6.10.2 Critères

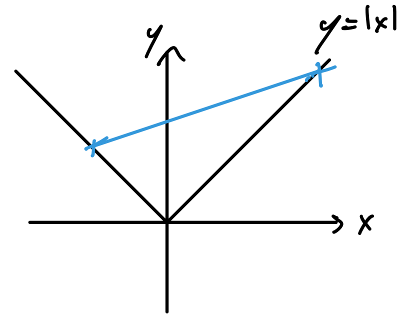
Thm. (critère suffisant de convexité) :

Si f' est définie et est croissante sur I_0 (en particulier si f'' existe et ≥ 0 sur I_0) alors f est convexe sur I_0.

Thm (critère suffisant de concavité) :

Si f' est définie et est décroissante sur I_0 (en particulier si $f'' \leq 0$ sur I_0) alors f est concave sur I_0.

Exemples :
- $f(x) = x^2$ convexe sur $\mathbb{R}$
- $f(x) = -x^2$ concave sur $\mathbb{R}$



⚠ La fonction $|x|$ est convexe, mais pas dérivable en 0. Donc une fonction convexe n'est pas nécessairement dérivable.

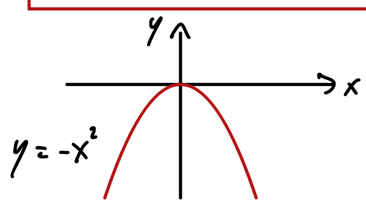
fin cours 23/11

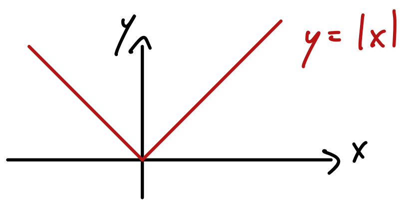
Théorème (extremum local)

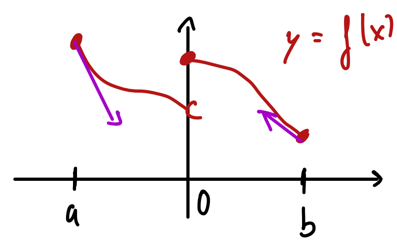
(i) Si f admet un extremum local en $x_0 \in]a,b[$ et si f est dérivable en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.

(ii) Si $f'(x_0) = 0$ en $x_0 \in [a,b]$ et si $f''(x_0) < 0$ alors f admet un maximum local en x_0.

(iii) Si $f'(x_0) = 0$ en $x_0 \in [a,b]$ et si $f''(x_0) > 0$ alors f admet un minimum local en x_0.

① 

② 

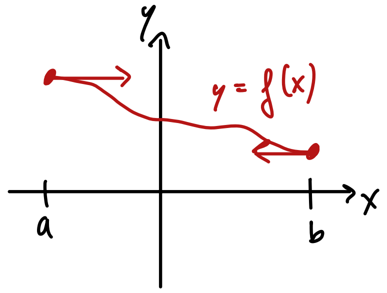
③ 

① cas (ii) du Thm. s'applique (0 est maximum, a priori local).

② minimum en 0 mais les critères ne s'appliquent pas.

③ le Thm ne s'appliquent pas, mais on a : • maxima locaux en a et en 0. global.
• minimum (global) en b.

④



ici le cas (ii) du Thm. s'applique en a (maximum local)
le cas (iii) ——— en b (minimum local)

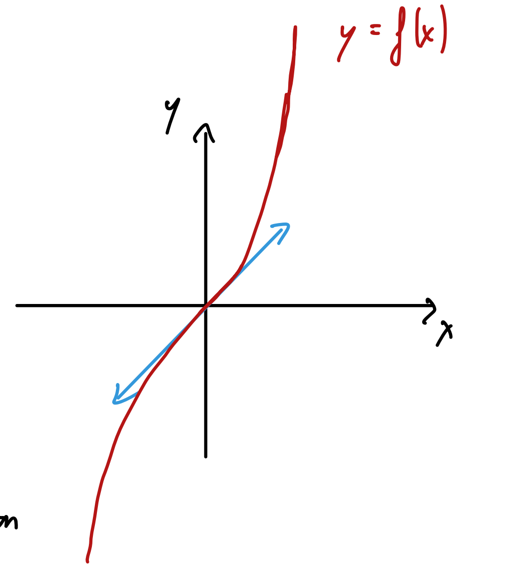
Remarque importante : Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue, les extrema sont à chercher parmi les points suivants :

- les points stationnaires (ou critiques) $f'(x_0) = 0$.
- les bords de l'intervalle.
- les points où f n'est pas dérivable

Théorème (points d'inflexion). Soit f une fonction 3 fois dérivable sur $]a, b[$.

