22 novembre 2023 *version 1*

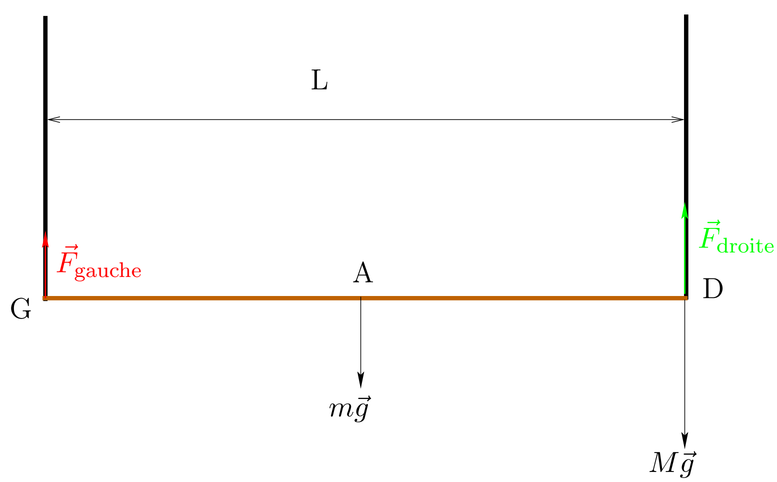
Corrigé Série 10 : Problème à deux corps, centre de masse

Questions conceptuelles

a) Le système formé de la nacelle et de Firmin étant à l'équilibre statique, la somme des forces et la somme des moments des forces (par rapport à n'importe quel point du référentiel) doivent toutes deux être nulles. Dans les trois situations décrites dans l'énoncé, toutes les forces qui s'appliquent sur le système sont verticales : il s'agit du poids de la nacelle $m\vec{g}$ et du poids de Firmin $M\vec{g}$, dirigés vers le bas, et des deux forces de soutien des câbles $\vec{F}_{\text{gauche}}$ et $\vec{F}_{\text{droite}}$, dirigées vers le haut et mesurées par les dynamomètres. Comme on doit avoir $M\vec{g} + m\vec{g} + \vec{F}_{\text{gauche}} + \vec{F}_{\text{droite}} = 0$, la force du dynamomètre de droite vaut toujours $F_{\text{droite}} = Mg + mg - F_{\text{gauche}}$.
Lorsque Firmin est situé au centre de la nacelle, les forces exercées par les câbles sont égales par symétrie. Le dynanomètre du côté droit doit alors indiquer, comme à gauche, $F_{\text{droite}} = F_{\text{gauche}} = 600$ N. On peut également s'en convaincre en posant que la somme des moments des forces par rapport à un point au milieu de la nacelle vaut zéro. A ce stade on sait alors que la somme des poids vaut $Mg + mg = F_{\text{gauche}} + F_{\text{droite}} = 600 + 600 = 1200$ N.
Lorsque le dynamomètre de gauche indique 400 N, celui de droite doit indiquer $F_{\text{droite}} = Mg + mg - F_{\text{gauche}} = 1200 - 400 = 800$ N.
Lorsque le dynamomètre de gauche indique 200 N, celui de droite doit indiquer $F_{\text{droite}} = Mg + mg - F_{\text{gauche}} = 1200 - 200 = 1000$ N.
Posons maintenant que la somme des moments des forces par rapport au point d'attache du câble de droite sur la nacelle est nulle (voir figure) :

$$\Sigma\vec{M}_D = \vec{0} = \underbrace{\overrightarrow{DD} \wedge \vec{F}_{\text{droite}}}_{0} + \underbrace{\overrightarrow{DD} \wedge M\vec{g}}_{0} + \underbrace{\overrightarrow{DA} \wedge m\vec{g}}_{mgL/2} + \underbrace{\overrightarrow{DG} \wedge \vec{F}_{\text{gauche}}}_{-F_{\text{gauche}}L},$$

