Def (dérivée d'ordre n). Si la fonction f' elle-même est dérivable sur $]a,b[$, alors on peut définir la fonction f'' appelée dérivée seconde de f par :

$$f'': \left| \begin{array}{l}]a,b[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto (f')'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f'(x+h)-f'(x)}{h} \end{array} \right. .$$

Par récurrence, si la $(n-1)$ème dérivée de f est définie et dérivable sur $]a,b[$, on définit la fonction $\underbrace{f^{(n)}}_{\text{appelée dérivée n-ième de } f}$ par $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x)$.

Interpretation physique : si $f(t)$ donne la position d'un véhicule sur une route rectiligne au temps t, alors :

- $f'(t)$ est la vitesse de ce véhicule au temps t
- $(f^{(2)}(t) =)$ $f''(t)$ est l'accélération
- $f'''(t) = f^{(3)}(t)$ "à-coup" ou "secousse"

6.2 Dérivabilité implique continuité

Thm : Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.

Preuve : Soit f dérivable en x_0. Alors :

$$\lim_{x\to x_0} f(x)-f(x_0) = \lim_{x\to x_0} (x-x_0)\cdot\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$
$$= \lim_{x\to x_0}(x-x_0)\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$
$$= 0\cdot f'(x_0) = 0$$

Ainsi $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. ∎

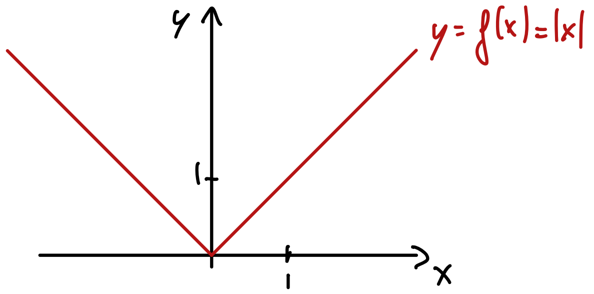
⚠ La réciproque est fausse. **Exemple** :

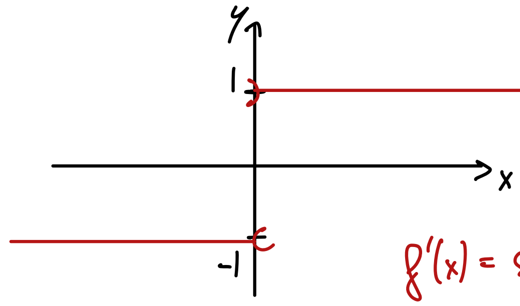
Valeur absolue $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$

- f est continue en $x_0 = 0$: $\lim_{x\to 0}|x| = 0 = |0| = f(0)$
- mais f n'est pas dérivable en 0 :

- $\lim_{x \to 0+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0+} \frac{x}{x} = 1$
- $\lim_{x \to 0-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0-} \frac{-x}{x} = -1$

donc $\lim_{x \to 0} \frac{|x| - |0|}{x - 0}$ n'existe pas.





$f'(x) = \text{sign}(x)$ pour $x \neq 0$

6.3 Formules de dérivées à connaître

$f(x)$	$f'(x)$	$x \in \mathbb{R}$
1 (ou $c \in \mathbb{R}$)	0	
x	1	
x^p, $p \neq 0$	$p \cdot x^{p-1}$	($x \neq 0$ si $p-1 < 0$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	
$\exp(x)$	$\exp(x)$	
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	
$\text{Log}(x)$	$1/x$	$x > 0$
$\text{Arctan}(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	

Rappel : $\begin{cases} \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{cases}$

Exemple :

- $f(x) = x^{1/3}$, $x > 0$

$f'(x) = \frac{1}{3} x^{1/3 - 1} = \frac{1}{3} x^{-2/3}$

$f''(x) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{-2}{3}\right) \cdot x^{-2/3 - 1} = \frac{-2}{9} x^{-5/3}$

- $f(x) = \log(x)$, $x > 0$

$f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$f''(x) = (-1)\, x^{-1-1} = \frac{-1}{x^2}$.

6.4 Opérations sur les dérivées

Prop: Soient $f, g :]a,b[\to \mathbb{R}$ des fonctions dérivables sur $]a,b[$, et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors on a :

- $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$ sur $]a,b[$
- $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ sur $]a,b[$
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$ sur $\{x \in]a,b[\,;\, g(x) \neq 0\}$.

Exemple (dérivée d'un polynôme). Soit $a_k \in \mathbb{R}$ pour $k = 0, \dots, n$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 \cdot x + \dots + a_n \cdot x^n$$

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot k \cdot x^{k-1} = 0 + a_1 + 2a_2 \cdot x + \dots + n \cdot a_n x^{n-1}$$

6.5 Dérivée de la composition (Chain rule)

Thm: Si f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $y = f(x_0)$ alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$.

