Preuve :

(i) Soient f, g dérivables sur $]a, b[$, donc f, g sont continues sur $]a,b[$.

(ii) On prolonge f et g par continuité en a ($f(a) = g(a) = 0$) et alors f et g continues sur $[a, b[$

(iii) Soit (x_n) une suite telle que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in]a,b[$

(iv) Par le Thm. des accroissements finis généralisé,

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists u_n \in]a, x_n[$ tel que

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_n) - f(a)}{g(x_n) - g(a)} = \frac{f'(u_n)}{g'(u_n)}$$

(Note : l'hypothèse $g'(x) \neq 0, \forall x \in]a,b[$ garantit que $g(x_n) \neq 0$)

Or $\left\{ \begin{array}{ll} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a & \text{(Thm des gendarmes)} \\ \lim\limits_{x\to a+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell & \text{(par hypothèse)} \end{array} \right\}$ implique $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f'(u_n)}{g'(u_n)} \overset{\text{existe}}{=} \ell$.

(v) On déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f(x_n)}{g(x_n)} = \ell$ et donc $\lim\limits_{x\to a+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ell$.

⚠ Si B.-H. ne s'applique pas, il se peut tout de même que la limite existe.

Soit $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ et $g(x) = x$, $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{f(x)}{g(x)}$?

On a $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0+} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ (Thm. des gendarmes).

Mais $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2\left(\frac{-1}{x^2}\right)\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{1} = \lim\limits_{x\to 0+} \underbrace{2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\to 0} - \underbrace{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{pas de limite}}$ n'existe pas.

6.9 Continuité de la fonction dérivée

Exemple (il existe f dérivable pour laquelle f' n'est pas continue) :

$$\text{Soit } f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{(prolongem}^{t} \text{ par continuité)}.$$

Pour $x \neq 0$:

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2\left(\frac{-1}{x^2}\right)\cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$= 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Pour $x = 0$: $f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h) - f(0)}{h - 0} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h^2 \sin(1/h)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} h \sin(1/h) = 0 \quad (\text{Thm. des gendarmes}).$$

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Mais f' n'est pas continue en $(x_0 =)\ 0$.

<u>En effet:</u> prenons la suite $x_n = \dfrac{1}{2\pi n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

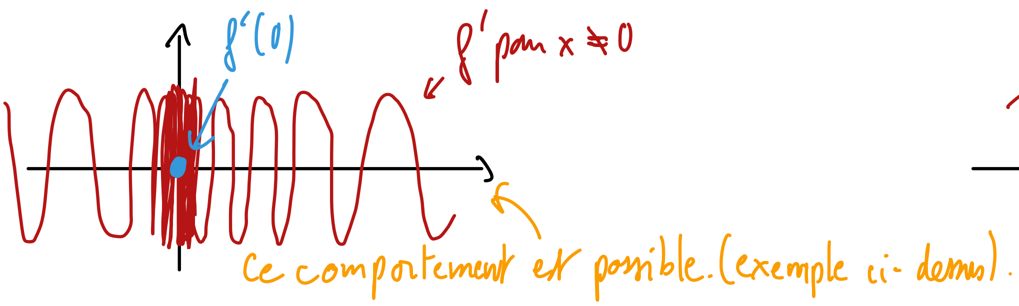
$$\text{On a } \lim_{n \to +\infty} f'(x_n) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\pi n} \cdot \underbrace{\sin(2\pi n)}_{=0} - \underbrace{\cos(2\pi n)}_{1}$$
$$= -1 \neq 0 = f'(0).$$

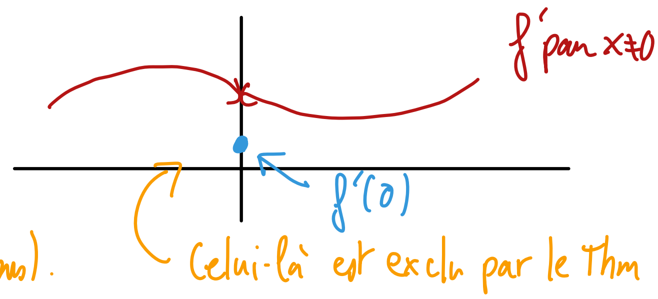
En fait f' n'admet même pas de limite en $(x_0 =)\ 0$.

