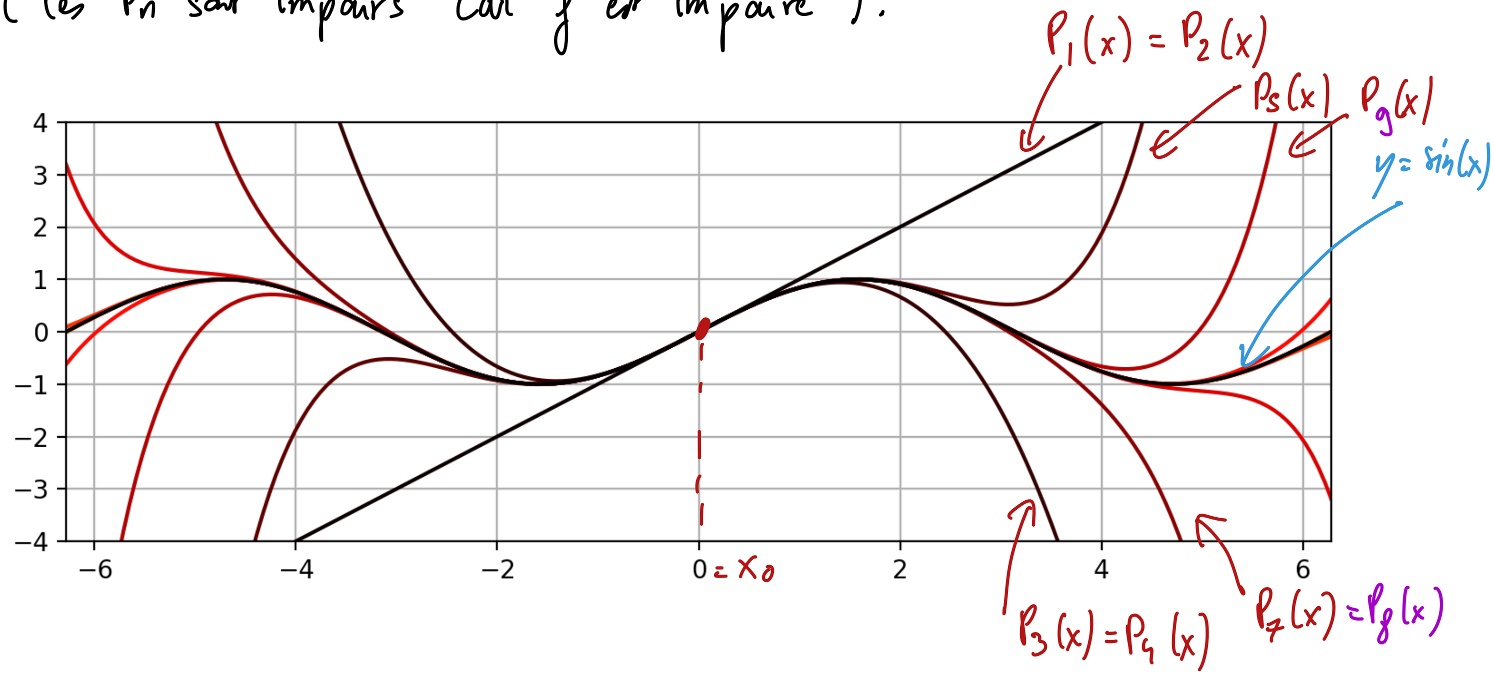
$a_0 = \frac{1}{0!} f^{(0)}(x_0) = f(x_0) = 0$ et $P_0(x) = 0$

$a_1 = \frac{1}{1!} f^{(1)}(x_0) = \cos(0) = 1$ et $P_1(x) = x$

$a_2 = \frac{1}{2!} f^{(2)}(0) = \frac{-\sin(0)}{2} = 0$ et $P_2(x) = x$

$a_3 = \frac{1}{3!} f^{(3)}(0) = \frac{-\cos(0)}{6} = \frac{-1}{6}$ et $P_3(x) = x - \frac{x^3}{6}$

(les P_n sont impairs car f est impaire).



__Ex :__ le DL_3 de sin en 0 est $\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + x^3 \cdot \varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

7.2 DL usuels

Par un calcul analogue à celui fait pour sin, on a les DL suivants en $x_0 = 0$:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + x^n \cdot \varepsilon(x)$$

(Se retrouve en écrivant : $\frac{1}{1-x} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + \frac{x^{n+1}}{1-x} = \sum_{k=1}^{n} x^k + x^n \cdot \varepsilon(x)$)

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + x^n \varepsilon(x).$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^n \cdot \varepsilon(x)$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1} \varepsilon(x) \leftarrow DL_{2n+1}$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n} \cdot \varepsilon(x) \leftarrow DL_{2n}$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + x^n \cdot \varepsilon(x)$$

$(\ln \equiv \operatorname{Log})$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} \cdot x^n + x^n \varepsilon(x)$$

⚠ À connaître.

