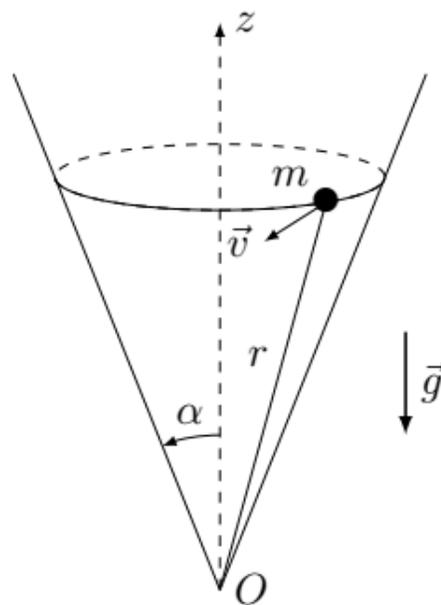


Série 10 : Potentiels effectifs et référentiels tournants

1 Point matériel sur cône [45 min]
 (Exercice tiré de l'examen de l'année 2023)

Un point matériel de masse m , soumis à la pesanteur, est contraint à se déplacer sans frottement sur un cône de révolution de sommet O s'ouvrant vers le haut avec un demi-angle d'ouverture α ($0 < \alpha < \pi/2$, $z > 0$), comme indiqué sur le dessin. On notera Oz l'axe de symétrie du cône.

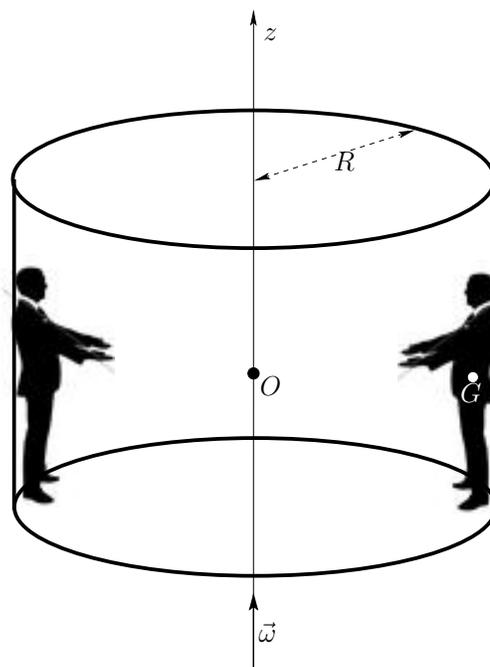


- Choisir un système de coordonnées et exprimer la contrainte géométrique de contact entre le point matériel et le cône dans ces coordonnées. Représenter sur un dessin le repère associé à ces coordonnées.
- Ecrire les équations du mouvement, et les projeter sur les axes du repère.
- Donner l'expression du moment cinétique \vec{L}_O du point matériel par rapport à O . Montrer que sa composante verticale, L_z , est égale à $mr^2\dot{\phi}\sin^2\alpha$, puis que L_z est une constante du mouvement.
- Ecrire l'expression de l'énergie mécanique E en fonction de L_z , de la distance r du point matériel au point O , et des données du problème. L'énergie mécanique E du point matériel est-elle une constante du mouvement ? Justifier votre réponse.

2 Le manège à plancher rétractable [30 min]

Un manège est constitué d'un grand cylindre creux d'axe vertical (Oz) et de rayon R . Des personnes prennent place dans le cylindre, dos plaqué contre la face interne du cylindre et l'ensemble est mis en rotation à la vitesse angulaire $\vec{\omega}$. Lorsque la vitesse de rotation est suffisante, le plancher est retiré et les personnes restent "collées à la paroi".

- Dans le référentiel tournant avec le manège, énumérer les forces exercées sur une personne à l'équilibre dans le manège. Quelle hypothèse sur les forces mises en jeu est nécessaire pour que l'équilibre soit possible ?
- Si on note μ le coefficient de frottement statique avec la paroi, quelle est la vitesse minimale de rotation, ω_{\min} , pour que le plancher puisse être retiré ?

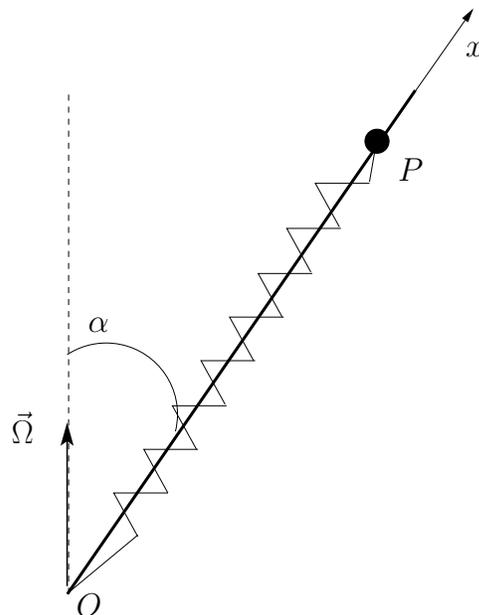


Indication : on fera l'approximation que le centre de masse de chaque personne se trouve à la distance R de l'axe du cylindre.

