

# Série 15

Pour le 10 janvier 2024

## Exercice 1

Détermine dans chacun des cas suivants si l'ensemble  $V$  considéré est un  $K$ -espace vectoriel.

- a)  $V = M_2(\mathbb{R})$  et  $K = \mathbb{R}$ ;
- b)  $V$  est le cercle de rayon 1 dans le plan complexe  $\mathbb{C}$  et  $K = \mathbb{C}$ ;
- c)  $V = \mathbb{C}$  et  $K = \mathbb{C}$ ;
- d)  $V = \mathbb{C}$  et  $K = \mathbb{R}$ ;
- e)  $V = \mathbb{F}_p[x]$  l'ensemble des polynômes  $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  avec les coefficients  $a_i \in K = \mathbb{F}_p$ ;
- f)  $V$  est l'ensemble de toutes les fonctions réelles  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continues telles que  $f'(0) = 1$ ;
- g)  $V$  l'ensemble de toutes les suites convergentes de nombres réels et  $K = \mathbb{R}$ .

## Exercice 2

Soient  $V_1, \dots, V_n$  des  $K$ -espaces vectoriels. Construis une structure de  $K$ -espace vectoriel sur le produit  $V_1 \times \dots \times V_n$ . Lorsque  $n = 3$  et  $V_1 = V_2 = V_3 = \mathbb{F}_2$ , dessine l'espace vectoriel produit  $V_1 \times V_2 \times V_3$ .

## Exercice 3

Détermine dans chacun des cas suivants si  $W$  est un sous-espace de  $V$ .

- a)  $K = \mathbb{R}$ ,  $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et  $W$  est l'ensemble de toutes les fonctions dérivables en tout point.
- b)  $K = \mathbb{R}$ ,  $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et  $W$  est l'ensemble de toutes les fonctions  $f$  telles que  $f(\pi) = e$ .
- c)  $K = \mathbb{R}$ ,  $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et  $W$  est l'ensemble de toutes les fonctions  $f$  bornées (il existe une constante  $c$  telle que  $|f(x)| < c$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ).
- d)  $K = \mathbb{R}$ ,  $V = \mathbb{R}^3$  et  $W$  est le sous-ensemble de tous les triples  $(x, y, z)$  tels que  $x + 2y + ez = 0$ .

e)  $K = \mathbb{R}$ ,  $V = \mathbb{R}^3$  et  $W$  est le sous-ensemble de tous les triples  $(x, y, z)$  tels que  $xyz = 0$ .

#### Exercice 4

On considère  $\mathbb{C}$  comme  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Décris l'action de  $\mathbb{R}$  sur les nombres complexes. Montre que  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$  est un sous-espace vectoriel et trouve une base du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}$ .

#### Exercice 5

**Vrai ou faux ?** Justifie brièvement tes réponses, en construisant un contre-exemple élémentaire lorsque c'est possible.

- a) Tous les espaces vectoriels sont de dimension finie.
- b) Tous les espaces vectoriels réels ont un nombre infini d'éléments.
- c) Un système de générateurs contient toujours une base.
- d) Deux vecteurs  $x$  et  $y$  sont linéairement dépendants si et seulement si  $x$  est un multiple de  $y$ .
- e) Trois vecteurs  $x$ ,  $y$  et  $z$  de  $\mathbb{R}^3$  sont linéairement dépendants si et seulement s'ils engendrent un plan  $W = \langle x, y, z \rangle$ .

#### Exercice 6

On travaille dans le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions réelles continues. On définit  $f_k(x) = \cos^k(x)$  et  $g_k(x) = \cos(kx)$ .

- a) Montre que les fonctions  $f_0, \dots, f_n$  sont linéairement indépendantes.

**Indication.** Si  $\lambda_0 f_0 + \dots + \lambda_n f_n = 0$ , réfléchis aux propriétés du polynôme  $\lambda_0 + \lambda_1 x + \dots + \lambda_n x^n$ .

- b) Montre que les fonctions  $g_0, \dots, g_n$  sont linéairement indépendantes.

**Indication.** Le faire par récurrence. Si on a la combinaison linéaire  $\lambda_0 g_0 + \dots + \lambda_n g_n = 0$ , on peut dériver l'équation plusieurs fois, puis additionner les équations d'une manière astucieuse pour pouvoir utiliser le pas de récurrence.