étant donné que les forces $M\vec{g}$ et $\vec{F}_{\text{droite}}$ n'ont pas de moment par rapport à ce point. On a donc $mg = 2F_{\text{gauche}}$.
Finalement, le poids de l'échafaudage vaut ainsi $mg = 400$ N et celui de Firmin $Mg = 1200 - 400 = 800$ N.



b) Au moment du passage au-dessus de la barre, la position du corps du sauteur est telle que son centre de masse peut être en dehors du volume de son corps. Il est donc possible que son centre de masse soit au niveau ou même en dessous de la barre. On remarquera que si la barre est remplacée par un mur, alors le centre de masse pourrait passer "à travers" le mur.

Durant le saut, et en négligeant les frottements de l'air, le poids du sauteur est la seule force extérieure. La trajectoire du centre de masse suit un mouvement balistique, qui est donc une parabole. Les videos suivantes illustrent la situation :

`https://www.youtube.com/watch?v=XBtBdNHBNSI`

`https://www.youtube.com/watch?v=RaGUW1d0w8g`

c) Si on lâche une bille, celle-ci acquiert une vitesse finie, et est donc soumis à la force de Coriolis en plus de la force gravitationnelle et de la force centrifuge. Pour mesurer précisément le champ de pesanteur effectif, il faut donc utiliser un fil à plomb immobile.

1 L'échelle

On considère le <u>système</u> échelle, vu du <u>référentiel</u> du sol et du mur. On choisit un <u>repère</u> cartésien avec l'axe x horizontal et l'axe y vertical, comme indiqué sur le dessin.

Les forces qui s'appliquent sur l'échelle sont

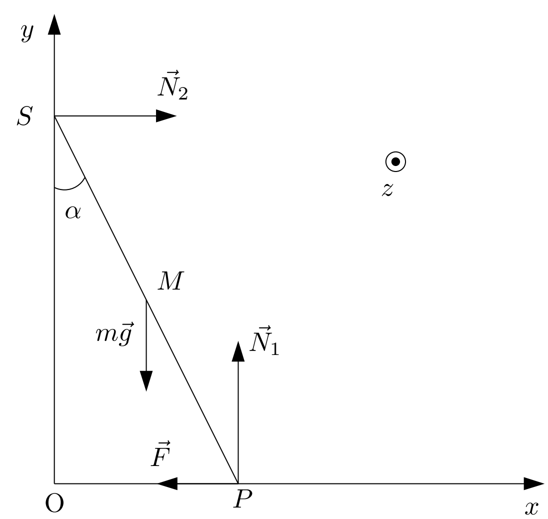
— Son poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\hat{e}_y$, vertical, dirigé vers le bas. Son point d'application est au centre de masse (milieu) de l'échelle.

— La force de soutien du sol $\vec{N}_1 = N_1\hat{e}_y$, perpendiculaire au sol.

— La force de soutien du mur $\vec{N}_2 = N_2\hat{e}_x$, perpendiculaire au mur.

— La force de frottement entre le pied de l'échelle et le sol $\vec{F}$, parallèle au sol. Elle est dirigée vers la gauche car le pied de l'échelle tend à glisser vers la droite : $\vec{F} = -F\hat{e}_x$ s'oppose à cette glissade.

A noter que mg, N_1, N_2 et F désignent les normes des vecteurs correspondants.



Lorsque $\alpha < \alpha_{\text{max}}$, le sytème est à l'équilibre, la deuxième équation de Newton s'écrit : $m\vec{g}+\vec{N}_1+\vec{N}_2+\vec{F} = 0$. En projection sur le repère Oxy du dessin, on a

$$\text{Sur } x : -F + N_2 = 0 \tag{1}$$
$$\text{Sur } y : N_1 - mg = 0 \tag{2}$$

Les équations (1) et (2) forment un système de 2 équations à 3 inconnues. Pour résoudre complètement le problème, il faut également utiliser le théorème du moment cinétique

