Preuve : Soit $M = \sup\{f(x)\ ;\ x \in [a,b]\} = \sup \mathrm{Im}(f) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

On veut trouver $x \in [a,b]$ tel que $f(x) = M$:

- Il existe une suite (x_n) telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [a,b]$ et $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = M$ (propriétés du supremum, détails après). $(*)$

- Par Bolzano-Weierstrass, ① intervalle borné, (x_n) admet une sous-suite $(\tilde{x}_n)$ qui converge, donc ② intervalle fermé $\exists c \in [a,b]$ tel que $\lim_{n\to+\infty} \tilde{x}_n = c$.

- On a $\lim_{n\to+\infty} f(\tilde{x}_n) = \begin{cases} M & \text{car } (f(\tilde{x}_n)) \text{ est une sous-suite de } (f(x_n)) \\ f(c) & \text{par continuité de } f. \end{cases}$ ③ continuité

- Donc $\exists c \in [a,b]$ tel que $f(c) = M < +\infty$.
  Donc M est un maximum. (la démonstration est analogue pour le minimum) ∎

Détail $(*)$: $M = \sup A$ avec $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists a \in A$ t.q. $M - \varepsilon \leq a \leq M \Rightarrow |a - M| \leq \varepsilon$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on prend $\varepsilon = \frac{1}{n}$ il s'ensuit $\exists a_n \in A$ tel que $|a_n - M| \leq \frac{1}{n}$

Dans le cadre de $(*)$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists x_n \in [a,b]$ t.q. $|f(x_n) - M| \leq \frac{1}{n}$.

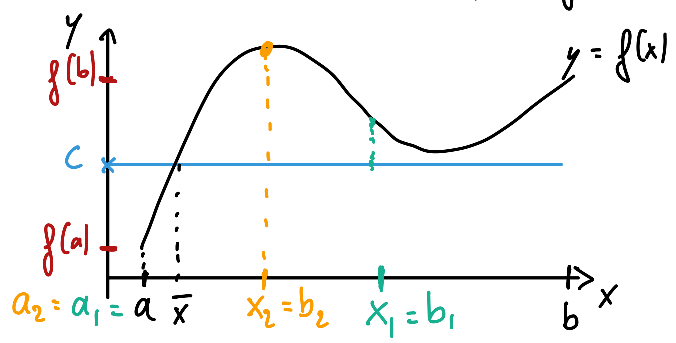
Ceci est un exemple de suite $(x_n)_{n \geq 1}$ satisfait $(*)$. ∎

fin cours 9/11

Thm 2. (Thm. des valeurs intermédiaires). Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue ($a, b \in \mathbb{R}$).
Alors f prend toutes les valeurs entre $f(a)$ et $f(b)$, c'est-à-dire :
- si $f(a) \leq f(b)$ alors $[f(a), f(b)] \subset \mathrm{Im}(f)$.
- si $f(b) \leq f(a)$ alors $[f(b), f(a)] \subset \mathrm{Im}(f)$.

Preuve : Supposons $f(a) \leq f(b)$ (l'autre cas se traite de façon analogue).
Soit $c \in [f(a), f(b)]$. Montrons que $\exists \bar{x} \in [a,b]$ tel que $f(\bar{x}) = c$.
- Si $c = f(a)$, on pose $\bar{x} = a$
  Si $c = f(b)$, on pose $\bar{x} = b$

• Sinon $c \in]f(a), f(b)[$. On pose $g(x) = f(x) - c$
Alors g est continue sur $[a,b]$ et $g(a) < 0$ et $g(b) > 0$.
On va construire $\bar{x} \in [a,b]$ tel que $g(\bar{x}) = 0$



On construit $\bar{x}$ par dichotomie (bissection) :
Soit $x_1 = \frac{a+b}{2}$

Si $\begin{cases} g(x_1) = 0 & \text{on pose } \bar{x} = x_1 \\ g(x_1) > 0 & \text{on pose } a_1 = a, \ b_1 = x_1 \\ g(x_1) < 0 & \text{on pose } a_1 = x_1, \ b_1 = b. \end{cases}$

⋮

Soit $x_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$

Si $\begin{cases} g(x_n) = 0 & \text{on pose } \bar{x} = x_n \\ g(x_n) > 0 & \text{on pose } a_n = a_{n-1} \text{ et } b_n = x_n \\ g(x_n) < 0 & \text{on pose } a_n = x_n \text{ et } b_n = b_{n-1} \end{cases}$

• Soit $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que $g(x_n) = 0$ dans ce cas, $\bar{x} = x_n$ et on a terminé.
• Sinon, on a défini 2 suites : $\begin{cases} (a_n)_{n\geq 1} \text{ croissante et majorée par } b. \\ (b_n)_{n\geq 1} \text{ décroissante et minorée par } a. \end{cases}$

De plus $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ (par récurrence), donc $\lim_{n\to+\infty} (b_n - a_n) = 0$

Donc (a_n) et (b_n) sont des suites adjacentes, elles convergent vers la même limite $\ell \in [a,b]$.

