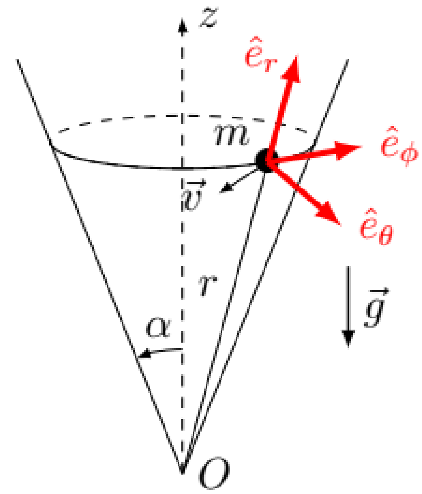
Corrigé Série 10 : Potentiels effectifs et référentiels tournants

1 Point matériel sur cône



a) On choisit un repère en coordonnées sphériques avec la contrainte que $\theta = \alpha$ est constant.

b) En coordonnées sphériques, le vecteur position $\vec{r}$ et ses dérivées sont donnés par

$$\vec{r} = r\,\hat{e}_r,$$
$$\vec{v} = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\dot{\phi}\sin\alpha\,\hat{e}_\phi,$$
$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2\sin^2\alpha)\,\hat{e}_r - r\dot{\phi}^2\sin\alpha\cos\alpha\,\hat{e}_\theta + (r\ddot{\phi}\sin\alpha + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\alpha)\,\hat{e}_\phi.$$

Les forces sont le poids $m\vec{g}$ et la force de liaison $\vec{N}$:

$$m\vec{g} = mg(-\cos\alpha\,\hat{e}_r + \sin\alpha\,\hat{e}_\theta),$$
$$\vec{N} = N_\theta\,\hat{e}_\theta.$$

Les équations du mouvement sont donnée par la deuxième loi de Newton, i.e. $m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}$. Leur projection sur les axes du repère est donnée par

$$-mg\cos\alpha = m\ddot{r} - mr\dot{\phi}^2\sin^2\alpha, \tag{1}$$
$$mg\sin\alpha + N_\theta = -mr\dot{\phi}^2\sin\alpha\cos\alpha, \tag{2}$$
$$0 = mr\ddot{\phi}\sin\alpha + 2m\dot{r}\dot{\phi}\sin\alpha. \tag{3}$$

c) On a

$$\vec{L}_O = \vec{r}\wedge m\vec{v} = r\,\hat{e}_r \wedge m(\dot{r}\,\hat{e}_r + r\dot{\phi}\sin\alpha\,\hat{e}_\phi) = -mr^2\dot{\phi}\sin\alpha\,\hat{e}_\theta.$$

En projetant sur l'axe z, on obtient

$$L_z = \vec{L}_O\cdot\vec{z} = \vec{L}_O\cdot(\cos\alpha\,\hat{e}_r - \sin\alpha\,\hat{e}_\theta) = mr^2\dot{\phi}\sin^2\alpha, \tag{4}$$

d'où

$$\frac{dL_z}{dt} = 2mr\dot{r}\dot{\phi}\sin^2\alpha + mr^2\ddot{\phi}\sin^2\alpha = r\sin\alpha(\underbrace{2m\dot{r}\dot{\phi}\sin\alpha + mr\ddot{\phi}\sin\alpha}_{=0\,(\text{cf.Eq.}(3))}) = 0.$$

Donc la composante L_z est constante..

Remarque : Puisque aucune des forces n'a de composante selon $\hat{e}_\phi$, les moments des forces par rapport à O n'ont pas de composante selon z. La composante L_z est donc constante.

d) On a

$$E = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + mgr\cos\alpha = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\sin^2\alpha) + mgr\cos\alpha$$
$$= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{L_z^2}{mr^2\sin^2\alpha} + mgr\cos\alpha,$$

où l'on a utilisé l'équation (4) pour éliminer la dépendance en $\dot{\phi}^2$.

Le poids est une force conservative, et la force le liaison ne travaille pas, donc l'énergie mécanique est constante.

Remarque 1 : Par dérivation de l'expression pour l'énergie mécanique, et en utilisant l'équation (1), on trouve que $dE/dt = 0$, sont l'énergie mécanique est constante.

Remarque 2 : Par intégration de l'équation (1), on trouve une intégrale première, que l'on identifie avec l'énergie mécanique. Puisque c'est une intégrale première du mouvement, l'énergie mécanique est constante.