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \Sigma\vec{M}_O.$$

Ici l'échelle est immobile, on a simplement $\Sigma\vec{M}_O = \vec{0}$. Un moment de force est défini par rapport à un point quelconque du référentiel. Un choix possible est le milieu de l'échelle M. Dans ce cas, la somme des moments s'écrit

$$\Sigma\vec{M}_M = \overrightarrow{MP} \wedge \vec{N}_1 + \overrightarrow{MP} \wedge \vec{F} + \overrightarrow{MS} \wedge \vec{N}_2 \tag{3}$$

où $\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{MS}$ désignent les vecteurs allant respectivement du milieu de l'échelle à son pied et à son sommet ; la norme de ces deux vecteurs est $\frac{L}{2}$. Tous les vecteurs entrant en jeu dans (3) sont dans le plan contenant l'échelle et le mur (le plan de la feuille sur notre dessin). Le moment de chaque force, et donc la somme des moments, est orthogonal à ce plan, et donc parallèle à l'axe z.
Rappel : soit $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$, la norme de $\vec{w}$ est donnée par $||\vec{w}|| = ||\vec{u}||.||\vec{v}|| \sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$. On a

$$\begin{aligned}\Sigma M_M &= -\frac{L}{2}N_2 \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) - \frac{L}{2}F \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) + \frac{L}{2}N_1 \sin\alpha \\ &= \frac{L}{2}\left[-N_2 \cos\alpha - F\cos\alpha + N_1 \sin\alpha\right] = 0.\end{aligned}$$

Le signe de chaque terme est donné par la règle de la main droite. En utilisant les relations (1) et (2), on obtient

$$\Sigma M_M = \frac{L}{2}\left[-F\cos\alpha - F\cos\alpha + mg\sin\alpha\right] = -LF\cos\alpha + \frac{L}{2}mg\sin\alpha = 0$$

$$\Rightarrow F = \frac{mg\tan\alpha}{2}. \tag{4}$$

Ceci reste vrai tant que

$$F < F^{\max} = \mu N_1,$$

auquel cas le pied de l'échelle se met à glisser. A la limite, on a

$$F^{\max} = \frac{mg\tan\alpha_{\max}}{2} = \mu mg$$

$$\Rightarrow \alpha_{\max} = \arctan(2\mu). \tag{5}$$

Remarque : on arrive au même résultat, en prenant un autre point de référence pour le calcul des moments. Par exemple, la somme des moments calculés par rapport au point P du pied de l'échelle nous donne

$$\Sigma\vec{M}_P = \overrightarrow{PM} \wedge m\vec{g} + \overrightarrow{PS} \wedge \vec{N}_2. \tag{6}$$

La projection sur l'axe z est

$$\Sigma M_P = \frac{L}{2}mg\sin\alpha - LN_2\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = 0, \tag{7}$$

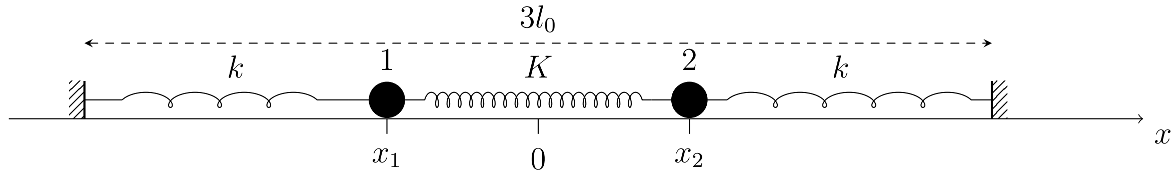
qui devient, en utilisant l'équation (1),

$$F = \frac{mg\tan\alpha}{2}.$$

Nous avons donc obtenu le même résultat que (4), bien que les forces qui contribuent à un moment non nul ne soient pas les mêmes.

2 Oscillateur couplé

On choisit un repère tel que l'axe x est parallèle au rail, et on place l'origine à mi-distance entre les points fixes des ressorts de constante de rappel k.