(i) Si f admet un point d'inflexion en $x_0 \in]a,b[$ alors $f''(x_0) = 0$.

(ii) Si $f''(x_0) = 0$ et $f'''(x_0) \neq 0$ en $x_0 \in]a,b[$ alors f admet un point d'inflexion en x_0.



Exemples :

① $f(x) = x + x^3$ en $x_0 = 0$

$f'(x) = 1 + 3x^2$, $f''(x) = 6x$, $f'''(x) = 6$

En 0, on a :

$f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = 6$

$\Rightarrow$ le cas (ii) s'applique, 0 est un point d'inflexion de f

On peut le vérifier directement : $f(x) = \underbrace{x}_{\text{Eq. de la Tangente en } 0} + \underbrace{x^3}_{r(x)}$ et on a $r(x) \cdot x = x^4 > 0$ pour $x \neq 0$.

Exemple où le Thm. ne s'applique pas :

② $f(x) = x^4$

On a $f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$ donc le Thm. ne s'applique pas en 0.

et 0 n'est pas un point d'inflexion

car $f(x) = \underbrace{0}_{\text{Tangente en } 0} + \underbrace{x^4}_{r(x) \geq 0}$.

6.10.3 Exemple d'étude de fonction

On veut étudier et tracer le graphe de la fonction suivante :

$$f(x) = |2x - 1| - x^2 + 1 \quad , \quad D(f) = [-3, 3]$$

Pour $x \geq 1/2$, $2x - 1 \geq 0$ et pour $x < \frac{1}{2}$, $2x - 1 < 0$, donc :

$$f(x) = \begin{cases} 2 - 2x - x^2 & \text{si } x \in [-3, 1/2] =: I_1 \\ 2x - x^2 & \text{si } x \in [1/2, 3] =: I_2 \end{cases}$$

1) Domaine : $D(f) = [-3, 3]$

2/ Symmétrie (paire ? impaire ? périodique ?) : Aucune symétrie évidente.

3/ Zéros de f (points où $f(x) = 0$)

- Sur I_1 : $x^2 + 2x - 2 = 0 \iff \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} = x \iff x = -1 \pm \sqrt{3}$

  $\Delta = 2^2 - 4(-2) = 12$

  (c'est-à-dire $x \simeq -2{,}7$ ou $x \simeq 0{,}7$)

  $\rightarrow$ la seule solution dans I_1 est $\boxed{x = -1 - \sqrt{3}}$.

- Sur I_2 : $x^2 - 2x = 0 \iff x(x-2) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 2$

  $\rightarrow$ la seule solution dans I_2 est $\boxed{x = 2}$

4/ Continuité de f : f est continue (somme et composition de fonctions continues).

5/ Dérivabilité de f (calcul de f', f'' et de leur domaines).

f est dérivable deux fois sur I_1 et sur I_2 (mais pas sur $I_1 \cup I_2$) :

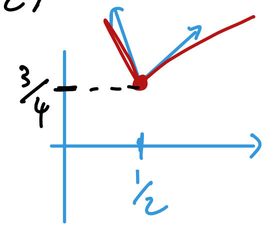
- Sur I_1 : $f'(x) = -2-2x$, $f''(x) = -2$
- Sur I_2 : $f'(x) = 2-2x$, $f''(x) = -2$

6/ Points particuliers :

(i) f est-elle dérivable en $1/2$?

On a $f'_+(\frac{1}{2}) = 2 - 2(\frac{1}{2}) = 1$ et $f'_-(\frac{1}{2}) = -2-2(\frac{1}{2}) = -3$

Donc f n'est pas dérivable en $1/2$.