2 Le manège à plancher rétractable

a) Le manège est en rotation, le référentiel associé n'est donc pas d'inertie (galiléen). Si $(Oxyz)$ est le repère associé au référentiel de l'observateur hors manège, on nomme $(Ox'y'z)$ le repère tournant associé au manège, avec l'axe Ox' partant du centre du manège et passant par (le centre de gravité de) la personne et Oy' tel que le repère soit direct (on rappelle que $z = z'$).

Les forces s'appliquant sur la personne sont :

— son poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\hat{e}_z = -mg\hat{e}_{z'}$

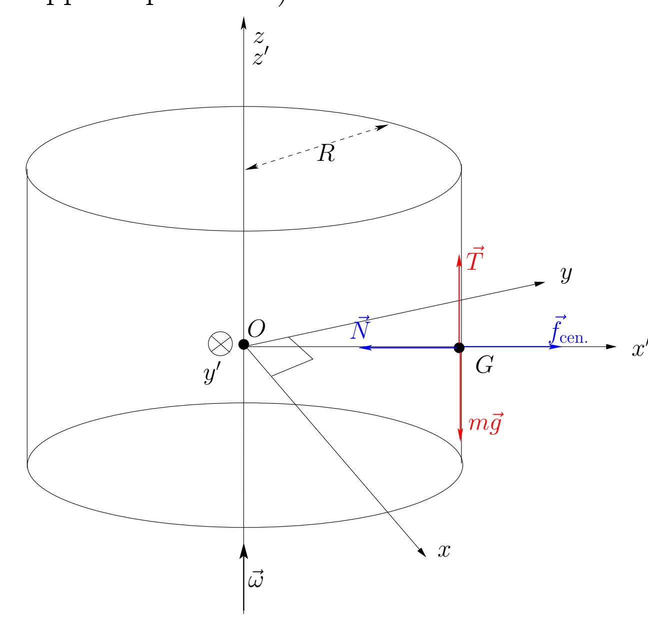
— la force de liaison de la paroi, $\vec{N} = N_x\hat{e}_{x'}$

— la force de frottement statique avec la paroi $\vec{T} = T_z\hat{e}_{z'}$

— la force centrifuge $\vec{f}_{\text{cent.}} = -m\vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OG}) = mR\omega^2\hat{e}_{x'}$

— les autres forces d'inertie sont nulles.

Pour que l'équilibre ait lieu, la somme de ces forces doit être nulle. Il en ressort que la force de réaction de la paroi doit compenser la force centrifuge, $N_x = -mR\omega^2$, et que la force de frottement statique doit compenser le poids, $T_z = mg$. On voit donc en particulier qu'on ne peut s'affranchir du frottement statique dans la description du problème.



b) On sait d'après les lois de Coulomb sur le frottement statique que la condition de non glissement de la personne le long de la paroi est $|T_z| \leq \mu|N_x|$. En utilisant les conditions d'équilibre de la question a), on en déduit que :

$$\omega^2 \geq \frac{g}{\mu R}, \tag{5}$$

c'est à dire

$$\omega \geq \omega_{\min} \quad \text{avec} \quad \omega_{\min} = \sqrt{\frac{\mathrm{g}}{\mu \mathrm{R}}}. \tag{6}$$

3 Point matériel dans un référentiel tournant

On choisit un référentiel $Oxyz$ tournant avec la tige, et le repère associé $O\hat{e}_x\hat{e}_y\hat{e}_z$ (voir dessin). Le vecteur $\hat{e}_x$ est dans la direction de la tige, avec origine le point O, et $\hat{e}_z$ est dans le plan vertical contenant la tige. La tige tourne avec un vitesse angulaire Ω verticale, donc

$$\vec{\Omega} = \Omega \cos\alpha \hat{e}_x + \Omega \sin\alpha \hat{e}_z \,. \tag{7}$$