Sans le ressort de raideur K, les 2 masses se comportent comme 2 oscillateurs harmoniques indépendants de pulsation $\sqrt{\frac{k}{m}}$. C'est le ressort de raideur K qui introduit le couplage entre les deux masses.

a) Les équations du mouvement pour les points matériels, numérotés 1 et 2, sont

$$m\ddot{x}_1 = -k\left(x_1 - \left(-\frac{l_0}{2}\right)\right) - K\left(x_1 - (x_2 - l_0)\right)$$

$$\Rightarrow \quad m\ddot{x}_1 = -k\left(x_1 + \frac{l_0}{2}\right) + K(x_2 - x_1 - l_0)\,, \tag{8}$$

et

$$m\ddot{x}_2 = -k\left(x_2 - \frac{l_0}{2}\right) - K\left(x_2 - (x_1 + l_0)\right)$$

$$\Rightarrow \quad m\ddot{x}_2 = -k\left(x_2 - \frac{l_0}{2}\right) - K(x_2 - x_1 - l_0)\,. \tag{9}$$

b) Le centre de masse du système est défini par

$$X_{\rm G} = \frac{mx_1 + mx_2}{m+m} = \frac{x_1 + x_2}{2} \Rightarrow \ddot{X}_{\rm G} = \frac{\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2}{2}\,,$$

et la coordonnée relative entre les points matériels est

$$u = x_2 - x_1 \Rightarrow \ddot{u} = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1\,.$$

En calculant la somme des équations (8) et (9), on obtient

$$m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = -k(x_1 + x_2) \Rightarrow m\ddot{X}_{\rm G} = -kX_{\rm G} \Rightarrow \ddot{X}_{\rm G} + \frac{k}{m}X_{\rm G} = 0\,, \tag{10}$$

qui est l'équation du mouvement du centre de masse.
En calculant la différence entre les équations (9) et (8), on obtient

$$m(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) = -k(x_2 - x_1 - l_0) - 2K(x_2 - x_1 - l_0)\,,$$

d'où l'on trouve

$$m\ddot{u} = -(k + 2K)(u - l_0) \Rightarrow \ddot{u} + \frac{k + 2K}{m}(u - l_0) = 0\,, \tag{11}$$

qui est l'équation du mouvement relatif.

c) On remarque que les deux équations du mouvement (10) et (11) sont des équations d'oscillateurs harmoniques de pulsations $\omega_{\rm G} = \sqrt{\frac{k}{m}}$ pour le centre de masse, et $\omega_u = \sqrt{\frac{k+2K}{m}}$ pour le mouvement relatif.

La solution générale pour l'équation du mouvement du centre de masse est donc

$$X_{\mathrm{G}}(t) = A_{\mathrm{G}} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi_{\mathrm{G}}\right) ,$$

et pour le mouvement relatif

$$u(t) = A_u \cos\left(\sqrt{\frac{k+2K}{m}}t + \phi_u\right) + l_0 \, .$$

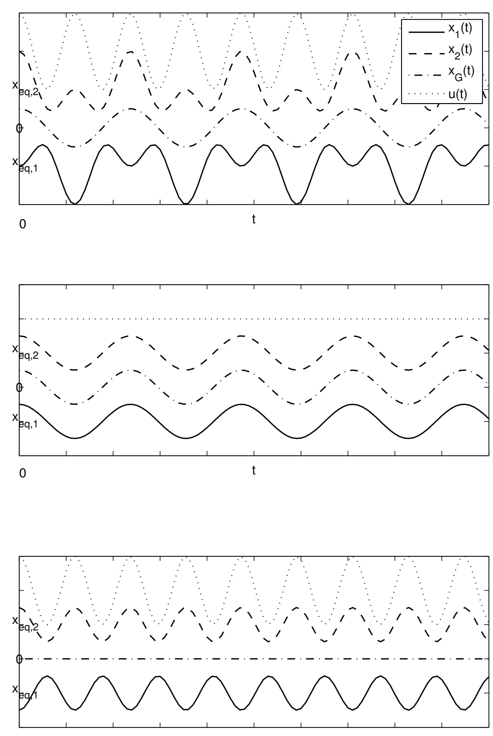
Le mouvement des points matériels, $x_1(t)$ et $x_2(t)$, est alors donné par

