Correction examen blanc (Avec exemples de raisonnements)

Question 1 : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{n^2}$ converge si et seulement si

- [ ] $\alpha \geq 0$
- [x] $\alpha < 0$
- [ ] $\alpha < -1$
- [ ] $-1 < \alpha < 0$

Soit $a_n = \left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{n^2}$. On a $\lim_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n} = \lim_{n\to+\infty} \left|1+\frac{\alpha}{n}\right|^n = e^\alpha$ ← vu en cours

Or $e^\alpha \in [0,1[\iff \alpha < 0$ donc la série $\begin{cases} \text{cvge pour } \alpha < 0 \\ \text{diverge pour } \alpha > 0 \end{cases}$ (critère de Cauchy)

Pour $\alpha = 0$, la série est $\sum_{n=1}^{\infty} 1$, qui diverge.

Question 2 : Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $a_n = \dfrac{(n+3)^{1/2} - n^{1/2}}{(n+1)^{-1/2}}$. Alors :

- [ ] $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$
- [ ] $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
- [x] $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{2}$
- [ ] $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

Technique de l'expression conjuguée :

$$a_n = \frac{(n+3)^{1/2} - n^{1/2}}{(n+1)^{-1/2}} \times \frac{(n+3)^{1/2} + n^{1/2}}{(n+3)^{1/2} + n^{1/2}} = \left[(n+3) - n\right] \cdot \frac{(n+1)^{1/2}}{(n+3)^{1/2} + n^{1/2}}$$

$$= 3 \cdot \frac{\sqrt{1+1/n}}{1 + \sqrt{1+3/n}}$$

Or $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{1+1/n} = 1 = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{1+3/n}$ (continuité de racine, ou bien avec des comparaisons)

Donc $\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{3}{2}$

Question 3 : Soit, pour $a_0 \in \mathbb{R}$, la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ définie pour $n \geq 1$ par $a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{2}$.

- [ ] Si $a_0 > 1$, la suite est croissante.
- [ ] Si $a_0 < 1$, la suite est décroissante.
- [ ] Si $a_0 < 0$, $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.
- [x] Si $a_0 = 0$, la suite est convergente.

Il s'agit d'une récurrence linéaire avec $q = \frac{1}{2}$: (a_n) converge vers le point fixe qui est solution de $a = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2} \iff a = 1$

En particulier, si $a_0 = 0$, alors la suite est convergente

[Dans les QCM, il y a toujours exactement une bonne réponse donc ce raisonnement suffit]

Question 4 : Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $B \subset \mathbb{R}$ deux ensembles majorés. Alors :

- [ ] $\text{Sup}(A \cup B) = \min\{\text{Sup}\, A, \text{Sup}\, B\}$
- [ ] $\text{Sup}(A \cup B) = (\text{Sup}\, A) + (\text{Sup}\, B)$
- [x] $\text{Sup}(A \cup B) = \max\{\text{Sup}\, A, \text{Sup}\, B\}$
- [ ] $\text{Sup}(A \cup B) = (\text{Sup}\, A) \cdot (\text{Sup}\, B)$

Prenons $A = \{2\}$ et $B = \{3\}$. Alors $\sup(A \cup B) = \sup\{2, 3\} = 3$.

Mais : • $\min\{\sup A, \sup B\} = 2$ ✗ • $(\sup A) + (\sup B) = 5$ ✗

• $\max\{\sup A, \sup B\} = 3$ ✓ • $(\sup A) \cdot (\sup B) = 6$ ✗

Ceci suffit pour éliminer les 3 mauvaises réponses.

Question 5 : Soit la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ définie par $a_0 = \frac{3}{2}$, et pour $n \geq 1$ par $a_n = 3 - \dfrac{2}{a_{n-1}}$. Alors :

- [ ] la limite $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$ n'existe pas dans $\mathbb{R}$
- [ ] $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 4$
- [x] $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 2$
- [ ] $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 1$

Si la suite converge, alors la limite ℓ satisfait : $\ell = 3 - \dfrac{2}{\ell} \iff \ell^2 - 3\ell + 2 = 0 \iff \left\{\begin{array}{l} \ell = 1 \\ \text{ou} \\ \ell = 2 \end{array}\right.$

On a $a_0 = \frac{3}{2}$, $a_1 = 3 - \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$, $a_2 = 3 - \frac{6}{5} = \frac{9}{5}$

Ceci suggère d'essayer de montrer que (a_n) est croissante et majorée.

Montrons par récurrence $P(n)$: " $1 \leq a_n \leq 2$ "

• $P(0)$ est vraie

• Si $P(n)$ vraie alors $\left.\begin{array}{l} \bullet\ a_n - 2 = 1 - \dfrac{2}{a_{n-1}} = \dfrac{a_{n-1} - 2}{a_{n-1}} \leq 0 \\ \bullet\ a_n - 1 = \dfrac{2(a_{n-1} - 1)}{a_{n-1}} \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow P(n)$ vraie

Donc, par récurrence, $P(n)$ vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Par ailleurs, $a_{n+1} - a_n = 3 - \dfrac{2}{a_n} - a_n = \dfrac{3a_n - 2 - a_n^2}{a_n^2} = \dfrac{-(a_n - 1)(a_n - 2)}{a_n^2} \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Donc (a_n) est croissante et majorée, donc elle converge. Sa limite n'est pas 1 car $1 < a_0$ et (a_n) croissante. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 2$.