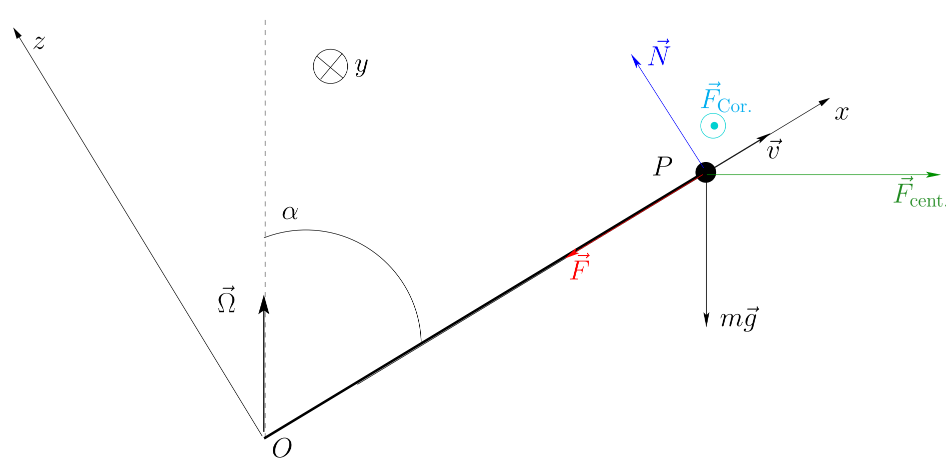
a) Dans le référentiel lié à la tige, les forces exercées sur le point P sont :
- le poids $m\vec{g} = -mg\cos\alpha\hat{e}_x - mg\sin\alpha\hat{e}_z$,
- la force de rappel du ressort, dirigée le long de la tige, $\vec{F} = -k(x-l_0)\hat{e}_x$,
- la force de liaison de P sur la tige, perpendiculaire à la tige, $\vec{N} = N_y\hat{e}_y + N_z\hat{e}_z$ (dans le dessin ci-dessous, le vecteur $\vec{N}$ n'est pas dans le plan de la feuille, en fait la composante N_y compense la force de Coriolis),
- la force de Coriolis

$$\vec{F}_{\text{Coriolis}} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v} = -2m \begin{pmatrix} \Omega\cos\alpha \\ 0 \\ \Omega\sin\alpha \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -2m \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega\sin\alpha\dot{x} \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

  qui n'a pas de composante selon $\hat{e}_x$,
- et la force centrifuge,

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{Centrifuge}} &= -m\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OP}) \\ &= -m\vec{\Omega} \wedge \left(\begin{pmatrix} \Omega\cos\alpha \\ 0 \\ \Omega\sin\alpha \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = -m \begin{pmatrix} \Omega\cos\alpha \\ 0 \\ \Omega\sin\alpha \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ x\Omega\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} mx\Omega^2\sin^2\alpha \\ 0 \\ -mx\Omega^2\sin\alpha\cos\alpha \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

- Les autres forces d'inertie sont nulles, car l'origine du référentiel tournant est fixe dans le référentiel d'inertie, et que la vitesse angulaire $\vec{\Omega}$ est constante.



On peut alors écrire l'équation du mouvement dans le référentiel tournant, $\sum \vec{F}^{\text{ext}} + \sum \vec{F}^{\text{inertie}} = m\vec{a}'$, selon $\hat{e}_x$:

$$-mg\cos\alpha - k(x - l_0) + mx\Omega^2 \sin^2\alpha = m\ddot{x}\,. \tag{8}$$

qui peut se récrire

$$m\ddot{x} = -(k - m\Omega^2 \sin^2\alpha)x + (kl_0 - mg\cos\alpha)\,. \tag{9}$$

On reconnait l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique de pulsation

$$\omega = \sqrt{\frac{k - m\Omega^2 \sin^2\alpha}{m}}\,,$$

pour autant que $k > m\Omega^2 \sin^2\alpha$.

b) A l'équilibre dans le référentiel de la tige, le point matériel a une accélération nulle ($\ddot{x} = 0$). De l'équation du mouvement, on trouve alors la position d'équilibre x_{eq} telle que

$$-(k - m\Omega^2 \sin^2\alpha)x_{eq} + (kl_0 - mg\cos\alpha) = 0\,. \tag{10}$$

d'où

$$(k - m\Omega^2 \sin^2\alpha)x_{eq} = kl_0 - mg\cos\alpha\,, \tag{11}$$

et la solution est

$$x_{eq} = \frac{kl_0 - mg\cos\alpha}{k - m\Omega^2 \sin^2\alpha}\,. \tag{12}$$

Les cas limites donnent :
— $k \to \infty \Rightarrow x_{eq} = l_0$, qui correspond à un ressort rigide qui n'est pas affecté par le poids ni la force centrifuge.
— $\Omega = 0 \Rightarrow x_{eq} = l_0 - \frac{mg}{k}\cos\alpha$.
— $\alpha = \pi/2 \Rightarrow x_{eq} = \frac{kl_0}{k - m\Omega^2}$.