$$x_1(t) = X_{\mathrm{G}} - \frac{u}{2} = A_{\mathrm{G}} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi_{\mathrm{G}}\right) - \frac{1}{2}A_u \cos\left(\sqrt{\frac{k+2K}{m}}t + \phi_u\right) - \frac{l_0}{2} ,$$

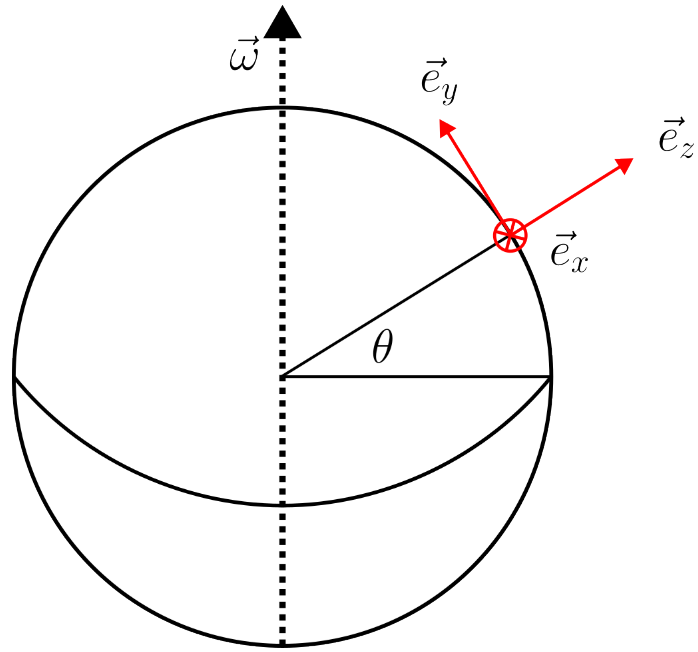
et

$$x_2(t) = X_{\mathrm{G}} + \frac{u}{2} = A_{\mathrm{G}} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi_{\mathrm{G}}\right) + \frac{1}{2}A_u \cos\left(\sqrt{\frac{k+2K}{m}}t + \phi_u\right) + \frac{l_0}{2} .$$

d) Si la coordonnée relative reste constante, cela veut dire que la distance entre les 2 masses ne change pas au cours du temps. Cette situation correspond à une condition initiale telle que $A_u = 0$, et donc $u(t) = l_0$. Dans ce cas-là, les masses oscillent *en phase* avec une pulsation $\omega_G = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Cette situation est observée si les 2 masses sont écartées de leur position d'équilibre de la même distance et *dans la même direction* avant d'être lâchées.
Le cas particulier où le centre de masse est immobile correspond à une condition initiale telle que $A_G = 0$, et on a alors $X_G(t) = 0$. Dans ce cas-là, les deux masses oscillent en *opposition de phase* à la pulsation $\omega_u = \sqrt{\frac{k+2K}{m}}$. Ce mouvement est observé si les deux masses sont écartées de leur position d'équilibre d'une même distance et *dans des directions opposées* avant d'être lâchées.
La figure ci-contre illustre l'évolution des différentes positions pour un cas général et les 2 cas particuliers.