<u>En effet:</u> prenons la suite $\tilde{x}_n = \dfrac{1}{2\pi n + \pi}$

$$\text{On a } \lim_{n \to +\infty} f'(\tilde{x}_n) = \lim_{n \to +\infty} \frac{2}{2\pi n + \pi} \sin(2\pi n + \pi) - \cos(2\pi n + \pi)$$
$$= +1 \quad (\neq -1)$$

<u>Thm. (continuité de la dérivée)</u>. Soit $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in]a, b[\subset D$, $(a<b)$ continue sur $]a, b[$ et dérivable sur $]a, b[\setminus \{x_0\}$. S'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = \ell$ alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \ell$.





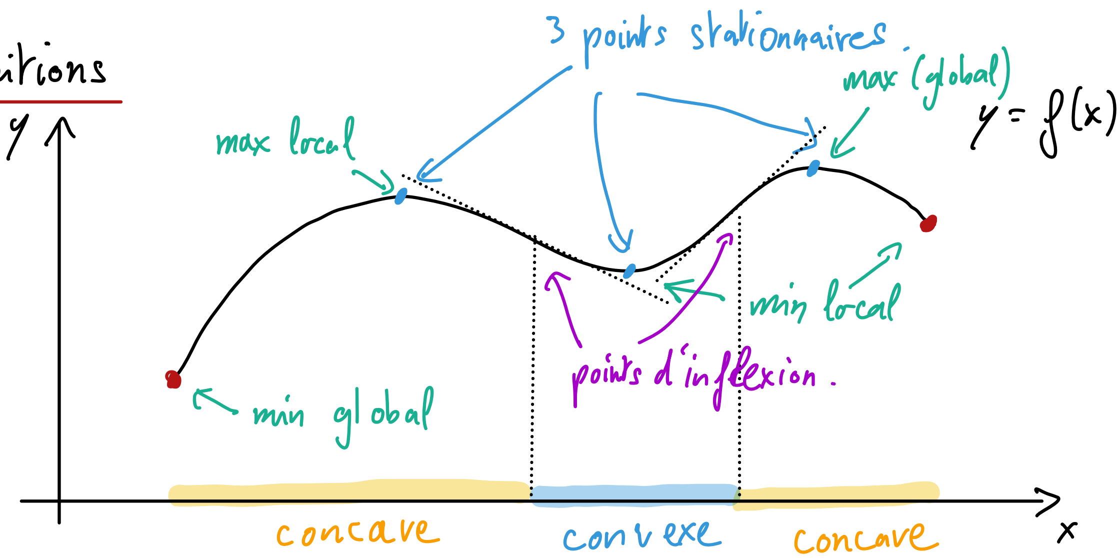
__Preuve :__ $\lim_{h\to 0+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \overset{(B.H.\ \frac{0}{0})}{=} \lim_{h\to 0+} \frac{f'(x_0+h)}{1} = \ell$
$\lim_{h\to 0-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \overset{(B.H\ \frac{0}{0})}{=} \lim_{h\to 0-} \frac{f'(x_0+h)}{1} = \ell$
} par hypothèse.

Donc f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \ell$. ∎

6.10 Etude de fonctions

Dans cette section, $f : D \to \mathbb{R}$, $I \subset [a,b] \subset D$, $a<b$ et $I_0 \subset I$ un sous-intervalle fermé de I.