D'après les signes de $f'_+(\frac{1}{2})$ et $f'_-(\frac{1}{2})$, f admet un minimum local en $1/2$ et $f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$

(ii) Points où $f' = 0$

- Sur I_1 ; $f'(x) = -2-2x = 0 \Leftrightarrow x = -1 \in I_1$ et $f(-1) = 3$ et $f''(-1) = -2$.
  $\Rightarrow$ -1 est un maximum local.
- Sur I_2 : $f'(x) = 2-2x = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in I_2$ et $f(1) = 1$ et $f''(1) = -2$.
  $\Rightarrow$ 1 est un maximum local.

(iii) Valeurs aux bords : $f(-3) = -1$ et $f(3) = -3$.

$\rightsquigarrow$ l'ensemble image est $[\min(f), \max(f)]$ avec
$$\begin{cases} \min(f) = \min\{\frac{3}{4}, 1, -1, -3\} = -3 \\ \max(f) = \max\{\frac{3}{4}, 3, 1, -1, -3\} = 3 \end{cases}$$

⑦ Monotonie, convexité, concavité

f' pas définie

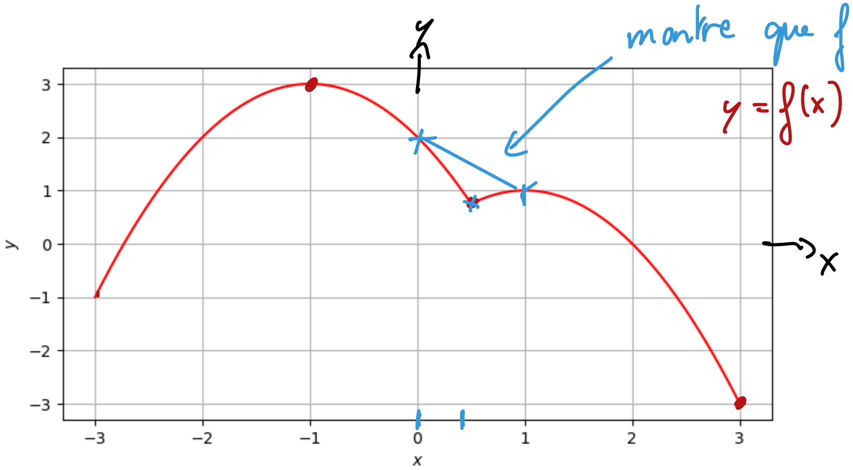
x	-3		-1		$1/2$		1		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗		↘	‖	↗		↘	

f est croissante sur $[-3, -1]$

x	-3		$1/2$		3
$f''(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$		concave		concave	

f est concave sur I_1 et sur I_2 mais apriori f n'est pas concave sur $I_1 \cup I_2$.

Graphe de f:

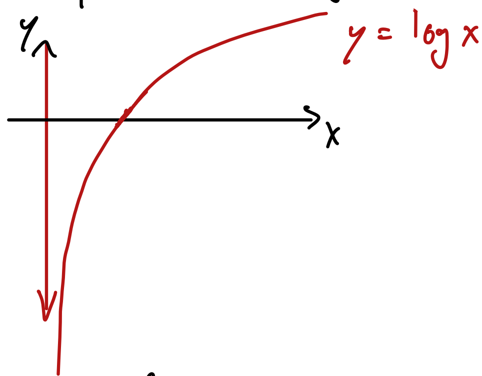


montre que f n'est pas concave sur $I_1 \cup I_2 = D(f)$.

6.10.5 Asymptotes

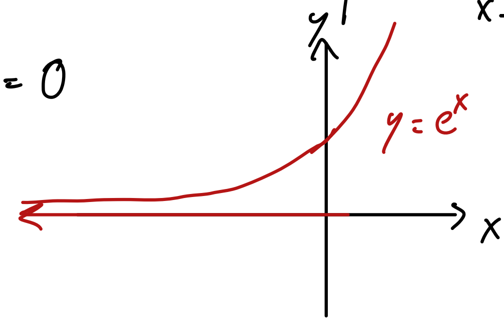
(i) Asymptote verticale en $a \in \mathbb{R}$, quand $\lim_{x \to a^\pm} f(x) = \pm\infty$

Ex: $\lim_{x \to 0^+} \log(x) = -\infty$



(ii) Asymptote horizontale : quand $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$.

Ex: $\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$



(iii) Asymptote oblique : quand $\exists\, a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - (ax+b) = 0$

fin cours 27/11