3 Déviation vers l'est



a) Le référentiel lié à la Terre n'est pas galiléen, mais en rotation autour de l'axe Nord-Sud. Les forces s'exercant sur le mobile sont donc :
— La force de gravité $\vec{P} = -mg\vec{e}_z$.
— La force centrifuge $\vec{F}_{\text{cen}} = m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})$.
— La force de Coriolis $\vec{F}_{\text{cor}} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}$.

b) Un ordre de grandeur de ω est $\omega = \frac{2\pi}{24\times 3600} s^{-1} = 7.27 \times 10^{-5} s^{-1}$. L'amplitude de la force centrifuge est donc au mieux de $\omega^2 R_T \approx 0.034 ms^{-2} \ll g$. On peut donc la négliger dans un premier temps.

c) Si on néglige la force de Coriolis, l'objet se déplace uniquement dans la direction $\vec{e}_z$. Si la vitesse est donnée par $\vec{v} = \dot{z}\vec{e}_z$, la force de Coriolis est alors

$$-2m\vec{\omega} \wedge \dot{z}\vec{e}_z = -2m\omega\dot{z}\cos\theta\vec{e}_x.$$

* Au vu des conditions initiales, la latitude est donc conservée au cours du mouvement. Les équations du mouvement sont données par

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -2m\omega\dot{z}\cos\theta \\ m\ddot{y} = 0 \\ m\ddot{z} = -mg \end{cases}$$

d) Résolvons d'abord l'équation du mouvement selon z. On a :

$$z(t) = -\frac{g}{2}t^2 + \dot{z}(0)t + z(0)$$

$$z(t) = -\frac{g}{2}t^2$$

Le mobile a chuté de h a un temps $t_h = \sqrt{\frac{2h}{g}}$.

Maintenant, dans la direction x, on obtient $m\ddot{x} = 2m\omega\cos\theta gt$. Un première intégration (en utilisant $\dot{x}(0) = 0$) nous donne

$$\dot{x} = g\omega\cos\theta t^2.$$

Une seconde intégration donne

$$x(t) = \frac{1}{3}g\omega\cos\theta t^3.$$

Au moment où l'objet a atteint la profondeur h, on a donc

$$x = \frac{1}{3}\omega g\left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{3}{2}}\cos\theta.$$

L'objet s'est bien déplacé vers l'est (quelque soit notre hémisphère de départ).

e) Le temps de chute est égal à

$$t_h = \sqrt{\frac{2h}{g}} \approx 5.68s.$$

La vitesse angulaire est égale à $7.27 \times 10^{-5}s^{-1}$. Ensemble, on obtient finalement

$$x(t) = \frac{1}{3}g\omega\cos\theta t^3 \approx 0.0435\cos\theta m \approx 2.74cm.$$

La vitesse maximale de la masse est atteinte au moment de l'impact au sol.

$$\dot{z} = -gt \approx 55.7ms^{-1}$$

$$\dot{x} = g\omega\cos\theta t^2 \approx 0.023\cos\theta ms^{-1} \approx 0.0145ms^{-1}.$$

La vitesse dans la direction $\vec{e}_x$ est donc bien négligeable comparée à la vitesse verticale.

Compléments de cours, hors programme

f) La force de Coriolis est maintenant donnée par

$$\vec{F}_{\text{cor}} = -2m\omega \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = -2m\omega \begin{pmatrix} \dot{z}\cos\theta - \dot{y}\sin\theta \\ \dot{x}\sin\theta \\ -\dot{x}\cos\theta \end{pmatrix}$$

Les équations du mouvement sont alors données par

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -2m\omega(\dot{z}\cos\theta - \dot{y}\sin\theta) \\ m\ddot{y} = -2m\omega\dot{x}\sin\theta \\ m\ddot{z} = -mg + 2m\omega\dot{x}\cos\theta \end{cases}$$

g) On dérive la première équation du mouvement :

$$\dddot{x} = -2\omega(\ddot{z}\cos\theta - \ddot{y}\sin\theta)$$

On peut alors utiliser les deux autres équations pour obtenir :

$$\dddot{x} = -2\omega((-g + 2\omega\dot{x}\cos\theta)\cos\theta - (-2\omega\dot{x}\sin\theta)\sin\theta)$$