3 Point matériel dans un référentiel tournant [30 min]

Un point matériel P , de masse m et soumis à la pesanteur, peut coulisser sans frottement sur une tige T , d'extrémité O et formant un angle α avec la verticale. La tige tourne autour de l'axe vertical à la vitesse angulaire $\vec{\Omega}$ constante. Le point P est attaché à l'extrémité d'un ressort, de longueur à vide l_0 et de raideur k , enfilé sur la tige et dont l'autre extrémité est fixée en O . La position du point P est repérée par sa coordonnée $x(t)$ mesurée sur la tige par rapport au point O .

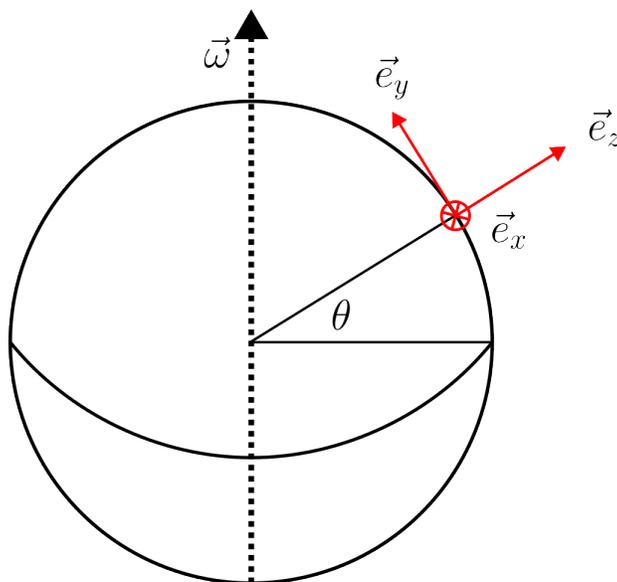
- Dans le référentiel lié à la tige, énumérer les forces exercées sur le point P , et écrire l'équation du mouvement selon x . À quel type de mouvement correspond cette équation ?
- Montrer qu'il existe une position d'équilibre x_{eq} du point P sur la tige, et calculer cette position. Que vaut la position d'équilibre dans les cas limites suivants : $k \rightarrow \infty$, $\Omega = 0$, et $\alpha = \pi/2$.



4 Déviation vers l'est [1h sans le complément]

Dans cet exercice, on considère l'effet de la force de Coriolis sur la chute d'un objet sur Terre. Cet effet fut mis en évidence de manière expérimentale en 1833 par Ferdinand Reich (1799–1882), qui mesura la déviation sur une chute d'une hauteur de 158 m.

On lâche sans vitesse initiale un objet de masse m depuis la surface de la Terre, dans un puit de profondeur H . On négligera les frottements, ainsi que les variations de l'accélération de la pesanteur avec l'altitude. On prendra par contre en compte la rotation de la terre à la vitesse angulaire ω . On notera θ la latitude du puit.



- a) Quelles sont les forces qui s'exercent sur l'objet si l'on se place dans le référentiel associé à la surface de la Terre. Les représenter.
- b) Comparer l'amplitude de la force centrifuge et de la force de gravité. Dans le reste de l'exercice, on négligera la plus petite de ces deux forces.
- c) Dans un premier temps, on ne considère que la partie de la force de Coriolis engendrée par la vitesse verticale de l'objet. Ecrire les équations du mouvement.
- d) Montrer que sous ses hypothèses, la déviation vers l'est après une chute de longueur h est donnée par

$$x = \frac{1}{3}\omega g \left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{3}{2}} \cos \theta.$$

- e) Application numérique : calculer la déviation vers l'est mesurée par Ferdinand Reich. La mine se trouvait en Saxe (latitude $50^{\circ} 53'$). Calculer la vitesse maximale de la masse. Commenter sur l'approximation faite en c).

Compléments de cours, hors programme

- f) Maintenant, nous ne négligeons plus le changement de direction de la vitesse du mobile. Par contre, au vu des résultats, nous continuons de négliger dans le calcul des forces le changement de latitude. Par simplicité (ce n'est plus vraiment rigoureux), nous continuons aussi de négliger la force centrifuge. Etablir les équations du mouvement du mobile.
- g) En dérivant l'équation du mouvement sur l'axe est-ouest, montrer que la vitesse de l'objet est donnée par

$$\dot{x}(t) = \frac{g \cos \theta}{2\omega} (1 - \cos 2\omega t)$$

En déduire $x(t)$.

- h) En utilisant le résultat précédent, en déduire $y(t)$ et $z(t)$.
- i) On donne $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ et $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$ pour $|x| \ll 1$. Vérifier que l'on retrouve les formules de la question d). L'objet est-il dévié vers le sud ou vers le nord ? De combien ? Ferdinand Reich avait trouvé une déviation de 0.4cm . Est-ce compatible ?

Données : rayon de la Terre : 6370km , accélération gravitationnelle $g = 9.81\text{ms}^{-2}$.

Elements de réponse

Exercice 2 : La condition pour que le plancher puisse être retiré est

$$\omega \geq \omega_{\min} \quad \text{avec} \quad \omega_{\min} = \sqrt{\frac{g}{\mu R}}. \quad (1)$$

Exercice 3 : La position d'équilibre est donnée par

$$x_{eq} = \frac{kl_0 - mg \cos \alpha}{k - m\Omega^2 \sin^2 \alpha}. \quad (2)$$