**Exercice 7**

On travaille dans le  $\mathbb{F}_7$ -espace vectoriel  $M_2(\mathbb{F}_7)$  des matrices carrées deux fois deux à coefficients dans le corps à sept éléments. On considère les sous-ensembles  $U$  des matrices de la forme  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ ,  $V$  des matrices de la forme  $\begin{pmatrix} u & v \\ 0 & u \end{pmatrix}$  et  $W$  des matrices de la forme  $\begin{pmatrix} u & 0 \\ w & u \end{pmatrix}$ .

- Montre que  $U, V$  et  $W$  sont des sous-espaces de  $M_2(\mathbb{F}_7)$ .
- Trouve une base de chacun des trois sous-espaces.
- Détermine les sous-espaces  $U \cap V$ ,  $U \cap W$  et  $V \cap W$ , ainsi qu'une base de chacun d'eux.

**Exercice 8**

Soient  $U \subset V$  un sous-espace vectoriel. Détermine  $U + U$ .

**Exercice 9**

On considère dans  $\mathbb{Q}^5$  le sous-espace des éléments  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Q}^5$  tels que  $x_1 = 3x_2$  et  $x_3 = 7x_4$ . Trouve une base de ce sous-espace.

**Exercices théoriques****Exercice 10**

**Multiplies dans les  $K$ -espaces vectoriels.** Soit  $n \in \mathbb{Z}$  et  $\lambda \in K$ . On définit  $n\lambda$  par récurrence. Pour  $n = 0$ ,  $0 \cdot \lambda = 0_K$ . Puis  $1 \cdot \lambda = \lambda$  et pour  $n > 1$ ,  $n\lambda = (n - 1)\lambda + \lambda$ . Enfin, si  $n < 0$ , alors  $n\lambda = (-n)\lambda$ . Soit  $V$  un  $K$ -espace vectoriel.

- Définis soigneusement les multiples  $nv$  d'un élément  $v \in V$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ;
- Montre que  $(n\lambda)v = n(\lambda v)$  pour tout  $v \in V$ ;
- Montre que  $\lambda(nv) = n(\lambda v)$  pour tout  $v \in V$ ;
- Quand est-ce que  $nv = 0_V$ ? Pense au cas des corps  $\mathbb{F}_p$  et à la caractéristique du corps  $K$ .

**Exercice 11**

**La somme directe.** Soit  $V$  un  $K$ -espace vectoriel,  $U$  et  $W$  des sous-espaces tels que  $U + W = V$ .

- a) Montre que  $U + W$  est une somme directe si et seulement si tout vecteur  $x \in V$  s'écrit de manière *unique*  $x = u + w$  avec  $u \in U$  et  $w \in W$ .
- b) On considère dans  $V = \mathbb{R}^3$  les sous-espaces  $U_1 = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ ,  $U_2 = \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$ ,  $U_3 = \{(0, y, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ . Montre que  $U_1 + U_2 + U_3 = V$  et que  $U_i \cap U_j = \{(0, 0, 0)\}$  si  $i \neq j$ .
- c) Penses-tu que dans la partie précédente il s'agit d'une somme *directe* de trois sous-espaces vectoriels ?

**Exercice 12**

**La somme directe, partie 2.** Soit  $V$  un  $K$ -espace vectoriel,  $U_1, \dots, U_n$  des sous-espaces tels que  $U_1 + \dots + U_n = V$ . On dit que cette somme est directe si tout vecteur  $v$  de  $V$  s'écrit de manière unique  $v = u_1 + \dots + u_n$  avec  $u_i \in U_i$ . On note alors  $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_n$ .

- a) Montre que  $V = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3$  si et seulement si  $U_i \cap U_j = \{0_V\}$  si  $i \neq j$  et de plus  $(U_i + U_j) \cap U_k = \{0_V\}$  pour  $i \neq j$  et  $k \neq i, j$ .
- b) Montre que  $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_n$  si et seulement si on peut écrire  $0_V$  de manière unique comme combinaison linéaire  $0_V = u_1 + \dots + u_n$  avec  $u_i \in U_i$ .
- c) Réponds maintenant à la dernière question de l'exercice précédent.