$$\dddot{x} = 2\omega g\cos\theta - 4\omega^2\dot{x}$$

On reconnait là l'équation d'un oscillateur harmonique avec une fréquence 2ω, plus un terme constant. La solution particulière est $\dot{x} = \frac{g}{2\omega}\cos\theta$. La solution générale est $\dot{x} = A\cos(2\omega t) + B\sin(2\omega t)$. À $t = 0$, l'équation du mouvement nous donne $\ddot{x}(0) = 0$ car $\vec{v} = \vec{0}$. En utilisant les conditions initiales $\dot{x}(0) = \ddot{x}(0) == 0$, on obtient donc

$$\dot{x} = \frac{g\cos\theta}{2\omega}(1 - \cos 2\omega t)$$

Pour trouver $x(t)$, il nous suffit d'intégrer cette expression et d'utiliser $x(0) = 0$:

$$x(t) = \frac{g}{2\omega}\cos\theta\left(t - \frac{\sin(2\omega t)}{2\omega}\right).$$

h) Nous pouvons maintenant utiliser les autres équations du mouvement :

$$\ddot{y} = -2\omega\dot{x}\sin\theta \Leftrightarrow \ddot{y} = -g\cos\theta(1-\cos 2\omega t)\sin\theta$$

Une première intégration et $\dot{y}(0) = 0$ nous donne

$$\dot{y} = -\frac{g\sin 2\theta}{2}(t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega}).$$

Une seconde intégration et $y(0) = 0$ nous donne finalement :

$$y(t) = -\frac{g\sin 2\theta}{2}(\frac{t^2}{2} + \frac{\cos 2\omega t - 1}{4\omega^2}).$$

De la même facon, on obtient

$$\ddot{z} = -g + g\cos^2\theta(1-\cos 2\omega t)$$
$$\dot{z} = -gt + g\cos^2\theta(t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega})$$
$$z(t) = -g\frac{t^2}{2} + g\cos^2\theta(\frac{t^2}{2} + \frac{\cos 2\omega t - 1}{4\omega^2}).$$

i) La durée de la chute reste de l'ordre de quelques secondes. On est donc dans un cas où $\omega t \ll 1$. En utilisant les formules données dans l'énoncé, on obtient :

$$x(t) \approx \frac{g}{2\omega}\cos\theta\frac{(2\omega t)^3}{12\omega} = \frac{t^3}{3}g\omega\cos\theta.$$

On retrouve bien le résultat précédent.

Pour $z(t)$, on obtient :

$$z(t) \approx -g\frac{t^2}{2} + g\cos^2\theta\frac{(2\omega t)^4}{96\omega^2} = -g\frac{t^2}{2} + g\omega^2\cos^2\theta\frac{t^4}{6}.$$

À nouveau, on vérifie que le terme dominant correspond bien à celui que l'on avait trouvé au préalable. Pour trouver le nouveau temps de chute t_*, on résoud le polynome d'ordre 2 :

$$\Delta = \frac{g^2}{4} - \frac{gh\omega^2}{6}\cos^2\theta$$

$$t_*^2 = \frac{6}{g\omega^2\cos^2\theta}\left(\frac{g}{2} - \sqrt{\Delta}\right) \approx 5.68s.$$

Le temps de chute a en fait changé de $1e-7s$, ce qui est largement négligeable.

Enfin le déplacement sur l'axe nord-sud est donné par :

$$y(t) \approx -\frac{g\sin 2\theta}{2}\frac{(2\omega t)^4}{96\omega^2} = -\frac{g\omega^2\sin 2\theta}{2}\frac{t^4}{6}.$$

Dans l'hémisphère nord, ce déplacement a lieu vers le sud, alors qu'il est vers le nord dans l'hémisphère sud. A la fin de la chute, $y = -8.97\times10^{-6}m$. Ce déplacement est largement négligeable, et très différent de la valeur observée. Celle-ci est probablement due à une erreur lors de l'expérience.