Série 13

Pour le 13 décembre 2023

Exercice 1

Détermine si tu as affaire à des lois de composition dans les cas suivants. Lorsque c'est le cas, trouve l'élément neutre s'il existe.

a) la division dans $\mathbb{Z}$;

b) la division dans $\mathbb{R}$;

c) la somme de polynômes dans $\mathbb{Q}[x]$;

d) l'addition dans l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$;

e) l'addition dans l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, où on définit $\infty + (-\infty) = 0$;

f) la multiplication dans l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Exercice 2

Soit $E = \mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties $A \subset X$ qu'on munit de l'intersection. Montre qu'il s'agit d'une loi de composition. Admet-elle un élément neutre ? Quels sous-ensembles $A \subset X$ admettent un inverse pour cette loi de composition ?

Exercice 3

Dans chacun des cas suivants, détermine si $(E, *)$ est un groupe. Essaie lorsque c'est possible de te simplifier la vie en montrant qu'il s'agit d'un sous-groupe d'un groupe que tu connais.

a) $E = \mathbb{R}_+^*$ et $*$ est la division ;

b) E est l'ensemble des nombres entiers qui sont multiples de 10 et $*$ est l'addition ;

c) E est l'ensemble des nombres entiers qui sont multiples à la fois de 12 et de 9 et $*$ est l'addition ;

d) $E = \{a + bi \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ et $*$ est l'addition ;

e) $E = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ et $*$ est l'addition ;

f) $E = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ et $*$ est la multiplication ;

g) $E = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} - \{0\}$ et $*$ est la multiplication.

Exercice 4

Définis une structure de groupe abélien sur l'ensemble $\{0, 1\}$ en utilisant l'addition et en t'inspirant de l'exemple $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ traité en cours.

Exercice 5

Ecris la table de multiplication du groupe du matelas.

Exercice 6

On dispose d'une palette de couleurs, d'un grand verre d'eau et d'un pinceau. Soit E l'ensemble de toutes les couleurs et $*$ l'opération qui à deux couleurs a et b associe la couleur $a * b$ obtenue en mélangeant les couleurs a et b à parts égales. On admettra que le noir n est tellement dense que $n * a = n$ pour toute couleur $a \in E$.
S'agit-il d'une loi de composition ? Est-elle associative ? commutative ? Admet-elle un élément neutre ? L'ensemble des couleurs E forme-t-il un groupe ?

Exercice 7

Vrai ou faux ? Justifie brièvement tes réponses, en construisant un contre-exemple élémentaire lorsque c'est possible.

a) Toute loi de composition sur un ensemble E de deux éléments a et b est associative.

b) Toute loi de composition sur un ensemble E de deux éléments e et b, où e est un élément neutre, est associative.

c) Tous les groupes de deux éléments e et a ont la même table de multiplication, où e est un élément neutre.

d) La puissance $a * b = a^b$ est une loi de composition associative sur $\mathbb{N}$.

Exercice 8

Décris le groupe des isométries qui laissent globalement fixe un carré dans le plan. Combien d'éléments contient-il ? Est-il commutatif ?

Exercices théoriques

Exercice 9

La différence symétrique. On travaille dans l'ensemble des parties $\mathcal{P}(X)$. La différence symétrique de deux sous-ensembles $A, B \subset X$ est définie par $A\Delta B = (A - B) \cup (B - A)$.

a) Montre que $A\Delta B = (A \cap (X - B)) \cup (B \cap (X - A)) = (A \cup B) - (A \cap B)$ en t'aidant d'un diagramme de Venn pour justifier.

b) Montre que la différence symétrique est associative (aide-toi d'un diagramme de Venn).

c) Si $X = \{a, b\}$ est l'ensemble constitué de deux éléments a et b, décris $\mathcal{P}(X)$ et écris la table de la loi de composition Δ.

d) Montre que la différence symétrique admet un élément neutre. Quel est-il ?

e) Montre que tout sous-ensemble $A \subset X$ admet un inverse pour la différence symétrique, c'est-à-dire un sous-ensemble $B \subset X$ tel que $A\Delta B$ est l'élément neutre.

f) Calcule la différence symétrique d'un ensemble A et de son complémentaire $X - A$.

Exercice 10

L'ordre d'un élément. Soit $(G, *)$ un groupe et $g \in G$ un élément de ce groupe. On pose $g^1 = g$ et on définit par récurrence $g^n = (g^{n-1}) * g$, le produit de n fois g. On appelle *ordre* de g le plus petit entier n positif non nul tel que $g^n = e$, où e est l'élément neutre. Si un tel entier n'existe pas, on dit que l'ordre de g est infini.

a) Donne un exemple d'élément d'ordre deux et un exemple d'élément d'ordre infini.

b) Si $g^n = e$ et $g^m = e$, montre que $g^d = e$, où d est le plus grand commun diviseur de n et m.

c) Si $g^n = e$, montre que l'ordre de g divise n.

d) Si G n'a qu'un nombre fini d'éléments, disons n, montre que tout élément est d'ordre fini.

   Indication. Soit $g \in G$. L'ensemble $\{g, g^2, g^3, \dots\}$ doit être fini. Il existe donc deux entiers distincts n et m tels que $g^n = g^m$.