Série 14

Pour le 20 décembre 2023

Exercice 1

On considère l'ensemble des matrices 2×2 à coefficients réels $M_2(\mathbb{R})$ et le sous-ensemble B des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ pour $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Démontre la distributivité de la multiplication matricielle par rapport à l'addition.

b) Démontre que la multiplication n'est pas commutative.

c) Trouve un diviseur de zéro dans $M_2(\mathbb{R})$ et déduis-en que l'anneau des matrices 2×2 n'est pas un corps.

d) Montre que le sous-anneau B est un corps.

e) Comment "identifier" B avec les nombres complexes ? On dit que B et $\mathbb{C}$ sont *isomorphes.*

f) Montre que l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, pour $a, b \in \mathbb{R}$, forme un sous-anneau de $M_2(\mathbb{R})$. Est-ce un corps ?

Exercice 2

Démontre que la distributivité est vérifiée dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Exercice 3

Dans l'anneau $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, trouve tous les éléments inversibles (pour la multiplication) et tous les diviseurs de zéro.

Exercice 4

Effectue les calculs suivants dans $\mathbb{Z}/35\mathbb{Z}$. Donne à chaque fois le résultat sous la forme $[k]$ avec $-1 \leq k \leq 34$. Chaque fois que le mot "inverse" est utilisé, il s'agit de donner l'inverse pour l'addition (appelé "opposé") et celui pour la multiplication (s'ils existent).

a) $[7] \cdot [7]$;

b) $[7] + [7]$ et $[20] + [20]$;

c) l'inverse de $[-1]$;

d) l'inverse de $[18]$;

e) l'inverse de $[14]$;

f) l'inverse de $[5]$;

g) l'inverse de $[17]$;

h) l'inverse de $[4]$.

Exercice 5

On considère l'ensemble $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{([0],[0]),([0],[1]),([1],[0]),([1],[1])\}$. On définit l'addition par

$$([a],[b]) + ([c],[d]) = ([a+c],[b+d])$$

et la multiplication par

$$([a],[b]) \cdot ([c],[d]) = ([ad+bc+ac],[ac+bd])$$

a) Montre que l'addition munit $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ d'une structure de groupe abélien.

b) Montre que la multiplication munit $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ d'une structure d'anneau commutatif. Identifie en particulier l'élément neutre 0 pour l'addition et l'élément neutre 1 pour la multiplication.

c) Ecris la table de multiplication de cet anneau. Tu pourras utiliser les calculs de la partie précédente et nommer 0 et 1 les éléments neutres pour $+$ et $\cdot$.

d) Cet anneau est-il un corps ?

Exercice 6

On considère dans $\mathbb{C}$ les éléments de la forme $r + si$ avec $r, s \in \mathbb{Q}$. Montre que ces éléments forment un sous-corps de $\mathbb{C}$.

Exercice 7

Vrai ou faux ? Justifie brièvement tes réponses, en construisant un contre-exemple élémentaire lorsque c'est possible.

a) Les nombres impairs forment un sous-anneau de $\mathbb{Z}$.

b) Il existe des anneaux arbitrairement grands dans lesquels seul l'unité est inversible.

c) Dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, la diffèrence de deux classes est définie par $[a] - [b] = [a - b]$.

d) Il n'existe pas de corps à quatre éléments.

Exercice 8

Soit A l'ensemble de toutes les fonctions réelles continues $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ telles que $f(0) = f(1)$. On munit A de la somme et du produit "point par point" : $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ et $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$. Montre que A est un anneau commutatif.

Exercices théoriques

Exercice 9

La caractéristique d'un corps. Soit K un corps et 1 son unité (élément neutre pour la multiplication). On définit $k \cdot 1 = 1 + \cdots + 1$. La *caractéristique* de K est le plus petit entier strictement positif k tel que $k \cdot 1 = 0$. Si un tel k n'existe pas, on dit que la caractéristique est nulle.

a) Calcule la caractéristique de $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{F}_7$.

b) Soit p un nombre premier. Calcule la caractéristique de $\mathbb{F}_p$.

c) Si K est un corps de caractéristique positive $n > 0$, montre que n est un nombre premier.

d) Si K est un corps de caractéristique nulle, montre que K est infini (a un nombre infini d'éléments).

Exercice 10

Anneau produit. Soit A et B deux anneaux. Montre que l'on peut munir $A \times B$ d'une structure d'anneau.

Exercice 11

Le centre d'un anneau. Soit A un anneau. On appelle *centre* de A le sous-ensemble noté $Z(A) = \{z \in A \mid za = az \text{ pour tout } a \in A\}$. On utilise la lettre Z pour "Zentrum", le mot allemand.

a) Montre que $Z(A)$ est un sous-anneau de A.

b) Calcule $Z(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

c) Calcule $Z(M_2(\mathbb{R}))$.