Exemples d'applications au calcul de limites

1/ $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\overbrace{x + x \cdot \varepsilon(x)}^{DL_1}}{x} = \lim_{x \to 0} 1 + \varepsilon(x) = 1$$

2/ $$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \overbrace{\left(1 - \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x)\right)}^{DL_2}}{x^2} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} - \varepsilon(x) \right) = \frac{1}{2}.$$

3/ $$f(x) = \frac{\exp(x^4 \cos(e^{1/x^2})) - 1}{x} \quad \text{en } x_0 = 0 \ ?$$

Soit $g(x) = x^4 \cos(e^{1/x^2})$, on a $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$ (Thm des gendarmes).

On a $\exp(u) = 1 + u + u \cdot \varepsilon(u)$

Donc $$\exp(g(x)) = 1 + g(x) + g(x) \cdot \underbrace{\overbrace{\varepsilon(g(x))}^{\xrightarrow[x \to 0]{} 0}}_{\tilde{\varepsilon}(x)}$$ avec $\lim_{x \to 0} \tilde{\varepsilon}(x) = 0$

Donc $$f(x) = \frac{\exp(g(x)) - 1}{x} = \frac{g(x) + g(x) \cdot \tilde{\varepsilon}(x)}{x}$$

$$= x^3 \cos(e^{1/x^2})(1 + \tilde{\varepsilon}(x))$$

Donc $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ (Thm. des gendarmes).

7.3 Composition et produit de DL

1/ DL_3 de $\frac{1}{\cos(x)}$ en 0. $\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1+(\cos(x)-1)} = f(g(x))$

avec $\begin{cases} g(x) = \cos(x) - 1 = \frac{-x^2}{2} + x^3 \cdot \varepsilon(x) \\ f(u) = \frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + u^2 \cdot \tilde{\varepsilon}(u) \end{cases}$

Donc $\frac{1}{\cos x} = f(g(x)) = 1 - \left(\frac{-x^2}{2} + x^3 \cdot \varepsilon(x)\right)$

$$+ \left(\frac{-x^2}{2} + x^3 \cdot \varepsilon(x)\right)^2 + \left(\frac{-x^2}{2} + x^3 \cdot \varepsilon(x)\right)^2 \tilde{\varepsilon}\left(\frac{-x^2}{2} + x^3 \cdot \varepsilon(x)\right)$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2} + x^3 \cdot \tilde{\tilde{\varepsilon}}(x)$$

$\frac{x^4}{4} = x^3 \cdot \left(\frac{x}{4}\right) = x^3 \cdot \varepsilon(x)$

$2\left(-\frac{x^2}{2}\right) x^3 \cdot \varepsilon(x) = x^3 \cdot \tilde{\varepsilon}(x)$

- DL_3 de tangente en 0 :

la fonction $\varepsilon(x)$ change de ligne en ligne

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \left(x - \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon(x)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + x^3 \cdot \tilde{\varepsilon}(x)\right)$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon(x)\right) + \left(\frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{12} + \frac{x^5}{2}\varepsilon(x)\right) + \left(x^4 - \frac{x^6}{6} + x^6 \varepsilon(x)\right)\tilde{\varepsilon}(x)$$

of the form $x^3 \varepsilon(x)$

$$= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{2} + x^3 \varepsilon(x)$$

$$= x + \frac{1}{3}x^3 + x^3 \varepsilon(x).$$

N.B. : On aurait pu retrouver ce DL à l'aide de la formule de Taylor :

$f(x) = \tan(x) \Rightarrow f(0) = 0$

$f'(x) = \cos(x)^{-2} \Rightarrow f'(0) = 1$

$f''(x) = (-2) \cdot (-\sin x) \cdot \cos(x)^{-3} \Rightarrow f''(0) = 0$

$f'''(x) = 2\cos(x)^{-2} + 2\sin(x) \cdot (-3)(-\sin(x)) \cdot \cos(x)^{-4} \Rightarrow f'''(0) = 2.$

Donc par la formule de Taylor : $\tan(x) = 0 + 1 \cdot x + \frac{0}{2} \cdot x^2 + \frac{2}{3!}x^3 + x^3 \varepsilon(x)$

cohérent avec ci-dessus. $= x + \frac{1}{3}x^3 + x^3 \cdot \varepsilon(x)$

fin cours 30/11