On a $\lim_{n\to+\infty} g(a_n) \begin{cases} \leq 0 & \text{car } g(a_n) \leq 0, \ \forall n \\ = g(\ell) & \text{car } g \text{ continue} \end{cases}$

$\lim_{n\to+\infty} g(b_n) \begin{cases} \geq 0 & \text{car } g(b_n) \geq 0, \ \forall n \\ = g(\ell) & \text{car } g \text{ continue} \end{cases}$

On en déduit $g(\ell) = 0$. On pose $\bar{x} = \ell$ et on a $\begin{cases} \bar{x} \in [a,b] \\ f(\bar{x}) = c. \end{cases}$ ∎

Thm. 3 (synthèse de Thm. 1 et thm. 2). Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue $(a, b \in \mathbb{R})$ alors $\mathrm{Im}(f) = [m, M]$ où $\begin{cases} m = \min(f) \text{ existe} \\ M = \max(f) \text{ existe} \end{cases}$

En particulier, l'image d'un intervalle fermé borné par une fonction continue est un intervalle fermé borné.

Preuve: Par le Thm. 1, $\exists c, C \in [a,b]$ tels que $\begin{cases} f(c) = m := \min(f) \\ f(C) = M := \max(f) \end{cases}$

On en déduit, $\mathrm{Im}(f) \subset [m, M]$

Pour l'inclusion réciproque :

$$[m, M] = [f(c), f(C)] \subset \mathrm{Im}(f|_{[c,C]}) \subset \mathrm{Im}(f)$$

Par le TVI (Thm. 2)

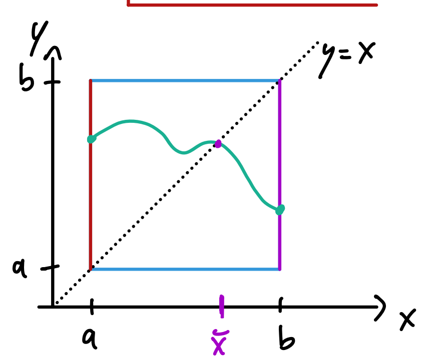
Restriction de f à l'intervalle $[c, C] \subset [a,b]$

On en déduit $\mathrm{Im}(f) = [m, M]$.

Conséquence de Thm 2 : existence de points fixes

Proposition : Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ continue. Alors il existe $\bar{x} \in [a,b]$ tel que $f(\bar{x}) = \bar{x}$.

appelé "point fixe" de f.



Preuve: Soit $g(x) = f(x) - x$, continue sur $[a,b]$

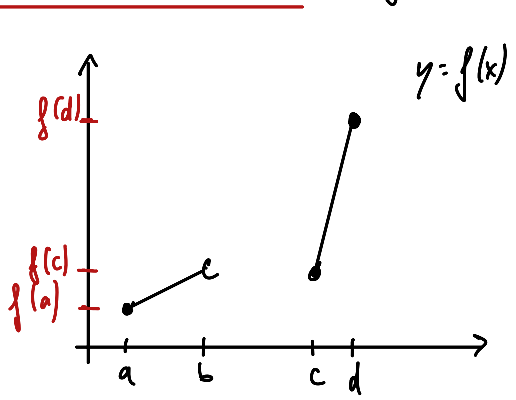
On a $\begin{cases} f(a) \geq a & \text{donc } g(a) \geq 0 \\ f(b) \leq b & \text{— } g(b) \leq 0 \end{cases}$

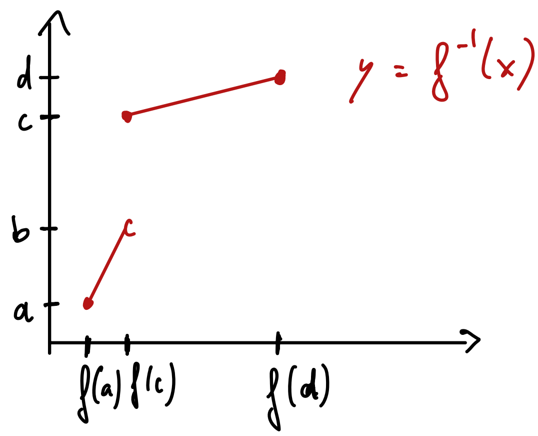
Par le T.V.I (Thm. 2), $\exists\, \bar{x} \in [a,b]$ tel que $g(\bar{x}) = 0$ donc $f(\bar{x}) = \bar{x}$ ■

5.8 Fonctions réciproques de fonctions continues

Rappel: Si $f : D \to \mathrm{Im}(f)$ est injective alors f est bijective.

