Rappels : $\mathbb{C}$ = ensemble des nb complexes.

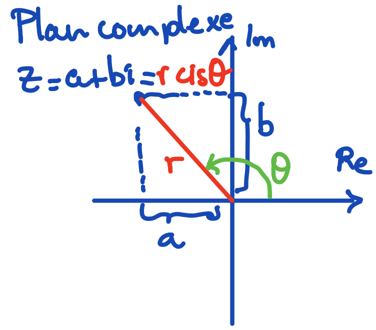
$z \in \mathbb{C}$ s'écrit $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$

$z + z' = (a+a') + i(b+b')$

$z \cdot z' = (a+bi)(a'+b'i) = (aa'-bb') + i(ab'+ba')$

$\bar{z} = a - bi$ $\qquad \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{a+bi} \cdot \dfrac{a-bi}{a-bi} = \dfrac{a-bi}{z \cdot \bar{z}}$

$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$ = carré du module de z.



VI. Exponentielle complexe

$\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z}'$ et $\overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z}'$

On écrit aussi $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ où $r = |z| = \sqrt{z\bar{z}}$

θ est l'argument.

L'année dernière, vous avez fait connaissance avec les nombres complexes. Vous avez appris à les additionner, les multiplier, à en calculer des puissances et des racines n-ème.
Aujourd'hui nous allons étudier formellement l'exponentielle complexe, dont vous avez eu un aperçu, ce qui nous amènera à voir rigoureusement son lien avec la trigonométrie classique. Nous reviendrons ensuite sur les fonctions de trigonométrie hyperbolique pour remarquer les analogies entre le sinus et sa version hyperbolique.
Finalement, nous verrons qu'il est possible de décrire toutes les similitudes du plan à l'aide de fonctions complexes.

1 L'exponentielle d'un nombre complexe

Pour définir l'exponentielle d'un nombre réel x, nous avons utilisé la série de terme $\dfrac{x^n}{n!}$:

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Nous admettons que cette somme infinie converge aussi lorsqu'on remplace le nombre réel x par un nombre complexe z arbitraire.

Définition 1.1. La fonction *exponentielle complexe* $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est définie par

$$e^z = \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

qu'on note aussi e^z.

Pour se rendre compte de la difficulté du calcul de l'exponentielle complexe, regardons un cas où il est aisé de calculer les puissances successives de z.

Exemple 1.2. Lorsque $z = i$, nous savons calculer les puissances i^n pour tout n. En effet,

$i^0 = 1$, $i^1 = i$; $i^2 = -1$; $i^3 = -i$; $i^4 = 1$

Donc $i^{4n} = 1$; $i^{4n+1} = i$; $i^{4n+2} = -1$; $i^{4n+3} = -i$

Ainsi $e^i = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i}{(4n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{(4n+2)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-i}{(4n+3)!}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(4n)!} - \frac{1}{(4n+2)!} \right) + i \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(4n+1)!} - \frac{1}{(4n+3)!} \right)$$

Il se trouve que ces sommes infinies donnent environ $0.540302306 + 0.841470985 \cdot i$.

Comment pouvons-nous essayer de comprendre géométriquement cette exponentielle complexe ? Nous allons d'abord établir quelques formules analogues à celles que nous avons démontrées dans le cas réel.

Proposition 1.3. *Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. Alors*

a) $e^{z+z'} = e^z \cdot e^{z'}$;

b) $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$.

Démonstration. Une fois que nous avons admis que la somme infinie qui définit l'exponentielle a un sens pour les nombres complexes, la preuve de la première formule est identique à celle effectuée dans le cadre réel : l'exponentielle d'une somme est égal au produit des exponentielles. Pour démontrer que le conjugué complexe de l'exponentielle est l'exponentielle du conjugué, il suffit de se rappeler que

$$\forall w, w' \in \mathbb{C}, \qquad 1)\ \overline{w + w'} = \overline{w} + \overline{w'} \qquad , \qquad 2)\ \overline{w \cdot w'} = \overline{w} \cdot \overline{w'} \qquad ,$$

et d'observer que

$$\overline{e^z} \underset{\text{déf}}{=} \overline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}} \underset{1}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{z^n}}{n!} \underset{2}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{z}^n}{n!} = e^{\overline{z}}$$

□

Corollaire 1.4. *Pour tout nombre réel t, le nombre complexe e^{it} est de module 1.*