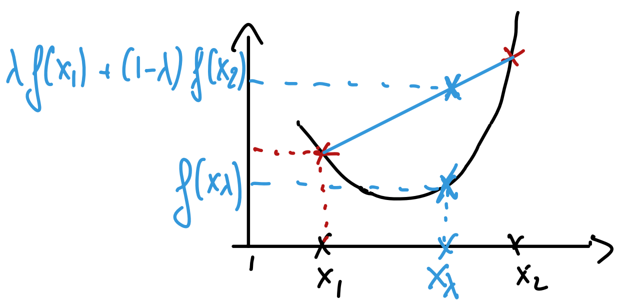
6.10.1 Définitions



• __Convexité :__ f est convexe sur I_0 si $\forall x_1, x_2 \in I_0$, $x_1 < x_2$, $\forall \lambda \in [0,1]$,

$$f(\underbrace{\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2}_{x_\lambda}) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

__Illustration :__



"le graphe de f est en-dessous de ses cordes"

• Concavité : $\forall \lambda \in [0,1]$ f est concave sur I_0 si $\forall x_1, x_2 \in I_0$, $x_1 < x_2$

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

(le graphe de f est au-dessus de ses cordes)

• Un point $x_0 \in I$ est un :

• point stationnaire (ou point critique) : si $f'(x_0)$ existe $= 0$.

• maximum local : "si $f(x) \leq f(x_0)$ pour tout $x \in I$ proche de x_0"

c'est-à-dire : $\exists \varepsilon > 0$ tel que $\forall x \in I$ tel que $|x - x_0| \leq \varepsilon$, on a $f(x) \leq f(x_0)$.

• minimum local : "si $f(x) \geq f(x_0)$ pour tout $x \in I$ proche de x_0.

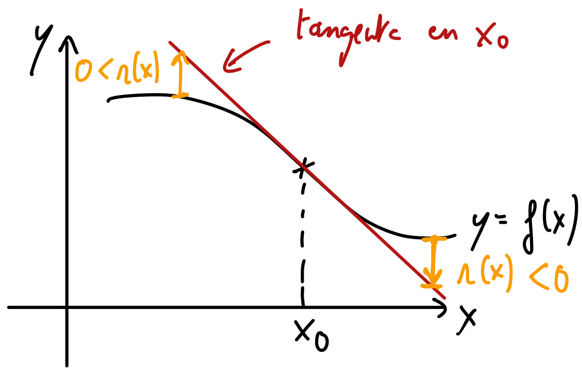
• maximum (global) : si $f(x) \leq f(x_0)$, $\forall x \in D(f)$

• minimum (global) : si $f(x) \geq f(x_0)$, $\forall x \in D(f)$

• extremum (local ou global) : si x_0 est un maximum (local ou global).
ou si x_0 est un minimum (local ou global).

• Point d'inflexion : si f est différentiable en x_0 et s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $r(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot (x - x_0)$
satisfait $\forall x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\setminus \{x_0\}$ on a $r(x) \cdot (x - x_0)$ est de signe constant.

(en particulier $|r(x)| > 0$ pour $x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 - \varepsilon[\setminus \{x_0\}$.



6.10.2 Critères

Thm. (critère suffisant de convexité) :

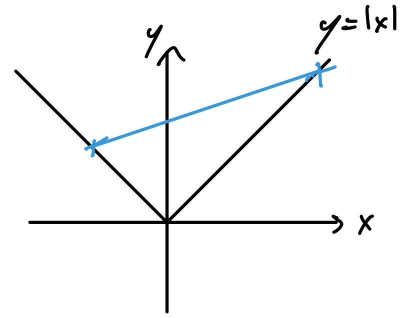
Si f' est définie et est croissante sur I_0 (en particulier si f'' existe et ≥ 0 sur I_0) alors f est convexe sur I_0.

Thm (critère suffisant de concavité) :

Si f' est définie et est décroissante sur I_0 (en particulier si $f'' \leq 0$ sur I_0) alors f est concave sur I_0.

Exemples :
- $f(x) = x^2$ convexe sur $\mathbb{R}$
- $f(x) = -x^2$ concave sur $\mathbb{R}$

⚠ La fonction $|x|$ est convexe, mais pas dérivable en 0. Donc une fonction convexe n'est pas nécessairement dérivable.



fin cours 23/11