Thm: La réciproque d'une fonction continue injective (existe, et) est continue sur l'image de tout intervalle.





$f : [a,b[\,\cup\, [c,d] \to [f(a), f(d)] = \mathrm{Im}(f)$ est bijective et continue.

f^{-1} n'est pas continue.

Le Thm. ne s'applique pas car $D(f)$ n'est pas un intervalle.

Par contre
- $f|_{[a,b[}$ admet une réciproque continue.
- $f|_{[c,d]}$ ____________________ .

Chapitre 6 : Calcul différentiel

Dans ce chapitre $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in]a, b[\subset D$ avec $a < b$.

6.1 Définition

Déf (dérivabilité). Une fonction f est dérivable en x_0 ssi :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ existe et } \in \mathbb{R}$$

Remarque : En posant $x = x_0 + h$, on a $\displaystyle \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

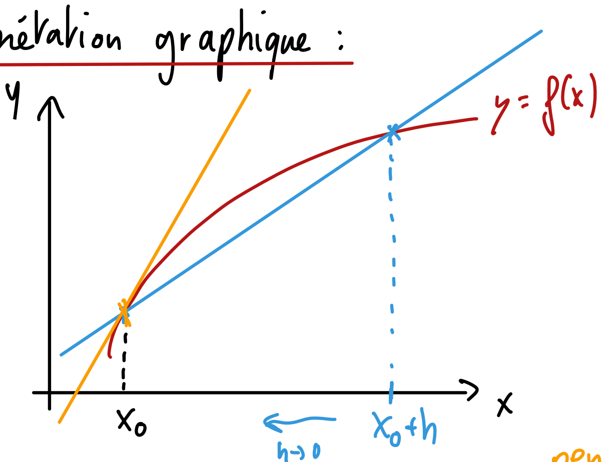
Cette limite est appelée la dérivée de f en x_0 et notée $f'(x_0)$

Exemple : Soit $f(x) = \sin(x)$ et $x_0 = 0$, on a

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(0+h) - \sin(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$$

déjà vue.

Interprétation graphique :

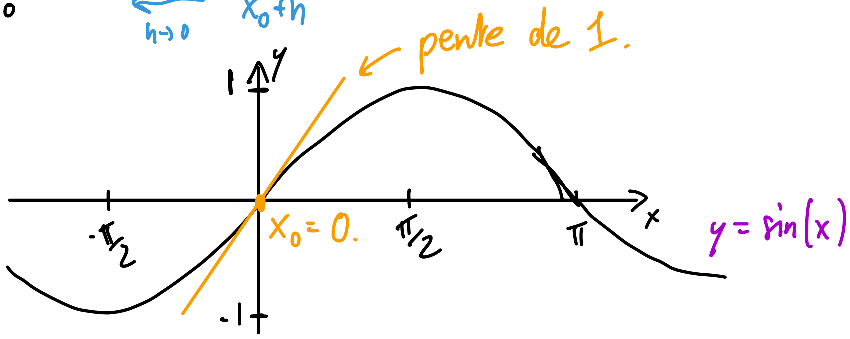


Droite bleue :

$$y = f(x_0) + \underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{\downarrow h \to 0}(x - x_0)$$

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Exemple :



Def (différentiabilité). Une fonction est différentiable en x_0 ssi

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}, \text{ tel que } f(x) = f(x_0) + \alpha \cdot (x - x_0) + r(x)$$

où $r(x)$ vérifie $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{r(x)}{x - x_0} = 0$

Remarque : en posant $R(x) = \frac{r(x)}{x - x_0}$, on a que f est différentiable en x_0 ssi

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}, \text{ tel que } f(x) = f(x_0) + \alpha \cdot (x - x_0) + (x - x_0) R(x)$$

où $R(x)$ vérifie $\lim\limits_{x \to x_0} R(x) = 0$.

Thm: f est différentiable en $x_0 \iff f$ dérivable en x_0
De plus $\alpha = f'(x_0)$.

Preuve : f est différentiable en x_0 avec $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\iff f(x) = f(x_0) + \alpha \cdot (x - x_0) + r(x) \text{ avec } \lim_{x \to x_0} \frac{r(x)}{x - x_0} = 0$$

$$\iff \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \alpha \cdot (x - x_0)}{x - x_0} = 0$$

$$\iff \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \alpha \right) = 0$$

$$\iff \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \alpha$$

$$\iff f \text{ dérivable en } x_0 \text{ et } f'(x_0) = \alpha. \quad \blacksquare$$

Def (fonction dérivée). On dit que $f : D \to \mathbb{R}$ est dérivable sur $]a, b[\subset D$ ssi f est dérivable en tout point $x_0 \in]a, b[$. La fonction

$$f' : \left| \begin{array}{l}]a, b[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \end{array} \right.$$

est la dérivée de f.

fin cours 13/11