

Corrigé Pré Test 2 - Dérivée

15 novembre 2023

Exercice 1. (7 points)

À l'aide de la définition de continuité avec ε et δ , montrer que la fonction inverse $f(x) = \frac{1}{x}$ est continue en tout point de son ensemble de définition.

$$ED(f) = \mathbb{R}^*.$$

f est continue en a si $\forall \varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, posons $u = \frac{a}{2}$ et travaillons dans l'intervalle $I =]a - u; a + u[$.

$$\text{On veut pour tout } x \text{ dans } I, |f(x) - f(a)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right| = \left| \frac{a - x}{ax} \right| < \frac{\delta}{ax} \stackrel{x > a - u > 0}{<} \frac{\delta}{a(a - u)} = \varepsilon.$$

Ainsi, avec $\delta = \varepsilon \cdot a(a - u)$, la définition de la continuité est vérifiée.

Pour $a \in \mathbb{R}_-^*$, on pose $u = \left| \frac{a}{2} \right|$. On a alors $I =]a - u; a + u[\subset \mathbb{R}_-^*$.

Par suite, $\delta = \varepsilon \cdot a(a + u)$ car $|x| > |a + u|$ et $a < a + u$, $\Rightarrow a(a + u) > 0$.

Exercice 2. (3 + 4 + 4 + 1 = 12 points)

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$\text{a) } f(x) = \left(\frac{x - 1}{3x + 2} \right)^\pi$$

$$f'(x) = \pi \left(\frac{x - 1}{3x + 2} \right)^{\pi - 1} \frac{1 \cdot (3x + 2) - (x - 1) \cdot 3}{(3x + 2)^2} = \pi \left(\frac{x - 1}{3x + 2} \right)^{\pi - 1} \frac{5}{(3x + 2)^2} = \frac{5\pi(x - 1)^{\pi - 1}}{(3x + 2)^{\pi + 1}}.$$

$$\text{b) } g(x) = \frac{(2x - 1)^3}{(5x + 1)^4}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{3 \cdot (2x - 1)^2 \cdot 2 \cdot (5x + 1)^4 - (2x - 1)^3 \cdot 4 \cdot (5x + 1)^3 \cdot 5}{(5x + 1)^8} \\ &= \frac{2(2x - 1)^2(5x + 1)^3[3(5x + 1) - 10(2x - 1)]}{(5x + 1)^8} = \frac{2(2x - 1)^2(-5x + 13)}{(5x + 1)^5}. \end{aligned}$$

$$\text{c) } h(x) = 3\sqrt{2 \sin x \cos x}$$

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left(3(2 \sin(x) \cos(x))^{\frac{1}{2}} \right)' = 3 \cdot \frac{1}{2} (2 \sin(x) \cos(x))^{-\frac{1}{2}} \cdot (2 \cos(x)^2 - 2 \sin(x)^2) \\ &= 3 \frac{\cos(x)^2 - \sin(x)^2}{\sqrt{2 \cos(x) \sin(x)}} = \frac{3(\cos(x) + \sin(x))(\cos(x) - \sin(x))}{\sqrt{2 \cos(x) \sin(x)}} \quad \text{ou encore} \quad \frac{3 \cos(2x)}{\sqrt{\sin(2x)}}. \end{aligned}$$

$$\text{d) } i(x) = \ln(x - x^2) \quad i'(x) = \frac{1 - 2x}{x - x^2} = \frac{1 - 2x}{x(1 - x)}.$$

Exercice 3. ($4 + 2 + 1 + 3 + 2 = 12$ points)

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - \sin(2x)}{x - \sin x}$;

En utilisant trois fois la règle de Bernoulli-L'Hospital, on voit que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - \sin(2x)}{x - \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x - 2 \cos(2x)}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin x + 4 \sin(2x)}{\sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \cos x + 8 \cos(2x)}{\cos x} = 6. \end{aligned}$$

b) $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sin x}{1 - \cos x}$;

Ici, on peut évaluer la fonction $\frac{\sin x}{1 - \cos x}$ au point $x = \pi$. Ainsi, par continuité, on a

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sin x}{1 - \cos x} = \frac{\sin \pi}{1 - \cos \pi} = \frac{0}{1 - (-1)} = 0.$$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \cdot \ln(x^4)$; $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \ln(x^4) = \infty$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 3x + 1) \cdot e^x$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3x + 1}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 3}{-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{e^{-x}} = 0.$

e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x^2 - 3)}{x - 2}$ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x^2 - 3)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x}{x^2 - 3} = 4$

Exercice 4. (3 + 4 + 7 + 4 = 18 points) partiellement repris de Burier juin 2022

On considère la fonction f donnée par

$$f(x) = (x - 3) \cdot e^{\sqrt{x}}$$

a) Déterminer l'ensemble de définition et le signe de f .

$$ED(f) = \mathbb{R}_+, \quad \text{zéro de } f : x - 3 = 0 \iff x = 3$$

Signe :

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$	
$f(x)$			-	0	+

b) Déterminer les éventuelles asymptotes de f .