Démonstration. On calcule

$$|e^{it}|^2 = e^{it} \cdot \overline{e^{it}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{prop. 13.b}}}{=} e^{it} \cdot e^{\overline{it}} = e^{it} \cdot e^{-it} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{prop 1.3 a)}}}{=} e^{it-it} = e^{0} = 1$$

Comme le module est toujours positif, $|e^{it}| = +\sqrt{1} = 1$. □

On sait donc qu'il existe un angle θ tel que $e^{it} = \cos\theta + i\sin\theta$. La partie la plus difficile de cette analyse de l'exponentielle complexe consiste à trouver de quel angle il s'agit. Pour cela il faut soit étudier le développement en séries de Taylor des fonctions réelles, soit connaître mieux la théorie des fonctions complexes. Nous allons donc tricher légèrement...

Théorème 1.5. *Pour tout nombre réel t, on a $e^{it} = \cos t + i\sin t$.*

Démonstration. Considérons la fonction $f(t) = \dfrac{e^{it}}{\cos t + i\sin t}$.

$$f(t) = \frac{e^{it}}{\cos t + i\sin t} \cdot \frac{\cos t - i\sin t}{\cos t - i\sin t} = \underbrace{e^{it}}_{u} \cdot \underbrace{(\cos t - i\sin t)}_{v} \quad \text{car } |\cos t + i\sin t|^2 = 1$$

Ainsi, $f'(t) = e^{it} \cdot i(\cos t - i\sin t) + e^{it}(-\sin t - i\cos t)$

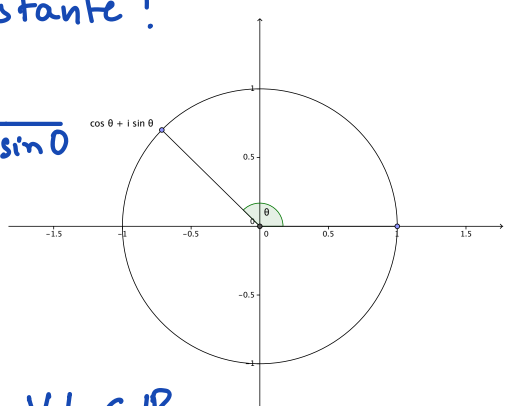
$$= e^{it}(\cancel{i\cos t} - \cancel{i^2\sin t} - \cancel{\sin t} - \cancel{i\cos t}) = 0$$

Donc $f(t)$ est constante !

Comme $f(0) = \dfrac{e^{i0}}{\cos 0 + i\sin 0}$

$= \dfrac{1}{1+i0}$

$= 1$



D'où $f(t) = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Ainsi $e^{it} = \cos t + i\sin t$ est une façon de paramétrer le cercle trigonométrique. □

On en déduit la célèbre formule qui utilise à la fois 0, 1 et e, i et π :

Corollaire 1.6. Formule d'Euler.
On a

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Démonstration. Nous savons que $\cos \pi = -1$ et $\sin \pi = 0$. □

$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 + i\,0 = -1$

2 Le logarithme complexe

La compréhension de l'exponentielle complexe amène aussi des simplifications de notation et de calcul. En effet, un nombre complexe de module r et d'argument t peut s'écrire $z = re^{it}$. D'autre part, si $z = a+bi$, alors $e^z = e^a \cdot e^{bi}$. Puisque les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période 2π, on décide de restreindre le domaine de définition de l'exponentielle à $\mathbb{R} \times [0, 2\pi[$. En effet, si $z = a + bi$ et $w = a + (b + 2k\pi)i$, alors

$e^w = e^a \cdot e^{(b+2k\pi)i} = e^a\left(\cos(b+2k\pi) + i\sin(b+2k\pi)\right)$
$= e^a(\cos b + i\sin b)$
$= e^a \cdot e^{bi} = e^z$

Ainsi, $e^w = e^z$ mais $w \neq z$ si $k \neq 0$.