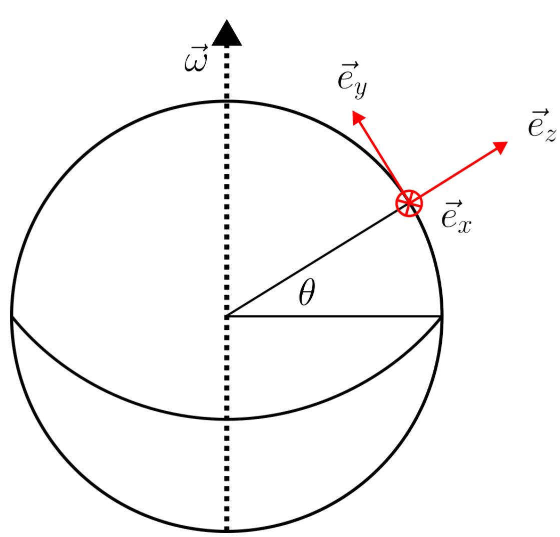
4 Déviation vers l'est

a) Le référentiel lié à la Terre n'est pas galiléen, mais en rotation autour de l'axe Nord-Sud. Les forces s'exercant sur le mobile sont donc :
— La force de gravité $\vec{P} = -mg\vec{e}_z$.
— La force centrifuge $\vec{F}_{\text{cen}} = m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})$.
— La force de Coriolis $\vec{F}_{\text{cor}} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}$.

b) Un ordre de grandeur de ω est $\omega = \frac{2\pi}{24\times3600}s^{-1} = 7.27\times10^{-5}s^{-1}$. L'amplitude de la force centrifuge est donc au mieux de $\omega^2 R_T \approx 0.034ms^{-2} \ll g$. On peut donc la négliger dans un premier temps.

c) Si on néglige la force de Coriolis, l'objet se déplace uniquement dans la direction $\vec{e}_z$. Si la vitesse est donnée par $\vec{v} = \dot{z}\vec{e}_z$, la force de Coriolis est alors

$$-2m\vec{\omega} \wedge \dot{z}\vec{e}_z = -2m\omega\dot{z}\cos\theta\vec{e}_x.$$



* Au vu des conditions initiales, la latitude est donc conservée au cours du mouvement. Les équations du mouvement sont données par

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -2m\omega\dot{z}\cos\theta \\ m\ddot{y} = 0 \\ m\ddot{z} = -mg \end{cases}$$

d) Résolvons d'abord l'équation du mouvement selon z. On a :

$$z(t) = -\frac{g}{2}t^2 + \dot{z}(0)t + z(0)$$

$$z(t) = -\frac{g}{2}t^2$$

Le mobile a chuté de h a un temps $t_h = \sqrt{\frac{2h}{g}}$.

Maintenant, dans la direction x, on obtient $m\ddot{x} = 2m\omega\cos\theta gt$. Un première intégration (en utilisant $\dot{x}(0) = 0$) nous donne

$$\dot{x} = g\omega\cos\theta t^2.$$

Une seconde intégration donne

$$x(t) = \frac{1}{3}g\omega\cos\theta t^3.$$

Au moment où l'objet a atteint la profondeur h, on a donc

$$x = \frac{1}{3}\omega g\left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{3}{2}}\cos\theta.$$

L'objet s'est bien déplacé vers l'est (quelque soit notre hémisphère de départ).

e) Le temps de chute est égal à

$$t_h = \sqrt{\frac{2h}{g}} \approx 5.68s.$$

La vitesse angulaire est égale à $7.27 \times 10^{-5}s^{-1}$. Ensemble, on obtient finalement

$$x(t) = \frac{1}{3}g\omega\cos\theta t^3 \approx 0.0435\cos\theta m \approx 2.74cm.$$

La vitesse maximale de la masse est atteinte au moment de l'impact au sol.

$$\dot{z} = -gt \approx 55.7ms^{-1}$$

$$\dot{x} = g\omega\cos\theta t^2 \approx 0.023\cos\theta ms^{-1} \approx 0.0145ms^{-1}.$$

La vitesse dans la direction $\vec{e}_x$ est donc bien négligeable comparée à la vitesse verticale.

