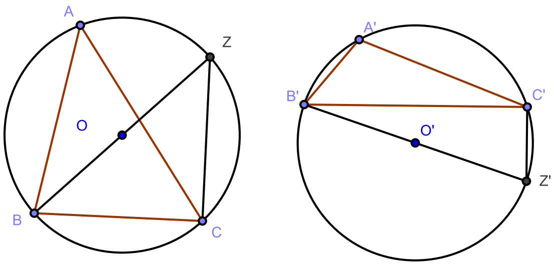
Exercice 1. On a

$$\cos\left(\alpha+\beta+\frac{\pi}{2}\right)=\cos(\alpha+\beta)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-\sin(\alpha+\beta)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\sin(\alpha+\beta),$$

et donc

$$\sin(\alpha+\beta)=-\cos\left(\alpha+\beta+\frac{\pi}{2}\right)=-\cos(\alpha)\cos\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)+\sin(\alpha)\sin\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)=\cos(\alpha)\sin(\beta)+\sin(\alpha)\cos(\beta).$$

Exercice 2. On considère ΔABC inscrit dans un cercle c de centre O, et on considère les cas où BC ne passe pas par O (sinon, le résultat est immédiat, puisque c est alors le cercle de Thalès de $[BC]$, a vaut $2r$ et $\sin(\alpha)=\sin(\pi)=1$). La droite BO intersecte le cercle en Z, et c devient le cercle de Thalès de $[BZ]$ (dans les figures ci-dessous, on représente les cas où A et Z sont du même côté de BC ou pas) :



Dans les deux cas, le triangle $\triangle BZC$ est rectangle en C, et on en déduit que $\overline{BZ}=\dfrac{\overline{BC}}{\sin(\widehat{BZC})}$, autrement dit

$$2r=\frac{a}{\sin(\alpha)}$$

(dans le 1er cas, $\widehat{BZC}=\alpha$ par le théorème de l'angle au centre ; dans le 2e cas, $\widehat{BZC}=\pi-\alpha$ parce que la somme des angles opposés d'un quadrilatère inscrit vaut π radians, et donc $\sin(\widehat{BZC})=\sin(\alpha)$).

Exercice 3.

a) $\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)-\cos(\alpha)=1-\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)-\cos(\alpha)$. D'où $2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=1-\cos(\alpha)$, et le résultat.

b) $\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\cos(\alpha)=1-\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\cos(\alpha)$. D'où $2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=1+\cos(\alpha)$, et le résultat.

c) Par **a)** et **b)**, $\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\dfrac{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}=\dfrac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}$.

Exercice 4.

a) On a :

$$\begin{aligned}\sin(\alpha)+\sin(\beta)&\overset{\text{idée}}{=}\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\\&=\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\\&\quad+\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)-\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\\&=2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right).\end{aligned}$$

b) On a :

$$\begin{aligned}\tan(\alpha)+\tan(\beta)&=\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}+\frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)}\\&=\frac{\sin(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\beta)\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}\\&=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}.\end{aligned}$$

Exercice 5.

a) $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \overset{\text{ex. 3}}{=} \sqrt{\frac{1+\cos(\frac{\pi}{6})}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$,

$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \overset{\text{ex. 3}}{=} \sqrt{\frac{1-\cos(\frac{\pi}{6})}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$,

$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sin(\frac{\pi}{12})}{\cos(\frac{\pi}{12})} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} = 2-\sqrt{3}$,

$\cot\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2-\sqrt{3}}$.

b) $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \overset{\text{ex. 3}}{=} \sqrt{\frac{1+\cos(\frac{\pi}{4})}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$,

$\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \overset{\text{ex. 3}}{=} \sqrt{\frac{1-\cos(\frac{\pi}{4})}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$,

$\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sin(\frac{\pi}{8})}{\cos(\frac{\pi}{8})} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$,

$\cot\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$.

c) $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$,

$\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$,

$\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sin(\frac{5\pi}{12})}{\cos(\frac{5\pi}{12})} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \frac{1}{2-\sqrt{3}}$,

$\cot\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 2-\sqrt{3}$.

Exercice 6.

a) $\cot^2(x) = \frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)} \overset{\text{ex. 3}}{=} \frac{1+\cos(2x)}{1-\cos(2x)}$.

b) $\tan\left(\frac{\pi}{4}+t\right) - \tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right) \overset{\text{prop.}}{=} \tan\left(\frac{\pi}{4}+t-\frac{\pi}{4}+t\right)\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}+t\right)\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right) =$
$\tan(2t)\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right)\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right) \overset{\text{prop.}}{=} \tan(2t)\underbrace{\left(1+\cot\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right)}_{=1+1} = 2\tan(2t)$

c) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+t\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}+t\right) \overset{\text{prop.}}{=} \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos(t) + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin(t) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(t) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(t)$
$= \frac{1}{2}\cos(t) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(t) + \frac{1}{2}\cos(t) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(t) = \cos(t)$.

d) $(\sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta))^2 + (\cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta))^2 \overset{\text{prop.}}{=} \sin^2(\alpha-\beta) + \cos^2(\alpha-\beta) = 1$.

e) $2\tan\left(\frac{t}{2}\right)\left(1-\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right) = 2\frac{\sin(\frac{t}{2})}{\cos(\frac{t}{2})}\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right) \overset{\text{cor.}}{=} \sin(t)$.

