Cours Euler | 3ème année

Test 2 - Dérivée | 15 novembre 2023

Nom: ______________________ Prénom: ______________________

Le test dure 105 minutes. Les réponses doivent être rédigées de manière claire dans le dossier. Au besoin, il est possible d'utiliser des feuilles supplémentaires. Justifiez tous vos calculs.

Exercice 1. *(7 points)*

À l'aide de la définition de continuité avec ε et δ, montrer que la fonction inverse $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est continue en tout point de son ensemble de définition.

Exercice 2. *(12 points)*

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \left(\dfrac{x-1}{3x+2}\right)^{\pi}$

b) $g(x) = \dfrac{(2x-1)^3}{(5x+1)^4}$

c) $h(x) = 3\sqrt{2\sin x \cos x}$

d) $i(x) = \ln(x - x^2)$

Exercice 3. *(12 points)*

Calculer les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2\sin x - \sin(2x)}{x - \sin x}$;

b) $\displaystyle\lim_{x\to \pi^-} \frac{\sin x}{1 - \cos x}$;

c) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} x^3 \cdot \ln(x^4)$;

d) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} (x^2 + 3x + 1) \cdot e^x$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\ln(x^2-3)}{x-2}$

Exercice 4. *(18 points) partiellement repris de Burier juin 2022*

On considère la fonction f donnée par

$$f(x) = (x-3) \cdot e^{\sqrt{x}}$$

a) Déterminer l'ensemble de définition et le signe de f.

b) Déterminer les éventuelles asymptotes de f.

c) Montrer que $\quad f'(x) = \dfrac{(2\sqrt{x} + x - 3) \cdot e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} \quad$ et étudier la croissance de f.

d) Sachant que $\quad f''(x) = \dfrac{(x\sqrt{x} + 3x - 3\sqrt{x} + 3) \cdot e^{\sqrt{x}}}{4x\sqrt{x}}$, étudier la courbure de f.

Exercice 5. *(4 points)*

Calculer la dérivée de la fonction $f(x) = \cos x$ en utilisant la définition de la dérivée.

Exercice 6. *(5 points)*

Démontrer la formule de la dérivée d'un produit de fonctions dérivables.