Question 6 : Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par

$$a_n = (-1)^n \left(\frac{6n + 8}{2n}\right) - 3 - \frac{4}{n}.$$

Alors :

- [ ] $\liminf\limits_{n \to +\infty} a_n = -3$ et $\limsup\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$
- [ ] $\liminf\limits_{n \to +\infty} a_n = -14$ et $\limsup\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$
- [x] $\liminf\limits_{n \to +\infty} a_n = -6$ et $\limsup\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$
- [ ] $\liminf\limits_{n \to +\infty} a_n = -6$ et $\limsup\limits_{n \to +\infty} a_n = 6$

On a $\lim_{k\to+\infty} a_{2k} = \lim_{k\to+\infty} \left(\frac{12k+8}{4k}\right) - 3 - \frac{2}{k} = 0$

$\lim_{k\to+\infty} a_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} -\frac{12k+14}{4k+2} - 3 - \frac{4}{2k+1} = -6$ $\Leftarrow$ Ceci exclut la 1ère option

Pour éliminer les options dans la colonne de droite, on peut utiliser des comparaisons:

$$a_n \leqslant b_n = \frac{6n+8}{2n} - 3 - \frac{4}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad (\text{exclut } \limsup_{n\to+\infty} a_n = 6)$$

et

$$a_n \geqslant c_n = -\frac{6n+8}{2n} - 3 - \frac{4}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -6 \quad (\text{exclut } \liminf_{n\to+\infty} a_n = -14)$$

(En plus d'exclure les options fausses, ce raisonnement prouve la bonne réponse).

Question 7 : Les nombres complexes $3, 1-2i$, et $1+2i$ sont les racines du polynôme

- [ ] $z^3 + 14z^2 + 15$
- [ ] $z^3 - 2iz^2 + 45$
- [x] $z^3 - 5z^2 + 11z - 15$
- [ ] $z^3 - 5z^2 + 5z + 45$

Comme les options sont de degré 3 et qu'on nous donne 3 racines, la solution est :

$$\begin{aligned} P(z) &= (z-3)(z-(1+2i))(z-(1-2i)) \\ &= (z-3)(z^2-2z+5) \\ &= z^3 - 2z^2 + 5z - 3z^2 + 6z - 15 \\ &= z^3 - 5z^2 + 11z - 15 \end{aligned}$$

Question 8 : Soit, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $a_k = (-1)^k \frac{k+1}{k^2}$, et soit $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Alors :

- [ ] $\lim_{n\to\infty} s_n = -\infty$
- [ ] la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge absolument
- [ ] $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$
- [x] la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, mais ne converge pas absolument

On a $|a_k| = \frac{k+1}{k^2} \geqslant \frac{1}{k}$. Or $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverge, donc $\sum a_n$ ne converge pas absolument.

Mais :
- (a_n) est une suite alternée
- $|a_n| = \frac{k+1}{k^2} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2}$ est décroissante (somme de 2 suites décroissantes).
- $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

Donc par le critère de Leibniz, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge.

Question 9 : Soient $A, B \subset \mathbb{R}$ deux ensembles non vides et bornés. Si $\operatorname{Inf} A \leq \operatorname{Inf} B$ et $\operatorname{Sup} A \geq \operatorname{Sup} B$, alors $B \subset A$.

☐ VRAI ☒ FAUX

Contre exemple : $A = \{-2, 2\}$ et $B = [-1, 1]$.

Alors $-2 = \inf A \leq \inf B = -1$ et $2 = \sup A \geq \sup B = 1$

Mais $A \not\subset B$. (par exemple $0 \in B$ mais $0 \notin A$).

Question 10 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bijective et croissante. Alors la fonction réciproque $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est croissante.

☒ VRAI ☐ FAUX

Supposons f est bijective et croissante.

Soient $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ tels que $y_1 \leq y_2$.

- On sait que $\exists\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$.
- Comme f est croissante et $f(x_1) \leq f(x_2)$, on a que $x_1 \leq x_2$.
- Mais $x_1 = f^{-1}(y_1)$ et $x_2 = f^{-1}(y_2)$

Ainsi $\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, $y_1 \leq y_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1) \leq f^{-1}(y_2)$

On a montré que f^{-1} est croissante.

Question 11 : Si $z \in \mathbb{C}$ est tel que $|z| = 1$, alors $z^5 + \dfrac{1}{z^5}$ est un nombre réel.

☒ VRAI ☐ FAUX

Soit $y = z^5 + \dfrac{1}{z^5} = z^5 + \left(\dfrac{\bar{z}}{|z|}\right)^5 = z^5 + (\bar{z})^5 = z^5 + \left(\overline{z^5}\right) = 2\operatorname{Re}(z^5) \in \mathbb{R}$

[On peut aussi utiliser la forme polaire $z = e^{i\varphi}$, $\varphi \in \mathbb{R}$]

Question 12 : Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres réels non-nuls telle que $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$. Alors $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

☒ VRAI ☐ FAUX

On a $\lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} a_n = 2 \neq 0$. Par la règle de ratio de limites de suites,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_{n+1}}{\lim_{n\to\infty} a_n} = \frac{2}{2} = 1.$$

Question 13 : Soient $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ deux suites de nombres réels telles que les séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ convergent. Alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ converge.

☐ VRAI ☒ FAUX

<u>Contre exemple :</u> $a_n = b_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ pour $n \in \mathbb{N}$

Par le critère de Leibniz, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ convergent (simplement).

Mais $c_n = a_n \cdot b_n = \dfrac{1}{n+1}$ et on sait que $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n}$ diverge.