Exercice 7.

a) $S = \{k\cdot 2\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$.

b) $S = \left\{\frac{3\pi}{2} + k\cdot 2\pi \;\middle|\; k\in\mathbb{Z}\right\}$.

c) $S = \left\{\frac{\pi}{4} + k\cdot \pi \;\middle|\; k\in\mathbb{Z}\right\}$.

d) $S = \{\arcsin(0{,}26443) + k\cdot 2\pi \mid k\in\mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \arcsin(0{,}26443) + k\cdot 2\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$.

e) $S = \left\{\frac{\pi}{6} + k\cdot 2\pi \;\middle|\; k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{6} + k\cdot 2\pi \;\middle|\; k\in\mathbb{Z}\right\}$.

f) $S = \emptyset$ car le sinus prend des valeurs entre 1 et -1.

Exercice 8. On rappelle que $\cos(x) = \cos(-x)$, $\sin(x) = \sin(\pi - x)$, les fonctions sin et cos sont 2π-périodique, et la fonction tan est π-périodique.

a) $S = \left\{\frac{\pi}{7} + k \cdot 2\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{7} + k \cdot 2\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}$.

b) $S = \left\{\frac{5\pi}{4} + k \cdot 2\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{7\pi}{4} + k \cdot 2\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}$.

c) $S = \{38^\circ + k \cdot 90^\circ \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

d) $3x + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$ ou $3x + \frac{\pi}{8} = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi$ et donc $x = \frac{\pi}{72} + k \cdot \frac{2\pi}{3}$ ou $x = \frac{17\pi}{72} + k \cdot \frac{2\pi}{3}$. Ainsi l'ensemble des solutions est $S = \left\{\frac{\pi}{72} + k \cdot \frac{2\pi}{3} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{17\pi}{72} + k \cdot \frac{2\pi}{3} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}$.

e) $\frac{t}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi$ ou $\frac{t}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi$, ainsi $S = \left\{\frac{3\pi}{2} + k \cdot 4\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{2} + k \cdot 4\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}$.

f) $\frac{2t}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi$ ou $\frac{2t}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi}{3} + k \cdot 2\pi$, ainsi $S = \left\{\frac{11\pi}{8} + k \cdot 3\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{19\pi}{8} + k \cdot 3\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Exercice 9. La solution est détaillée dans les points **a)** et **b)** ; dans les points suivants, la démarche est la même.

a) Comme $\cos(5x) = \sin\left(5x + \frac{\pi}{2}\right)$, l'équation donnée devient $\sin\left(5x + \frac{\pi}{2}\right) + \sin(x) = 0$. On utilise encore le fait que $\sin(x) = -\sin(-x)$ pour arriver à l'équation $\sin\left(5x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(-x)$. Cette équation est vérifiée si $5x + \frac{\pi}{2} = -x + k \cdot 2\pi$ ou $5x + \frac{\pi}{2} = \pi - (-x) + k \cdot 2\pi$. Ainsi

$$S = \left\{-\frac{\pi}{12} + k \cdot \frac{\pi}{3} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{2} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

b) Comme $\sin(x - 60^\circ) = \cos(90^\circ - (x - 60^\circ)) = \cos(150^\circ - x)$, l'équation devient $\cos(3x) = \cos(150^\circ - x)$. Elle est vérifiée si $3x = 150^\circ - x + k \cdot 360^\circ$ ou $3x = -(150^\circ - x) + k \cdot 360^\circ$. Ainsi

$$S = \{37{,}5^\circ + k \cdot 90^\circ \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-75^\circ + k \cdot 180^\circ \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

c) Comme $\cot(3x) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$, l'équation devient $\tan\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = \tan\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ et alors

$$S = \left\{\frac{5\pi}{24} + k \cdot \frac{\pi}{4} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

d) $S = \left\{\frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{2} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}$.

e) Comme $\cos\left(2t + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(2t)$, l'équation devient $\sin(t - 3\pi) = \sin(2t)$, ou encore $\sin(t - \pi) = \sin(2t)$ et

$$S = \{\pi + k \cdot 2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{k \cdot \frac{2\pi}{3} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

f) Comme $\cos\left(t + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(t + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right)$, l'équation devient $\sin\left(t + \frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2t\right)$ et donc

$$S = \left\{\frac{5\pi}{9} + k \cdot \frac{2\pi}{3} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}.$$