Soit U la bande horizontale du plan complexe de largeur 2π définie par

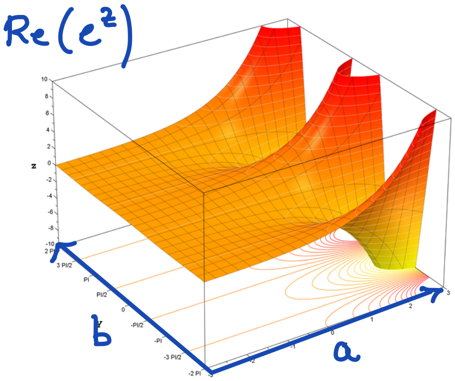
$$U = \{a + bi \,|\, a \in \mathbb{R}, 0 \leq b < 2\pi\}.$$

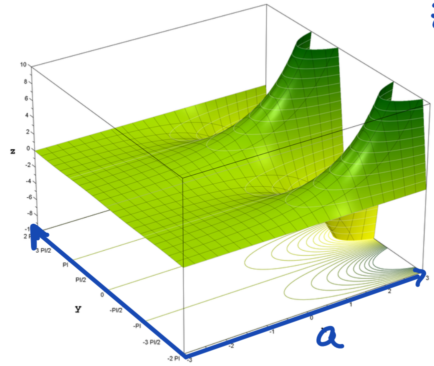
Théorème 2.1. *La fonction exponentielle* $\exp : U \to \mathbb{C}^*$ *est une bijection.*

Démonstration. Il faut commencer par observer que e^z n'est jamais nul. Il s'agit en effet d'un nombre complexe de module $e^{Re(z)}$, qui n'est jamais nul. Pour voir que l'exponentielle complexe est injective, il faut montrer que si $e^z = e^w$ pour $z = a + bi$ et $w = c + di$ dans U, alors $z = w$. Or, deux nombres complexes sont égaux si et seulement s'ils ont même module et même argument. Leur module vaut respectivement e^a et e^c. Comme l'exponentielle réelle est injective, on en déduit que $a = c$. Leur argument vaut respectivement b et d, deux nombres compris entre 0 et 2π qui doivent donc être égaux.
Montrons enfin la surjectivité. Soit v un nombre complexe non nul. Son module est r et son argument θ est choisi entre 0 et 2π. Alors $z = \ln r + i\theta$ est un nombre complexe dans U tel que $e^z = v$. □

Voici les graphes des fonctions réelles d'une variable complexe qui associent respectivement au nombre complexe z la partie réelle et la partie imaginaire de e^z.

$z \longmapsto \mathrm{Re}(e^z)$ $\qquad$ $z \longmapsto \mathrm{Im}(e^z)$





On pourrait donc définir le logarithme complexe comme la fonction réciproque de l'exponentielle complexe restreinte à U. En d'autres termes, $\ln(z) = w$ si $w \in U$ est le seul nombre complexe d'argument compris entre 0 et 2π tel que $e^w = z$.

Exemple 2.2. Dans ce cas, on calcule que $\ln(2i) = \ln 2 + \frac{\pi}{2} i$ en posant

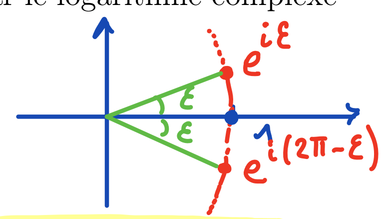
$\ln(2i) = a + bi \Leftrightarrow 2i = e^{a+bi} = e^a \cdot e^{bi} = e^a(\cos b + i \sin b) = 2i$

Ainsi $e^a = |2i| = 2$ d'où $a = \ln 2$ et $\begin{cases} \cos b = 0 \\ \sin b = 1 \end{cases}$ d'où $b = \frac{\pi}{2}$

Toutefois, ce qu'on fait usuellement ne coïncide que partiellement avec la définition du logarithme complexe donnée ci-dessus qui n'est pas une fonction continue sur tout $\mathbb{C}^*$. En effet, considérons des points proches de 1 de part et d'autre de l'axe réel sur le cercle de rayon 1 centré à l'origine et écrivons-les respectivement $e^{i\varepsilon}$ et $e^{i(2\pi-\varepsilon)}$ avec $\varepsilon > 0$ arbitrairement proche de 0. Ces deux nombres sont arbitrairement proches de 1, mais leurs images par le logarithme complexe défini ci-dessus valent respectivement

$\ln(e^{i\varepsilon}) = \varepsilon i$ qui est proche de 0

$\ln(e^{i(2\pi-\varepsilon)}) = (2\pi - \varepsilon) i$ qui est proche de $2\pi i$