Compléments de cours, hors programme

f) La force de Coriolis est maintenant donnée par

$$\vec{F}_{\text{cor}} = -2m\omega \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = -2m\omega \begin{pmatrix} \dot{z}\cos\theta - \dot{y}\sin\theta \\ \dot{x}\sin\theta \\ -\dot{x}\cos\theta \end{pmatrix}$$

Les équations du mouvement sont alors données par

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -2m\omega(\dot{z}\cos\theta - \dot{y}\sin\theta) \\ m\ddot{y} = -2m\omega\dot{x}\sin\theta \\ m\ddot{z} = -mg + 2m\omega\dot{x}\cos\theta \end{cases}$$

g) On dérive la première équation du mouvement :

$$\dddot{x} = -2\omega(\ddot{z}\cos\theta - \ddot{y}\sin\theta)$$

On peut alors utiliser les deux autres équations pour obtenir :

$$\dddot{x} = -2\omega((-g + 2\omega\dot{x}\cos\theta)\cos\theta - (-2\omega\dot{x}\sin\theta)\sin\theta)$$

$$\dddot{x} = 2\omega g\cos\theta - 4\omega^2\dot{x}$$

On reconnait là l'équation d'un oscillateur harmonique avec une fréquence 2ω, plus un terme constant. La solution particulière est $\dot{x} = \frac{g}{2\omega}\cos\theta$. La solution générale est $\dot{x} = A\cos(2\omega t) + B\sin(2\omega t)$. À $t = 0$, l'équation du mouvement nous donne $\ddot{x}(0) = 0$ car $\vec{v} = \vec{0}$. En utilisant les conditions initiales $\dot{x}(0) = \ddot{x}(0) == 0$, on obtient donc

$$\dot{x} = \frac{g\cos\theta}{2\omega}(1 - \cos 2\omega t)$$

Pour trouver $x(t)$, il nous suffit d'intégrer cette expression et d'utiliser $x(0) = 0$:

$$x(t) = \frac{g}{2\omega}\cos\theta\left(t - \frac{\sin(2\omega t)}{2\omega}\right).$$

h) Nous pouvons maintenant utiliser les autres équations du mouvement :

$$\ddot{y} = -2\omega\dot{x}\sin\theta \Leftrightarrow \ddot{y} = -g\cos\theta(1 - \cos 2\omega t)\sin\theta$$

Une première intégration et $\dot{y}(0) = 0$ nous donne

$$\dot{y} = -\frac{g\sin 2\theta}{2}(t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega}).$$

Une seconde intégration et $y(0) = 0$ nous donne finalement :

$$y(t) = -\frac{g\sin 2\theta}{2}(\frac{t^2}{2} + \frac{\cos 2\omega t - 1}{4\omega^2}).$$

De la même facon, on obtient

$$\ddot{z} = -g + g\cos^2\theta(1 - \cos 2\omega t)$$

$$\dot{z} = -gt + g\cos^2\theta(t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega})$$

$$z(t) = -g\frac{t^2}{2} + g\cos^2\theta(\frac{t^2}{2} + \frac{\cos 2\omega t - 1}{4\omega^2}).$$

i) La durée de la chute reste de l'ordre de quelques secondes. On est donc dans un cas où $\omega t \ll 1$. En utilisant les formules données dans l'énoncé, on obtient :

$$x(t) \approx \frac{g}{2\omega}\cos\theta\frac{(2\omega t)^3}{12\omega} = \frac{t^3}{3}g\omega\cos\theta.$$

On retrouve bien le résultat précédent.

Pour $z(t)$, on obtient :

$$z(t) \approx -g\frac{t^2}{2} + g\cos^2\theta\frac{(2\omega t)^4}{96\omega^2} = -g\frac{t^2}{2} + g\omega^2\cos^2\theta\frac{t^4}{6}.$$

À nouveau, on vérifie que le terme dominant correspond bien à celui que l'on avait trouvé au préalable. Pour trouver le nouveau temps de chute t_*, on résoud le polynome d'ordre 2 :

$$\Delta = \frac{g^2}{4} - \frac{gh\omega^2}{6}\cos^2\theta$$

$$t_*^2 = \frac{6}{g\omega^2\cos^2\theta}\left(\frac{g}{2} - \sqrt{\Delta}\right) \approx 5.68s.$$

Le temps de chute a en fait changé de $1e-7s$, ce qui est largement négligeable.

Enfin le déplacement sur l'axe nord-sud est donné par :

$$y(t) \approx -\frac{g\sin 2\theta}{2}\frac{(2\omega t)^4}{96\omega^2} = -\frac{g\omega^2\sin 2\theta}{2}\frac{t^4}{6}.$$

Dans l'hémisphère nord, ce déplacement a lieu vers le sud, alors qu'il est vers le nord dans l'hémisphère sud. A la fin de la chute, $y = -8.97\times10^{-6}m$. Ce déplacement est largement négligeable, et très différent de la valeur observée. Celle-ci est probablement due à une erreur lors de l'expérience.