AV : pas de trou ni de bord ouvert dans l'ED de $f \Rightarrow$ pas d'AV.

$$\text{AH : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = (+\infty)(+\infty) = +\infty \Rightarrow \text{pas d'AH}$$

$$\text{AO : } m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-3}{x} \cdot e^{\sqrt{x}} = 1(+\infty) = +\infty \Rightarrow \text{pas d'AO.}$$

c) Montrer que $f'(x) = \frac{(2\sqrt{x} + x - 3) \cdot e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$ et étudier la croissance de f .

$$f'(x) = 1 \cdot e^{\sqrt{x}} + (x-3) \cdot e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x} \cdot e^{\sqrt{x}} + (x-3) \cdot e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} = \frac{(2\sqrt{x} + x - 3) \cdot e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$

$$ED(f') = \mathbb{R}_+^*$$

$$\text{zéro de } f' : 2\sqrt{x} + x - 3 = 0 \xrightarrow{x=y^2} 2y + y^2 - 3 = 0 \iff (y+3)(y-1) = 0 \Rightarrow x = \sqrt{y} = 1$$

r	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$			-	0	+
$f(x)$			MIN(1; -2e)		

d) Sachant que $f''(x) = \frac{(x\sqrt{x} + 3x - 3\sqrt{x} + 3) \cdot e^{\sqrt{x}}}{4x\sqrt{x}}$, étudier la courbure de f .

$$ED(f'') = \mathbb{R}_+^*$$

zéro de f'' : comme $e^{\sqrt{x}} > 0$ et $x\sqrt{x} > 0 \forall x \in ED(f'') = \mathbb{R}_+^*$, f'' ne s'annule que si

$$x\sqrt{x} + 3x - 3\sqrt{x} + 3 = 0 \xrightarrow{x=y^2} g(y) = y^3 + 3y^2 - 3y + 3 = 0.$$

Montrons que g ne s'annule jamais et est toujours positive sur \mathbb{R}_+^* :

$$g'(y) = 3y^2 + 6y - 3 = 3(y^2 + 2y - 1) \text{ s'annule en } y = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

y	$-\infty$	0	$-1 + \sqrt{2}$	$+\infty$	
$g'(y)$			-	0	+
$g(y)$			MIN		

Ainsi g atteint son minimum sur \mathbb{R}_+^* en $-1 + \sqrt{2}$.

Or, $g(-1 + \sqrt{2}) > -3(-1 + \sqrt{2}) + 3 > 0$, donc g est toujours positive sur \mathbb{R}_+^*

Par suite f'' est aussi positive sur \mathbb{R}_+^* , donc f est convexe.

On peut également montrer que $x\sqrt{x} + 3x - 3\sqrt{x} + 3 > 0$ sur \mathbb{R}_+ en constatant que :

- si $x \in [0; 1]$, $x\sqrt{x} + 3x - 3\sqrt{x} + 3 \geq -3\sqrt{x} + 3 = 3(1 - \sqrt{x}) \geq 0$ et
- si $x \in [1; +\infty[$, $x\sqrt{x} + 3x - 3\sqrt{x} + 3 \geq 3x - 3\sqrt{x} = 3(x - \sqrt{x}) \geq 0$.

Exercice 5. (4 points)

Calculer la dérivée de la fonction $f(x) = \cos x$ en utilisant la définition de la dérivée.

$$\begin{aligned} \cos(a)' &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos(x) - \cos(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{-2 \sin\left(\frac{x+a}{2}\right) \sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{x - a} = - \lim_{x \rightarrow a} \sin\left(\frac{x+a}{2}\right) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}} \\ &= -\sin(a) \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t)}{t} = -\sin(a) \cdot 1 = -\sin(a) \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} \cos(x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2 \sin\left(\frac{2x+h}{2}\right) \sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h} = - \lim_{h \rightarrow 0} \sin\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} \\ &= -\sin(x) \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t)}{t} = -\sin(x) \cdot 1 = -\sin(x). \end{aligned}$$

Exercice 6. (5 points)

Démontrer la formule de la dérivée d'un produit de fonctions dérivables.

Soit $a \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} (f \cdot g)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(a) + f(x) \cdot g(a) - f(a) \cdot g(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} + g(a) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= f(a) \cdot g'(a) + f'(a) \cdot g(a). \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} (f \cdot g)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f \cdot g)(x+h) - (f \cdot g)(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x+h) \cdot g(x) + f(x+h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x). \end{aligned}$$