EPFL — Lénaïc Chizat

Sections MX-EL-CGC — 4 décembre 2023

Analyse I – Série 11

Echauffement. (Asymptotes)

Trouver les asymptotes verticales et horizontales de la fonction $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$.

Exercice 1. (Points stationnaires et extremums)

Trouver les extremums locaux de la fonction f ainsi que le maximum et le minimum dans l'intervalle donné :

a) $f(x) = x^2 - \left|x + \frac{1}{4}\right| + 1 \quad \text{sur } [-1, 1]$

b) $f(x) = (x-1)^2 - 2\,|2-x| \quad \text{sur } \left]2, 3\right[$

Remarque de vocabulaire : extremums et *extrema* sont deux formes admises pour le pluriel de *extremum* (la remarque s'applique à d'autres termes en -um).

Exercice 2. (Etude de fonctions)

En suivant point par point la méthode vue dans l'exemple du cours, étudier les fonctions suivantes et esquisser leurs graphes (points stationnaires, extremums, convexité, points d'inflexion, asymptotes) :

a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

b) $f(x) = \dfrac{3x^2 - x}{2x - 1}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 1}{x}\, e^{-\frac{1}{x}}$

Exercice 3. (V/F : Etude de fonctions)

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b] \subset D(f)$, $a < b$, et dérivable sur $\left]a, b\right[$. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier votre réponse.

	V	F
a) Si f est convexe sur $[a, b]$, alors f' est croissante sur $\left]a, b\right[$.	☐	☐
b) Si f est deux fois dérivable sur $\left]a, b\right[$ et admet un point d'inflexion en $x_0 \in \left]a, b\right[$, alors f' admet un point stationnaire en x_0.	☐	☐
c) Si la tangente au point $\big(c, f(c)\big)$ avec $c \in \left]a, b\right[$ est horizontale, alors f admet un extremum en c.	☐	☐

Exercice 4. (Développements limités)

Déterminer le développement limité d'ordre 3 de f autour de $a = 0$ et donner le reste $R_3(x)$.

a) $f(x) = \sin(3x)$

b) $f(x) = \mathrm{Log}(2 + x)$

Exercice 5. (Composition de développements limités)

Trouver le développement limité d'ordre n autour de $a = 0$ de

a) $f(x) = \mathrm{Log}(\cos(x)), \quad n = 4$

b) $f(x) = \exp(\sin(x)), \quad n = 4$

c) $f(x) = \sqrt{1 + \sin(x)}, \quad n = 3$

Exercice 6. (Limites)

En utilisant des développements limités d'ordre convenable autour de 0, calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x - \frac{x^3}{6} - \sin(x)}{x^5}$

b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x + \sin(x) - \cos(x) - 2x}{x - \mathrm{Log}(1+x)}$

c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x\sin(\sin(x)) - \sin(x)^2}{x^6}$

Exercice 7. (Développement limité en $a \neq 0$)

Calculer le développement limité d'ordre 4 autour de $a = \frac{\pi}{3}$ de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{1+\cos(x)} .$$

Aide pour commencer : Introduire la variable $y := x - \pi/3$, puis utiliser de la trigonométrie et des DL connus pour calculer le DL de $\cos(x)$

Exercice 8. (V/F : Limites de quotients)

Soient $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ avec $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

a) Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$, alors $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

b) Si $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ n'existe pas, alors $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ n'existe pas.

Exercice 9. (QCM : Prolongement par continuité)

Pour $x \in \mathbb{R}$, on considère la fonction

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\cos(x)-1) - \cos(\sin(x)) + 1}{x^4} & \text{pour } x \neq 0, \\ c & \text{pour } x = 0. \end{cases}$$

Pour quelle valeur de $c \in \mathbb{R}$, la fonction f est-elle continue en $x = 0$?

- ☐ 0
- ☐ $-\frac{1}{6}$
- ☐ $\frac{1}{2}$
- ☐ $\frac{1}{4}$

Exercice 10. (QCM : Calcul d'une limite)

La limite

$$\lim_{x\to 0} \left(e^{\frac{2}{x^2}} \left(\cos\left(e^{-\frac{1}{x^2}} \right) - 1 \right) \right)$$

est égale à

- ☐ $+\infty$
- ☐ $-\frac{1}{2}$
- ☐ 0
- ☐ e^2