

Corrigé Test 2 - Dérivée

22 novembre 2023

Exercice 1. ($3 + 3 + 3 + 3 = 12$ points)

Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \sqrt[4]{(2 - 3x^2)^3}$

$$f'(x) = ((2 - 3x^2)^{3/4})' = \frac{3}{4}(2 - 3x^2)^{-1/4} \cdot (-6x) = \frac{-18x}{4(2 - 3x^2)^{1/4}} = \frac{-9x}{2\sqrt[4]{2 - 3x^2}}$$

b) $g(x) = \cos^3(2x + 1)$

$$g'(x) = 3 \cos^2(2x + 1) \cdot (-\sin(2x + 1)) \cdot 2 = -6 \cos^2(2x + 1) \sin(2x + 1)$$

c) $h(x) = \ln(x^3) \cdot \sin(2x)$

$$h'(x) = \frac{3x^2}{x^3} \cdot \sin(2x) + 2 \ln(x^3) \cdot \cos(2x) = \frac{3 \sin(2x)}{x} + 2 \ln(x^3) \cos(2x) = \frac{3 \sin(2x) + 6x \ln(x) \cos(2x)}{x}$$

d) $k(x) = \frac{e^{-5x}}{x}$ $k'(x) = \frac{-5e^{-5x} \cdot x - e^{-5x} \cdot 1}{x^2} = \frac{-e^{-5x}(5x + 1)}{x^2} = -\frac{(5x + 1)}{x^2 e^{5x}}$

Exercice 2. (5 points)

Montrer que la fonction $f(x) = -5x + 3$ est continue en tout point $a \in \mathbb{R}$ en appliquant la définition formelle de la continuité vue au cours.

f est continue en a si $\forall \varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Ici, on veut $|f(x) - f(a)| = |-5x + 3 - (-5a + 3)| = 5|x - a| < 5\delta = \varepsilon$.

Ainsi, on pose $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$ et la définition de la continuité est vérifiée.

Exercice 3. (4 points)

Énoncer le théorème des accroissements finis.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle continue définie sur un intervalle fermé et dérivable en tout point de $]a, b[$. Alors qu'il existe alors un point $a < c < b$ tel que

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

Exercice 4. (4 points)

Donner la définition de la fonction e^x et montrer qu'elle est égale à sa dérivée.

Pour tout nombre réel x , le nombre e^x est défini par

$$e^x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \stackrel{x \neq 0}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k \frac{x^n}{n!}$$

$$(e^x)' = \left(1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right)' = 0 + 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\mathcal{N}x^{n-1}}{\mathcal{N}(n-1)!} \stackrel{m=n-1}{=} 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = e^x$$

Exercice 5. (2 + 3 + 4 = 9 points)

Calcule les limites suivantes :

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \cdot e^{-x^2} = 0 \cdot 0 = 0$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sinh(x)} \stackrel{\text{"0/0"} \rightarrow \text{B.H.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{\cosh(x)} = 3$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x - \cos(x^2)}{4x + 3} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x - \cos(x^2)}{4x + 3} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x}{4x + 3} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(x^2)}{4x + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7}{4 + \frac{3}{x}} + 0 = \frac{7}{4} \end{aligned}$$

car par le théorème des gendarmes, $0 \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{\cos(x^2)}{4x + 3} \right| \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{4x + 3} = 0$.

Exercice 6. (3 + 4 = 7 points)

a) Donner la définition d'une fonction convexe.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle. On dit que f est convexe sur l'intervalle $[a, b]$ si, pour toute paire de points x et y compris entre a et b et tout nombre réel $0 \leq t \leq 1$, on a

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

b) Soit f une fonction réelle dérivable. En utilisant la définition de la dérivée, démontrer que si f est paire, alors la dérivée f' est impaire.