Remarque 2.3. Pour définir la *détermination principale du logarithme complexe* sur $\mathbb{C} - \mathbb{R}_-$, on écrit tout nombre complexe z qui n'est pas un nombre réel négatif ou nul sous la forme $re^{i\theta}$ avec $-\pi < \theta < \pi$. On pose alors

et non $\theta \in [0 ; 2\pi[$

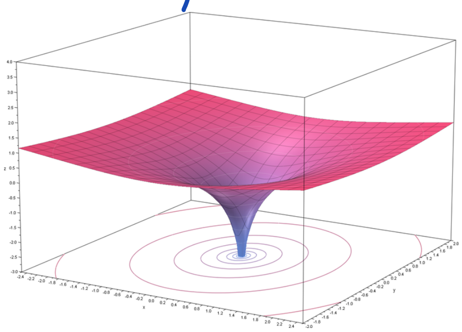
$$\ln(z) = \ln r + i\theta.$$

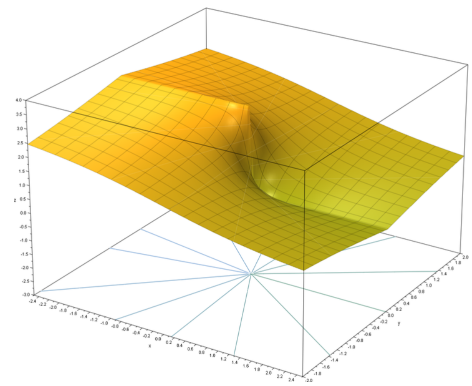
Ainsi $\ln(e^{i(2\pi-\varepsilon)}) = -\varepsilon i$

En éliminant les nombres réels négatifs, on supprime l'argument $\pi + 2k\pi$. En contrepartie, le problème de discontinuité mentionné ci-dessus est résolu et on peut définir $\ln(1) = 0$, ce qui est tout de même agréable.

Voici les graphes des fonctions parties réelles et parties imaginaires du logarithme complexe :

$z \longmapsto \mathrm{Re}(\ln z)$ $z \longmapsto \mathrm{Im}(\ln z)$





Attention ! Les propriétés très caractéristiques du logarithme népérien ne sont plus toujours vraies dans le cadre complexe !

Exemple 2.4.

$10\pi i = 5\cdot 2\pi\, i \sim 0i$ d'où $\theta = 0 \in]-\pi;\pi[$

$\ln(e^{10\pi i}) \neq 10\pi i$ car $e^{10\pi i} = e^{0\cdot i} = 1\cdot e^{0i}$ d'où $\ln(e^{10\pi i}) = \ln(1) + i\,0 = 0 \neq 10\pi i$

$$-i\frac{\pi}{2} = \ln 1 - i\frac{\pi}{2} = \ln\left(1\cdot e^{i\frac{3\pi}{2}}\right) = \ln(e^{3i\frac{\pi}{4}}\cdot e^{3i\frac{\pi}{4}}) \neq \ln(e^{3i\frac{\pi}{4}}) + \ln(e^{3i\frac{\pi}{4}}) = 2\left(\ln 1 + \frac{3\pi}{4}i\right) = \frac{3\pi}{2}i$$

$r = 1$
$\frac{3\pi}{2} \sim -\frac{\pi}{2} = \theta \in]-\pi;\pi[$

$r = 1$
et $\theta = \frac{3\pi}{4} \in]-\pi;\pi[$

3 Trigonométrie classique et hyperbolique

Nous nous souvenons que la fonction exponentielle nous a permis de définir les fonctions cosinus et sinus hyperboliques :

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Nous avons vu, ou plutôt admis, que $e^{it} = \cos t + i \sin t$. Ce lien entre l'exponentielle complexe et la trigonométrie classique va nous permettre d'exprimer le cosinus et le sinus de manière analogue au cas hyperbolique, en remplaçant simplement l'exponentielle réelle par l'exponentielle complexe.

Proposition 3.1. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a*

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad \text{et} \quad \cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

Démonstration. Nous traiterons simplement le cas du sinus.