Exemple: Soit $h(x) = f(-x)$ et f dérivable.
Alors $h = f \circ g$ avec $g(x) = -x$
Donc $h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = -f'(-x)$

Remarque (compositions multiples).

$$(h \circ g \circ f)' = (h \circ (g \circ f))' = (h' \circ g \circ f) \cdot (g \circ f)' = (h' \circ g \circ f) \cdot (g' \circ f) \cdot f'$$

Exemple: $f(x) = \cos\left(\log\left(\sqrt{1+x^2}\right)\right)$, $x \in \mathbb{R}$

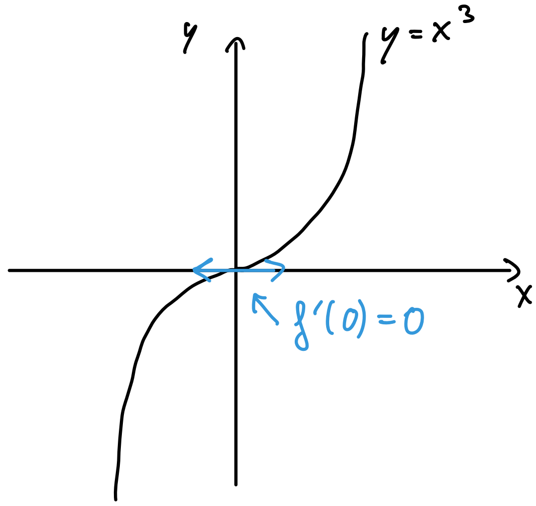
$$f'(x) = -\sin\left(\log\left(\sqrt{1+x^2}\right)\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x$$

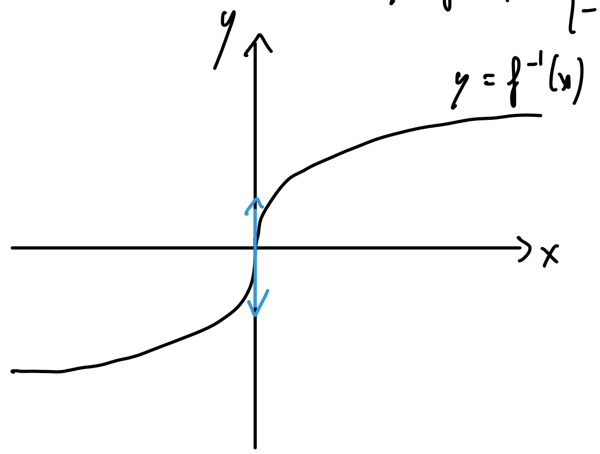
6.6 Dérivée de fonctions réciproques

Thm : La réciproque d'une fonction f injective et dérivable existe et est dérivable sur l'image de tout intervalle I tel que $\forall x \in I$, $f'(x) \neq 0$.

Exemple : $f(x) = x^3$, $D(f) = \mathbb{R}$

$$y = f^{-1}(x) = \begin{cases} x^{1/3} & \text{si } x \geq 0 \\ -(-x)^{1/3} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$





$D(f^{-1}) = \mathbb{R}$

f^{-1} continue sur $\mathbb{R}$

mais $D((f^{-1})') = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Calcul de $(f^{-1})'$:

On utilise $(f \circ f^{-1})(y) = y$, $\forall y \in D(f^{-1})$

On dérive cette égalité des côtés, on obtient :

$$(f \circ f^{-1})'(y) = \begin{cases} f'(f^{-1}(y)) \cdot (f^{-1})'(y) & \leftarrow \text{dérivée d'une composition} \\ 1 & \leftarrow \text{dérivée } y \mapsto y \end{cases}$$

On obtient : $\boxed{\forall y \in D((f^{-1})') \text{ on a } (f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}}$

Exemples : ① $f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$f^{-1}(x) = \log(x)$, $D(f^{-1}) = \mathrm{Im}(f) =]0, +\infty[= \mathbb{R}_+^*$

$$(\log)'(x) = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\exp(\log(x))} = \frac{1}{x}.$$

② $f(x) = \sin(x)$ pour $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\mathrm{Im}(f) = [-1, 1]$.

$f'(x) = \cos(x)$ satisfait $f'(x) \neq 0$ pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

$f^{-1}(x) = \arcsin(x)$ définie sur $[-1, 1]$.

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$$

Or pour $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on a $\cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)}$

donc $$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

Pour résumer, $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ pour $x \in]-1, 1[$ $(= f(]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[))$.

6.7 Dérivabilité sur des intervalles

Def (dérivabilité sur un intervalle fermé). Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}, a < b$.

On dit que :

- f est dérivable à droite en $x_0 \in [a, b[$ si $\lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe $\in \mathbb{R}$

  On note $f'_+(x_0)$ la valeur de cette limite.

- f est dérivable à gauche en $x_0 \in]a, b]$ si $\lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe $\in \mathbb{R}$

  On note $f'_-(x_0)$ la valeur de cette limite.

Prop : f est dérivable $x_0 \in]a, b[$ $\iff$ $\left\{ \begin{array}{l} f \text{ est dérivable à gauche et à} \\ \text{droite en } x_0 \text{ et } f'_+(x_0) = f'_-(x_0) \end{array} \right.$

Def : Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dérivable sur $[a, b]$ ssi :

- f est dérivable sur $]a, b[$, et
- f est dérivable à droite en a et à gauche en b.