Première variante :

On utilise le changement de variables $y = -x$ et le fait que si $-y \rightarrow -a$, alors $y \rightarrow a$.

$$\begin{aligned} f'(-a) &\stackrel{\text{déf. de } f'(-a)}{=} \lim_{x \rightarrow -a} \frac{f(x) - f(-a)}{x + a} \stackrel{x = -y}{=} \lim_{y \rightarrow a} \frac{f(-y) - f(-a)}{-y + a} \\ &\stackrel{f \text{ paire}}{=} \lim_{y \rightarrow a} \frac{f(y) - f(a)}{-(y - a)} \stackrel{\text{lim est linéaire}}{=} - \lim_{y \rightarrow a} \frac{f(y) - f(a)}{y - a} \\ &\stackrel{\text{déf. de } f'(a)}{=} -f'(a). \end{aligned}$$

Deuxième variante :

$$\begin{aligned} f'(-x) &\stackrel{\text{déf. de } f'(-x)}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-x + h) - f(-x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-(x - h)) - f(-x)}{h} \\ &\stackrel{f \text{ paire}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x - h) - f(x)}{h} \stackrel{k = -h}{=} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x + k) - f(x)}{-k} \\ &\stackrel{\text{lim est linéaire}}{=} - \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x + k) - f(x)}{k} \stackrel{\text{déf. de } f'(x)}{=} -f'(x). \end{aligned}$$

Exercice 7. (3 + 4 + 4 + 4 + 3 = 18 points)


On considère la fonction f donnée par $f(x) = \ln(8 - x^3)$.

a) Déterminer l'ensemble de définition et le signe de f .

$$8 - x^3 > 0 \Leftrightarrow x^3 < 8 \Leftrightarrow x < 2. \text{ Ainsi, } ED(f) =] - \infty, 2[$$

$$\text{zéro de } f : 8 - x^3 = 1 \Leftrightarrow x^3 = 7 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{7} \simeq 1.9$$

Signe :

x	$-\infty$	$\sqrt[3]{7}$	2	$+\infty$
$f(x)$		+	0	-
				

b) Déterminer les éventuelles asymptotes de f .

$$\text{AV : } \lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(8 - x^3) = \text{"ln(0)" = } -\infty \Rightarrow \text{AV : } x = 2.$$

$$\text{AH : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(8 - x^3) = \ln(+\infty) = +\infty \Rightarrow \text{pas d'AH}$$


$$\text{AO : } m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(8 - x^3)}{x} \stackrel{\infty \rightarrow B.H.}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^2}{8 - x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3}{\frac{8}{x^2} - x} = 0 \Rightarrow$$

L'AO serait une AH et il n'y a pas d'AH. Donc pas d'AO non plus.

c) Etudier la croissance de f .

$$f'(x) = \frac{-3x^2}{8 - x^3}. \quad ED(f') = \mathbb{R} - \{2\} \cap ED(f) = ED(f) =] - \infty, 2[$$

zéro de f' : $x = 0$ mais f' ne change pas de signe et est toujours négative.


r	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	-
				
$f(x)$		↘ Palier(0; ln 8) ↘		

d) Etudier la courbure de f .

$$f''(x) = \frac{-6x(8 - x^3) + 3x^2(-3x^2)}{(8 - x^3)^2} = \frac{-48x + 6x^4 - 9x^4}{(8 - x^3)^2} = \frac{-48x - 3x^4}{(8 - x^3)^2} = \frac{-3x(16 + x^3)}{(8 - x^3)^2}$$

$$ED(f'') = ED(f) =] - \infty, 2[$$

$$\text{zéro de } f'' : x = 0 \text{ et } x = -\sqrt[3]{16} = -2\sqrt[3]{2}$$

y	$-\infty$	$-2\sqrt[3]{2}$	0	2	$+\infty$
$f''(x)$		-	0	+	0
					
$f(x)$		∩	I_1	∪	I_2
					∩

f admet les points d'inflexion $I_1(-2\sqrt[3]{2}; \ln 24) \simeq (2.5; 3.2)$ et $I_2(0; \ln 8) \simeq (0; 2)$.

e) Représenter le graphe de f dans la grille ci-dessous à l'aide de toutes les éléments identifiés précédemment.