Puisque $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ et $e^{-ix} = \cos(x) - i\sin(x)$,

On a $e^{ix} - e^{-ix} = 2i\sin(x)$ d'où $\sin(x) = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ □

4 Les similitudes du plan

Identifions le plan $\mathbb{R}^2$ avec $\mathbb{C}$, le couple (a, b) correspondant à $a + bi$. Notre compréhension de l'addition et de la multiplication complexe nous permet d'affirmer que :

1. Additionner un nombre complexe $w = a + bi$ correspond à effectuer

   une translation de vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

2. Multiplier par un nombre complexe de la forme $e^{i\theta}$ correspond à effectuer

   une rotation d'angle θ et de centre O.

   De Moivre : $z \cdot z' = re^{i\theta} \cdot r' e^{i\theta'} = r \cdot r' e^{i(\theta + \theta')}$

3. Multiplier par un nombre réel $R > 0$ correspond à effectuer

   une homothétie de rapport R et de centre O.

4. La conjugaison complexe correspond à effectuer

   la symétrie axiale d'axe Ox.

En mettant toutes ces observations ensemble nous pouvons en fait décrire *toutes* les similitudes du plan à l'aide des opérations sur les nombres complexes.

Théorème 4.1. *Soit $c = a + bi$ un nombre complexe et R un nombre réel positif.*

a) Toute translation dans $\mathbb{C}$ est de la forme $z \mapsto z + c$.

b) Toute rotation dans $\mathbb{C}$ est de la forme $z \mapsto e^{i\theta} \cdot (z - c) + c$.
Ici c est le centre de la rotation et θ son angle.

c) Toute homothétie dans $\mathbb{C}$ est de la forme $z \mapsto R(z - c) + c$.
Ici R est le rapport de l'homothétie et c son centre.

d) Toute symétrie axiale dans $\mathbb{C}$ est de la forme $z \mapsto e^{2i\theta} \cdot \overline{z - c} + c$.
Ici l'axe passe par c et son angle avec l'axe réel est θ.

Démonstration. Regardons par exemple le cas des rotations. Pour mieux comprendre qui est l'image de z, appelons τ la translation par $-c$, c'est-à-dire $\tau(z) = z - c$.
Ainsi τ^{-1} est la translation par c et s'écrit $\tau^{-1}(z) = z + c$

Ainsi, $e^{i\theta}(z-c) + c$ peut être vue comme une composition :

$$z \xmapsto{\ \tau\ } z - c \xmapsto{\ \rho\ } e^{i\theta}(z-c) \xmapsto{\ \tau'\ } e^{i\theta}(z-c)+c$$

$\tau^{-1} \circ \rho \circ \tau$ est donc bien une rotation d'angle θ et de centre c.

□

Exemple 4.2. Considérons la transformation du plan complexe donnée par $z \mapsto -2iz - 1 + 2i$. Il s'agit de la composition de

$$z \xmapsto[\rho(-\frac{\pi}{2})]{} -i \cdot z \xmapsto[H(2)]{} -2iz \xmapsto[\tau(-1+2i)]{} -2iz - 1 + 2i$$

Comment la décrire ? Commençons par chercher ses points fixes.

On pose $\quad z = a + b\,i \quad$ et on résout l'équation $\quad z = -2iz - 1 + 2i \quad \Leftrightarrow$

$$a + bi = -2i(a+bi) - 1 + 2i \quad \Leftrightarrow$$

$$a + bi = -2ia + 2b - 1 + 2i \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a = 2b - 1 \\ b = -2a + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2(-2a+2) - 1 \\ b = -2(2b-1) + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a = 3 \\ 5b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{5} \\ b = \frac{4}{5} \end{cases}$$

L'unique point fixe est $\quad c = \dfrac{3}{5} + \dfrac{\cancel{2}\,4}{5}i.$

Par les points a), b) et c) du théorème 4.1, on peut écrire l'image de z de la façon suivante :

$$z \mapsto -2i\,(z - c) + c$$

et affirmer que cette transformation géométrique et la composition

d'une homothétie de rapport 2 et de centre c et

d'une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et de centre c.

Pour conclure, voici la forme générale de toute similitude du plan complexe. Comme nous venons de le voir dans l'exemple précédent, l'écriture donnée a priori nécessite souvent quelques calculs pour comprendre géométriquement de quelle transformation il s'agit et en obtenir une écriture plus lisible.

Corollaire 4.3. *Toute similitude du plan s'écrit sous l'une des deux formes*

$$z \mapsto w \cdot z + c \qquad \textit{ou} \qquad z \mapsto w \cdot \overline{z} + c$$

avec $w \neq 0$ et c deux nombres complexes.